ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПОНТРЯГИНА В ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ И В ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЕ[1]

С.С.Акбаров

24 декабря 2009 г.

[1] Настоящая работа представляет собой оригинальный текст старой статьи автора, английский перевод которой вышел в 2003 году в JMS: S. S. Akbarov. "Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in topological algebra", *Journal of Mathematical Sciences*, 113(2):179-349, 2003.

Введение

Теория топологических векторных пространств, составляющая фундамент нынешнего функционального анализа, считается в настоящее время вполне устоявшейся, если не сказать мертвой, математической дисциплиной. Основанием для такого пессимистического взгляда служит картина, в которой, с одной стороны, представлена всем известная система фактов, ставших классическими со времен Макки и Гротендика, а с другой – явно или неявно выражается мнение, что любое отклонение от этой системы неизбежно приводит к разочарованию.

"Не пытайтесь найти никакие другие закономерности и связи, кроме тех, что здесь описаны, потому что на любое Ваше предположение в природе найдется контрпример",– эту фразу следовало бы приводить послесловием к трем переведенным на русский язык учебникам по топологическим векторным пространствам [1, 2, 3], которые с 60-х годов по настоящее время представляют лицо этой науки.

Действительно, начиная со знаменитого контрпримера Энфло [4], развитие теории топологических векторных пространств, задумывавшейся поначалу как естественное продолжение простой и понятной всем линейной алгебры, превратилось (по крайней мере с точки зрения стороннего наблюдателя) в последовательность сообщений о том, какие диковинные картины встречаются в современной математике. Прямым отражением этого процесса является всеобщий скепсис и потеря интереса к этой области. Количество работ по теории ТВП неуклонно падает, а отношение коллег-математиков к этой теме выражается сегодня вежливым недоумением или сочувственной иронией.

Если добавить к этому, что в самом функциональном анализе безусловно большая часть специалистов вовсе не занимается общими топологическими векторными пространствами, сознательно ограничивая себя рамками банаховой теории, то становится понятным, сколь узок должен быть круг людей, интересующихся картиной в целом (и как страшно далеки они должны быть от народа)[1].

Доминирующее положение банаховой тематики в функциональном анализе делает правомерным вопрос: *чем же так хорош банахов случай по сравнению с общим топологическим?* На идейном уровне это отличие ярче всего проявляется в теории топологических алгебр: если понятие банаховой алгебры естественно вытекает из прямых интуитивных ожиданий, подготовленных знакомством с общей алгеброй и теорией банаховых пространств (и приводит к построению содержательной теории банаховых алгебр), то с общими топологическими алгебрами дело обстоит совершенно иначе. Здесь вдруг обнаруживается, что непосредственные попытки определить топологическую алгебру (и топологический модуль над ней) сразу же приводят к результатам, противоречащим интуиции.

Речь идет вот о чем. Интуитивно ясно, что "правильное" определение топологической алгебры (и топологического модуля) должно быть таким, чтобы обеспечивать по крайней мере следующий минимальный список требований:

(a) *разумные условия полноты* [2], поскольку речь идет об объектах, наделенных равномерной структурой;

(b) *непрерывность операции умножения в каком-нибудь подходящем смысле*;

(c) *возможность наделять кольцо* $\mathrm{End}_A(X)$ *эндоморфизмов произвольного данного "правильного" топологического модуля* X *над алгеброй* A *структурой топологической алгебры в смысле принятого определения.*

Удивительно, но, несмотря на простодушную скромность этих условий, отвечающего им определения до сих пор предложено не было. Можно проверить, например, что если непрерывность умножения понимается в совместном смысле (наиболее распространенное определение, см. [5]-[8]), то становится непонятным, как определить топологию в пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ линейных непрерывных операторов на (небанаховом) пространстве X, чтобы умножение в $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ стало (совместно) непрерывным. С другой стороны, если умножение считать непрерывным в раздельном смысле (также часто употребляемое определение, см. [9]), то выяснится, что невозможно обеспечить условие полноты для $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$.

При этом, надо понимать, что ситуация никак не прояснится, если попытаться сузить класс изучаемых пространств, потребовав от них каких-нибудь дополнительных "хороших" свойств: здесь даже самый первый шаг в сторону расширения банаховой картины – рассмотрение пространств Фреше – оказывается проблематичным.

Задача корректного определения топологических алгебр, как ее можно было бы назвать, естественно формализуется в терминах *моноидальных* (monoidal) и *относительных* (enriched) *категорий* – [10, 11, 12]. Пользуясь этой терминологией и имея в качестве руководящего примера чисто алгебраическую картину, можно следующим образом выразить пожелания к аксиоматической схеме топологической алгебры.

[1] Согласно Compumath, например, в 1996 году только 7 статей было посвящено локально выпуклым и топологическим векторным пространствам, в то время, как 612 – банаховым. В теории топологических алгебр это отношение составляло 6:90.

[2] Это нужно, например, для того, чтобы строить теорию интегрирования (см. ниже результаты §8). Напомним, что именно условие полноты выделяет банаховы пространства среди просто нормируемых.

0^*. Вначале фиксируется некая *категория $\mathfrak{K}$ топологических векторных пространств* над некоторым полем, скажем, $\mathbb{C}$, имеющая морфизмами линейные непрерывные отображения. Категория $\mathfrak{K}$ должна содержать банаховы пространства, а все пространства $X \in \operatorname{Ob}\mathfrak{K}$ должны удовлетворять определенному условию полноты.

1^*. На $\mathfrak{K}$ задается *тензорное произведение* $\otimes$, превращающее $\mathfrak{K}$ в *симметрическую моноидальную категорию* с полем $\mathbb{C}$ в качестве единичного объекта. Это означает выполнение тождеств

$$X \otimes (Y \otimes Z) \cong (X \otimes Y) \otimes Z, \quad X \otimes Y \cong Y \otimes X, \quad \mathbb{C} \otimes X \cong X \cong X \otimes \mathbb{C}$$

2^*. Для любых двух объектов $X, Y \in \operatorname{Ob}\mathfrak{K}$ пространство морфизмов $\operatorname{Mor}(X,Y)$ наделяется топологией так, чтобы $\operatorname{Mor}(X,Y)$ стало объектом $\mathfrak{K}$. При этом должно выполняться тождество [3]

$$\operatorname{Mor}(X \otimes Y, Z) = \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Mor}(Y, Z))$$

естественное по X,Y,Z. Это условие называется *замкнутостью* категории $\mathfrak{K}$.

3^*. *Топологической алгеброй* объявляется всякий моноид категории $\mathfrak{K}$, то есть всякий объект A с фиксированными морфизмами $\alpha : A \otimes A \to A$ (умножение) и $\varepsilon : \mathbb{C} \to A$ (единица), подчиненным аксиомам ассоциативности и единицы

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "1\otimes\alpha"'] & & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\alpha\otimes 1"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\alpha"] & A & A \otimes A \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \otimes A \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes 1"'] & A & A \otimes \mathbb{C} \arrow[l, phantom, "\cong"] \arrow[dl, "1\otimes\varepsilon"] \\ & A \otimes A \arrow[u, "\alpha"] & \end{tikzcd} .$$

Морфизмом алгебр $\varphi : (A, \alpha, \varepsilon) \to (B, \beta, \upsilon)$ считается произвольный *морфизм моноидов* в $\mathfrak{K}$, то есть всякий $\mathfrak{K}$-морфизм $\varphi : A \to B$, обеспечивающий коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \otimes B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\ & \mathbb{C} \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\upsilon"'] & \end{tikzcd} .$$

4^*. Для фиксированной топологической алгебры A *левые A-модули* определяются как объекты X категории $\mathfrak{K}$ с фиксированными морфизмами $\mu : A \otimes X \to X$ (умножение на элементы A), подчиненными аксиомам

$$\begin{tikzcd} A \otimes (A \otimes X) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "1\otimes\mu"'] & & (A \otimes A) \otimes X \arrow[d, "\alpha\otimes 1"] \\ A \otimes X \arrow[r, "\mu"] & X & A \otimes X \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \otimes X \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes 1"'] & X \\ & A \otimes X \arrow[u, "\mu"] \end{tikzcd} .$$

Левые A-модули образуют категорию ${}_A\mathfrak{K}$, морфизмами которой служат $\mathfrak{K}$-морфизмы $\varphi : X \to Y$, сохраняющие умножение, то есть обеспечивающие коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \otimes X \arrow[r, "1\otimes\varphi"] \arrow[d, "\mu_X"'] & A \otimes Y \arrow[d, "\mu_Y"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd} ,$$

где μ_X и μ_Y – умножение в X и Y. Аналогично определяется категория правых A-модулей $\mathfrak{K}_A$.

5^*. Для любых левых A-модулей X и Y пространство A-морфизмов $\operatorname{Mor}_A(X,Y)$ наделяется структурой топологического векторного пространства, превращающей $\operatorname{Mor}_A(X,Y)$ в объект категории $\mathfrak{K}$. Операция композиции при этом должна продолжаться до морфизма в $\mathfrak{K}$

$$\operatorname{Mor}_A(Y,Z) \otimes \operatorname{Mor}_A(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Mor}_A(X,Z)$$

[3]Выражаясь аккурантнее, имеется бифунктор $\operatorname{Hom}(?,?) : \mathfrak{K}^{\mathrm{op}} \times \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ (называемый *внутренним Hom - функтором*), удовлетворяющий тождеству $\operatorname{Mor}(X \otimes Y, Z) = \operatorname{Mor}(X, \operatorname{Hom}(Y, Z))$

Таким образом, категория ${}_A\mathfrak{K}$ левых A-модулей превращается в *относительную категорию* над $\mathfrak{K}$. Аналогичным образом категория $\mathfrak{K}_A$ правых A-модулей должна наделяться структурой относительной категории над $\mathfrak{K}$.

На сегодняшний день эта схема реализована полностью только в банаховой теории (и именно этим с категорной точки зрения можно объяснять причины ее популярности). Обобщений на более широкие классы пространств не построено, хотя исследования в близких направлениях предпринимались – например в [13, 14]. Восполнению этого пробела именно и посвящена предлагаемая работа.

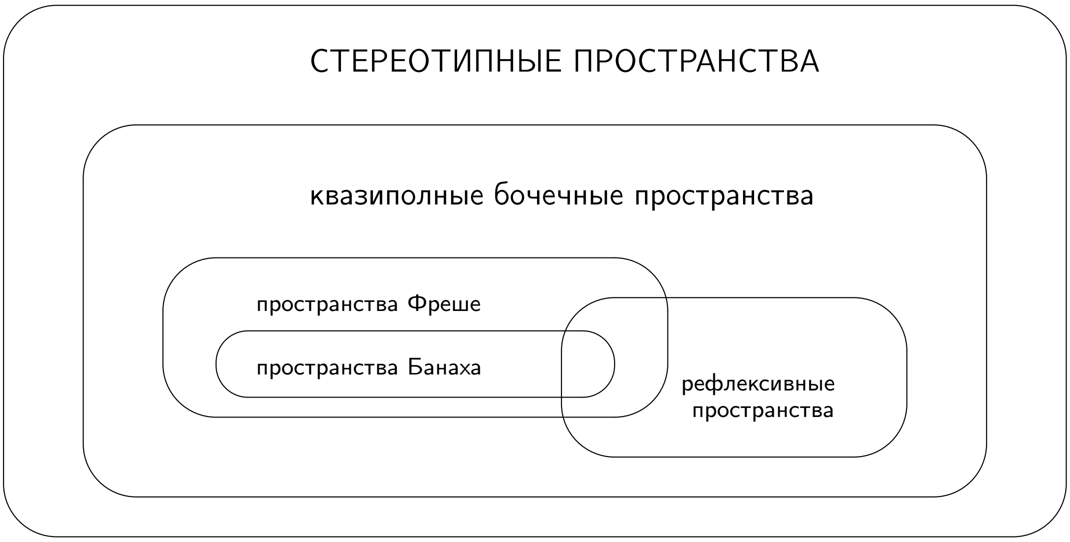
Мы намерены показать здесь, что описанная схема построения теории топологических алгебр находит самое естественное воплощение в категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных локально-выпуклых пространств, определяемых следующим образом.

Локально-выпуклое пространство X (над $\mathbb{C}$) мы называем *стереотипным* [4], если выполняется изоморфизм локально-выпуклых пространств

$$(X^\star)^\star \cong X$$

в котором *каждая звездочка* * *обозначает сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов (со значениями в* $\mathbb{C}$*), наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах.* Нетрудно узнать в этом определении одну из модификаций двойственности Понтрягина для абелевых топологических групп, поэтому стереотипные пространства можно называть также *рефлексивными по Понтрягину.*

Класс стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$ рассматривался автором в серии работ [15] –[22], продолжающих более ранние исследования М.Ф.Смит [23], Б.С.Брудовского [24], В.С.Уотерхауса [25] и К.Браунера [26]. Этот класс *образует категорию с линейными непрерывными отображениями в качестве морфизмов*, и включает все квазиполные бочечные (а значит и все реально используемые в анализе) пространства:



В сравнении с другими категориями топологических векторных пространств (даже по сравнению с банаховой категорией[5]), категория стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$ обладает удивительными по красоте свойствами, приближающими ее к стандартным категориям чистой алгебры, и оправдывающими теоретический интерес к ней. Если не считать абелевости – условия, отличающего чисто алгебраическую ситуацию от типичных обстоятельств функционального анализа – категория $\mathfrak{Ste}$ удовлетворяет, грубо говоря, всем мыслимым разумным пожеланиям, которые только могут прийти в голову. В частности, конструкции, построенные в категории $\mathfrak{Ste}$ по правилам $3^* - 4^*$, отвечают сформулированным выше требованиям $(a), (b), (c)$, поскольку, помимо прочего, стереотипные пространства обладают свойством *псевдополноты* (каждая вполне ограниченная направленность Коши сходится). Кроме того,

— $\mathfrak{Ste}$ *предабелева* (т.е. аддитивна, и всякий морфизм обладает ядром, коядром, образом и кообразом);

— $\mathfrak{Ste}$ *полна и кополна* (т.е. всякий проективный и всякий индуктивный предел сходится);

— $\mathfrak{Ste}$ *автодуальна относительно функтора* $X \mapsto X^\star$ *перехода к сопряженному пространству*;

[4]Аргументы в пользу этого термина приводятся в § 4(a)

[5]См. например, ниже теоремы 9.9 и 9.22.

— $\mathfrak{Ste}$ обладает естественной структурой *замкнутой симметрической моноидальной категории*;

— для всякой топологической алгебры A (т.е. моноида) в категории $\mathfrak{Ste}$ соответствующая категория ${}_A\mathfrak{Ste}$ левых A-модулей из $\mathfrak{Ste}$ обладает естественной структурой *относительной категории над категорией* $\mathfrak{Ste}$;

— категория ${}_A\mathfrak{Ste}$ также *предабелева, полна и кополна*;

— то же самое справедливо и для категории $\mathfrak{Ste}_A$ правых A-модулей, причем функтор перехода к сопряженному пространству $X \mapsto X^\star$ устанавливает *антиизоморфизм между* ${}_A\mathfrak{Ste}$ *и* $\mathfrak{Ste}_A$.

Содержательно все это означает, что в классе $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств оказывается возможным построение теории топологических (ассоциативных) алгебр, корректно организованной в описанном выше смысле, и включающей в себя составными частями теорию банаховых алгебр и одновременно чистую алгебру (т.е. теорию ассоциативных алгебр над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). При этом, вдохновляющим моментом возникающей картины является то, что алгебраическая интуиция в существенной мере сохраняет свою силу, вместо того, чтобы, как это обычно бывает, тут же погибнуть, споткнувшись о непроходимые дебри контрпримеров или виртуозные манипуляции с выбором нужной топологии.

Подтверждением этому служат следующие результаты.

1. В стереотипной теории без труда доказываются аналоги таких классических алгебраических результатов, как *теоремы Риффеля и Веддерберна* для простых алгебр (теоремы 13.7 и 14.25).

2. Эта теория обладает естественными конструкциями *групповых алгебр*, с помощью которых удается установить взаимно-однозначное соответствие между непрерывными (гладкими, голоморфными, регулярными) представлениями локально-компактных групп G (вещественных групп Ли, комплексных групп Ли, аффинных алгебраических групп) и представлениями алгебры мер $\mathcal{C}^\star(G)$

(распределений $\mathcal{E}^\star(G)$, голоморфных потоков $\mathcal{O}^\star(G)$, регулярных потоков $\mathcal{R}^\star(G)$). Как и полагается быть групповым алгебрам, *алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$, $\mathcal{E}^\star(G)$, $\mathcal{O}^\star(G)$, $\mathcal{R}^\star(G)$ оказываются алгебрами Хопфа относительно проективного стереотипного тензорного произведения* $\circledast$ (определенного в § 7(a)). Если для алгебр $\mathcal{E}^\star(G)$, $\mathcal{O}^\star(G)$ и $\mathcal{R}^\star(G)$ это свойство – привычный факт, то для алгебры мер $\mathcal{C}^\star(G)$ оно совсем не тривиально. Пример $\mathcal{C}^\star(G)$, между прочим, важен потому что является, по-видимому, единственным (на сегодняшний день) примером, в котором групповая алгебра локально компактной группы является алгеброй Хопфа.

3. В соответствии с принципом двойственности, *сопряженные алгебры $\mathcal{C}(G)$, $\mathcal{E}(G)$, $\mathcal{O}(G)$, $\mathcal{R}(G)$ (непрерывных, гладких, голоморфных и регулярных функций) оказываются алгебрами Хопфа относительно двойственного инъективного стереотипного тензорного произведения* $\odot$ (определенного в § 7(b)).

4. Стереотипные групповые алгебры $\mathcal{C}^\star(G), \mathcal{E}^\star(G)$ для компактных вещественных групп, групповые алгебры $\mathcal{O}^\star(G), \mathcal{R}^\star(G)$ для редуктивных комплексных групп, а также стереотипная алгебра операторов $\mathcal{L}(X)$ на стереотипном пространстве X со свойством стереотипной аппроксимации, оказываются алгебрами с весьма интересной и важной дополнительной структурой – *точным отражением* @, аксиоматически определенным в §13. Для всех таких алгебр мы доказываем общую теорему о бикоммутанте (теорема 14.23): *если стереотипная алгебра с точным отражением $(A, @)$ действует эффективно на стереотипном пространстве X то A плотна в своем бикоммутанте $A^{!!}(X)$ (который также является стереотипной алгеброй)*. Структура отражения @ на стереотипной алгебре A позволяет определить конечномерные морфизмы и модули со свойством аппроксимации над A. Ее содержательность иллюстрируется, например, следующим наблюдением: *непрерывное представление π компактной группы G в конечномерном пространстве X тогда и только тогда будет неприводимым, когда соответствующий морфизм алгебр $\varphi : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{L}(X)$ сохраняет отражение* (пример 14.22).

5. Несмотря на неабелевость категории $\mathfrak{Ste}$, в ней оказывается возможным построение *абсолютной теории гомологий*, и, хотя ее главный инструмент – лемму о длинной точной последовательности – в категорном смысле получить не удается, тем не менее, это позволяет корректно определить понятия абсолютной проективности и инъективности, а также обычные гомологические инварианты, как, например, (абсолютную) гомологическую размерность. Содержательность этим понятиям придают следующие наблюдения. Оказывается, что *для пространства X из $\mathfrak{Ste}$ абсолютная проективность X, как $\mathbb{C}$-модуля, эквивалентна абсолютной инъективности и эквивалентна условию стереотипной аппроксимации для X* (теоремы 9.14 и 9.16). То же самое справедливо и для стереотипных модулей над алгеброй $\mathcal{L}(X) = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(X)$ линейных непрерывных операторов на X, если X обладает аппроксимацией (теорема 14.10).

6. Категория $\mathfrak{Ste}$ позволяет строить также *относительную теорию гомологий* в духе привычного ныне подхода к теории гомологий топологических алгебр, последовательно развиваемого школой А.Я.Хелемского [27, 28]. При этом важное принципиальное отличие этой теории состоит в *возможности строить (не*

только проективные, но и) инъективные резольвенты произвольного данного модуля X над алгеброй A. Этот результат был анонсирован автором в [16] и имеет следующую предисторию. Как известно, в чистой алгебре всякий модуль X над алгеброй A обладает инъективной и проективной резольвентами [29, 30]. То же самое верно и в относительной теории гомологий банаховых алгебр [27]. Однако, если пытаться расширить класс рассматриваемых топологических алгебр (и модулей), то обнаружится странная асимметрия между проективностью и инъективностью: существование проективных резольвент доказывается (как и в банаховом случае) элементарно, а инъективные резольвенты построить не удается даже для алгебр Фреше. В обзорной статье А.Я.Хелемского [31] проблема существования инъективных резольвент для алгебр Фреше упоминалась первой в списке нерешенных проблем теории гомологий топологических алгебр, и совсем недавно в работе А.Ю.Пирковского [32] было показано, что она имеет отрицательное решение: существуют алгебры Фреше, у которых некоторые модули не обладают инъективными резольвентами (в категории A-модулей Фреше). С философской точки зрения этот факт можно считать еще одним доводом в пользу тезиса, что при изучении классов пространств, более широких, чем банаховы, ограничиться случаем Фреше невозможно. В качестве же разумного решения можно использовать класс стереотипных пространств, для которых (в силу принципа двойственности) асимметрии между проективностью и инъективностью не возникает.

7. В § 14(e) и § 15(d) мы вычисляем гомологические размерности некоторых классических алгебр в русле двух теорий гомологий стереотипных алгебр. Интересно, что при этом получающиеся результаты для абсолютной и относительной теории ничем друг от друга особенно не отличаются (хотя, конечно, это может быть результатом слишком поверхностного рассмотрения этого вопроса, поскольку полученные нами результаты касаются лишь случая, когда гомологическая размерность алгебры равна нулю).

Скажем, равенство нулю абсолютной или относительной размерности алгебры $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на топологическом пространстве M

$$\operatorname{dh}\mathcal{C}(M)=0$$

оказывается эквивалентно дискретности пространства M, и то же справедливо для других классических функциональных алгебр.

С другой стороны, равенство нулю абсолютной или относительной размерности групповой алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ мер Радона на локально-компактной группе G

$$\operatorname{dh}\mathcal{C}^\star(G)=0$$

эквивалентно компактности группы G, и аналогичные результаты выполняются для других групповых алгебр.

Весьма интересный результат состоит в том, что *абсолютная гомологическая размерность алгебры операторов $\mathcal{L}(X)$ равняется нулю*

$$\operatorname{dh}\mathcal{L}(X)=0$$

тогда и только тогда, когда X обладает стереотипной аппроксимацией.

8. Помимо отмеченных результатов алгебраического характера, в категории $\mathfrak{Ste}$ обнаруживаются следующие факты, любопытные с точки зрения функционального анализа. Во-первых, оказывается, что *свойство стереотипной аппроксимации* (а также близкие к нему свойства) *сохраняется при переходе к тензорным произведениям и пространствам операторов* (таким образом, в стереотипной теории оказываются невозможными аномалии вроде контрпримера Шанковского [33], и это, конечно, намного легче воспринимается интуицией). Во-вторых, обнаруживается, что в стереотипном случае *ядро отображения Гротендика*

$$X^\star\circledast X\longrightarrow\mathcal{L}(X)$$

тогда и только тогда содержится в ядре функционала свертки

$$\operatorname{cont}: X^\star\circledast X\to\mathcal{L}(X),\quad \operatorname{cont}(f\circledast x)=f(x)$$

когда пространство X обладает стереотипной аппроксимацией (теорема 9.8). Этот факт может претендовать на право считаться решением известной *проблемы однозначности следа*, обсуждавшейся А. Гротендиком в его знаменитом мемуаре [34], поскольку аналогичное утверждение, доказанное Гротендиком для банахова случая, как известно, не переносится непосредственно на более общие пространства [35, 36]. Предъявляя же клас $\mathfrak{Ste}$, мы указываем как расширить систему банаховых пространств, чтобы, с одной стороны, охватить все реально используемые в анализе пространства, и, с другой – чтобы однозначная определенность следа оставалась, по-прежнему, эквивалентной какому-нибудь единому естественному категорному условию.

В целом, материалом этой работы автор надеется привлечь внимание специалистов к классу стереотипных пространств, замечательные свойства которых, очевидно, не могут быть цепочкой случайных совпадений, но свидетельствуют о каких-то глубинных законах природы, заслуживающих самостоятельного изучения.

Содержание этой работы было коротко изложено автором в лекциях, прочитанных в мае 1998 года в Университете Ньюкастла во время посещения им Великобритании по гранту Лондонского Математического Общества. Автор хотел бы поблагодарить Лондонское Математическое Общество, а также сотрудников Университета Ньюкастла – Б. Джонсона, З. А. Лыкову, М. С. Уайта и Н. Дж. Янга – за гостеприимство и весьма полезные обсуждения.

Автор благодарит также своих коллег из России – Р. С. Исмагилова, Г. Л. Литвинова, В. Л. Попова, Ю. В. Селиванова, О. Г. Смолянова, А. Я. Хелемского, Е. Т. Шавгулидзе и В. С. Шульмана за бесчисленные консультации и моральную поддержку.

Соглашения и обозначения

Локально-выпуклые пространства (сокращенно – ЛВП) считаются отделимыми. Категория всех ЛВП над $\mathbb{C}$ с линейными непрерывными отображениями в качестве морфизмов обозначается $\mathfrak{LCS}$. В соответствии с этим *морфизмом ЛВП* называется всякое линейное непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$.

В качестве основного поля мы используем $\mathbb{C}$, хотя все результаты сохраняются и для $\mathbb{R}$.

Множество B в ЛВП X называется *уравновешенным* если $\forall x \in B \quad -x \in B$, и *выпуклым* если $\forall x, y \in B\ \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in B$.

Помимо этого в тексте используются следующие обозначения.

$\operatorname{card} M$	мощность множества M;
$\operatorname{span} M$	линейная оболочка множества M в ЛВП X;
$\overline{\operatorname{span}}\, M$	замкнутая линейная оболочка множества M в ЛВП X;
$\operatorname{absconv} M$	выпуклая уравновешенная оболочка множества M в ЛВП X;
$\overline{\operatorname{absconv}}\, M$	замкнутая выпуклая уравновешенная оболочка множества M в ЛВП X;
ORD	класс всех порядковых чисел (то есть класс всех ординалов, являющихся множествами); или, по-другому, (единственный) ординал, не являющийся множеством [38];
X^+	пространство всех линейных функционалов $f\ X \to \mathbb{C}$ на векторном пространстве X (с.15);
X'	сопряженное пространство к ЛВП X, то есть множество линейных непрерывных функционалов $f\ X \to \mathbb{C}$, *не наделенное топологией* (с.15);
$X^\star$	сопряженное пространство *с топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах* (с.26);
$X^\natural$	пространство всех линейных функционалов $f\ X \to \mathbb{C}$, непрерывных на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$ (без какой-либо топологии, или наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах $S \subseteq X$, – с.28);
$X^{\star\star}$	$= \{X^\star\}^\star$, второе сопряженное пространство (с.29);
i_X	$X \to X^{\star\star}$ естественное отображение во второе сопряженное пространство (с.29);
X^I	прямое произведение $\operatorname{card} I$ экземпляров пространства X в $\mathfrak{LCS}$ (с.70);
X_I	прямая сумма $\operatorname{card} I$ экземпляров пространства X в $\mathfrak{LCS}$ (с.70);
2_I	система всех *конечных* подмножеств множества I (с.87);
$A + B$	$= \{a + b; a \in A,\ b \in B\} \quad (A, B \subseteq X)$;
$A - B$	$= \{a - b; a \in A,\ b \in B\} \quad (A, B \subseteq X)$;

B° $= \{f \in X^\star : \forall x \in B \quad |f(x)| \leqslant 1\}$, прямая поляра множества $B \subseteq X$ (с.26);

${}^\circ F$ $= \{x \in X : \forall f \in F \quad |f(x)| \leqslant 1\}$, обратная поляра множества $F \subseteq X^\star$ (с.26);

$B^\perp$ $= \{f \in X^\star : \forall x \in B \quad |f(x)| = 0\}$, аннулятор множества $B \subseteq X$ (с.31);

$|f|_B$ $= \sup_{x\in B} |f(x)|$ (с.15);

$\blacktriangledown, \triangledown, \vee$ *пополнение, псевдопополнение* (с.20) и *заготовка к псевдопополнению* (с.20);

$\blacktriangle, \triangle, \wedge$ *насыщение* (с.17), *псевдонасыщение* (с.23) и *заготовка к псевдонасыщению* (с.23);

$\mathcal{U}(X)$ система окрестностей нуля в ЛВП X (с.12);

$\mathcal{K}(X)$ система компактных подмножеств в ЛВП X (с.12);

$\mathcal{S}(X)$ система вполне ограниченных подмножеств в ЛВП X (с.12);

$\mathcal{M}(X)$ система *массивных в нуле* подмножеств в ЛВП X (с.13);

$\mathcal{D}(X)$ система *емких* подмножеств в ЛВП X (с.12);

$\mathcal{Q}(X)$ система выпуклых уравновешенных подмножеств в ЛВП X (с.14);

$\mathcal{P}(X)$ система *предкомпактно-замкнутых* выпуклых уравновешенных подмножеств в ЛВП X (с.14);

$\mathcal{B}(X)$ система замкнутых выпуклых уравновешенных подмножеств в ЛВП X (с.14);

$Y : X$ пространство всех линейных непрерывных отображений $\varphi\ X \to Y$, наделеное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах (с.48);

$Y \oslash X$ $= \{Y : X\}^\vartriangle$, то же самое пространство, но наделенное специальной топологией – псевдонасыщением топологии $Y : X$ (с.58);

$Z : (X, Y)$ пространство всех *непрерывных билинейных форм* $\beta\ X \times Y \to Z$ с топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах (с.56);

$Z \oslash (X, Y)$ $= \{Z : (X, Y)\}^\vartriangle$, то же самое пространство, но наделенное специальной топологией – псевдонасыщением топологии $Z : (X, Y)$ (с.59);

$X \circledast Y$ $= \{X^\star \oslash Y\}^\star$ *проективное стереотипное тензорное произведение* (с.62);

$x \circledast y$ $\in X \circledast Y, \quad (x \circledast y)(\varphi) = \varphi(y)(x) \quad (\varphi \in X^\star \oslash Y,\ x \in X,\ y \in Y)$, *элементарный проективный тензор* (с.62),

$X \odot Y$ $= Y \oslash \{X^\star\}$, *инъективное стереотипное тензорное произведение* (с.65);

$x \odot y$ $\in X \odot Y, \quad (x \odot y)(f) = f(x)y \quad (f \in X^\star,\ x \in X,\ y \in Y)$, *элементарный инъективный тензор* (с.65);

$B : A$ $= \{\varphi \in X : Y \,|\, \varphi(A) \subseteq B\}$, подмножество в $Y : X$ состоящее из операторов $\varphi : X \to Y$, переводящих $A \subseteq X$ в $B \subseteq Y$ (§ 5(d));

$B \oslash A$ $= B : A$ то же самое множество, рассматриваемое как подмножество в $Y \oslash X$ (с.53);

$A \circledast B$ $= \{A^\circ \oslash B\}^\circ = \overline{\operatorname{absconv}}\{a \circledast b; a \in A, b \in B\} \quad (A \subseteq X, B \subseteq Y)$, подмножество в $X \circledast Y$ (с.68);

$A \odot B$ $= B \oslash \{A^\circ\} \quad (A \subseteq X, B \subseteq Y)$, подмножество в $X \odot Y$ (с.68);

$\mathcal{L}(X)$ $= X \oslash X$, пространство линейных непрерывных операторов в стереотипном пространстве X (с.81);

$\mathcal{L}^\star(X)$ $= \{\mathcal{L}(X)\}^\star$, сопряженное пространство к $\mathcal{L}(X)$ (с.81);

$\mathcal{F}(X,Y)$ подпространство в $Y \oslash X$, состоящее из всех линейных непрерывных операторов конечного ранга (с.67);

$\mathcal{F}(X)$ $= \mathcal{F}(X,X)$ то же самое подпространство в $\mathcal{L}(X) = X \oslash X$ (с.83);

$\mathcal{G}(X,Y)$ подпространство в $Y \oslash X$, состоящее из операторов, аппроксимируемых конечномерными (с.67);

$\mathcal{G}(X)$ $= \mathcal{G}(X,X)$, то же самое подпространство в $\mathcal{L}(X) = X \oslash X$ (с.83);

$\operatorname{cont} u$ свертка тензора $u \in X^\star \circledast X = \mathcal{L}^\star(X)$ (с.83);

$\operatorname{tr}\varphi$ след оператора $\varphi \in @_X(X)$ (с.84);

$\beta \circ \alpha$ композиция морфизмов;

$\beta : \alpha$ $(G : F) \to (H : E)$, $\quad (\beta : \alpha)(\psi) = \beta \circ \psi \circ \alpha$, морфизм локально выпуклых пространств операторов, где $\alpha\, E \to F$ и $\beta\, G \to H$ – морфизмы (с.52);

$\beta \oslash \alpha$ $(G \oslash F) \to (H \oslash E)$, псевдонасыщение морфизма $\beta : \alpha$ (с.61);

$\alpha \circledast \beta$ $E \circledast G \to F \circledast H$, $\quad \alpha \circledast \beta = \{\alpha^\star \oslash \beta\}^\star$ проективное тензорное произведение морфизмов (с.66);

$\alpha \odot \beta$ $E \odot G \to F \odot H$ $\quad \alpha \odot \beta = \beta \oslash \alpha^\star$, инъективное тензорное произведение морфизмов (с.66);

$Y \overset{A}{:} X$ пространство морфизмов $\varphi : X \to Y$ стереотипных A-модулей X и Y, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах (с.107);

$Y \overset{A}{\oslash} X$ $= \{Y \overset{A}{:} X\}^\vartriangle$ то же пространство наделенное специальной топологией – псевдонасыщением топологии $Y \overset{A}{:} X$ (с.107);

$Z \overset{A}{:} (X,Y)$ пространство всех *непрерывных A-сбалансированных билинейных форм* $\beta\, X \times Y \to Z$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах (с.109);

$Z \underset{A}{\oslash} (X,Y)$ $= \{Z \underset{A}{:} (X,Y)\}^\vartriangle$ то же пространство наделенное специальной топологией – псевдонасыщением топологии $Z \underset{A}{:} (X,Y)$ (с.109);

$X \underset{A}{\circledast} Y$ $= \{X^\star \underset{A}{\oslash} Y\}^\star$, *проективное стереотипное тензорное произведение над алгеброй* A (с.110);

$x \underset{A}{\circledast} y$ $\in X \underset{A}{\circledast} Y$, $\quad (x \underset{A}{\circledast} y)(\varphi) = \varphi(y)(x)$ $\quad (\varphi \in X^\star \underset{A}{\oslash} Y,\ x \in X,\ y \in Y)$ *элементарный проективный тензор над алгеброй* A (с.110),

$X \underset{A}{\odot} Y$ $= Y \oslash \{X^\star\}$, *инъективное стереотипное тензорное произведение над алгеброй* A (с.112);

$x \underset{A}{\odot} y$ $\in X \underset{A}{\odot} Y$ $\quad x \underset{A}{\odot} y\,(x) = @\{x_A(f)\}\cdot y$ $\quad (x \underset{A}{\odot} y X^\star \to Y,\ f \in X^\star,\ x \in X,\ y \in Y)$, *элементарный инъективный тензор над алгеброй с отражением* $(A, @)$ (с.129);

$A^!(X)$ $= \operatorname{End}_A(X) = X \underset{A}{\oslash} X$, *коммутант* (с.122);

$A^{!!}(X)$ $= \operatorname{End}_{A^!(X)}(X) = X \underset{A^!(X)}{\oslash} X$, *бикоммутант* (с.122);

$@_{X,Y}$ $: X \circledast Y \to X \odot Y$, $@_{X,Y}(x \circledast y) = x \odot y$, *преобразование Гротендика для пары пространств* X, Y (с.66);

$@_X$ $= @_{X^\star,X}\, \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X)$, *преобразование Гротендика для одного пространства* X (с.83);

$@$ абстрактное *отражение* на стереотипной алгебре (с.126);

$@_G$ *нормальное отражение* на стереотипной групповой алгебре $\mathcal{C}^\star(G)$ (с.128);

f_A морфизм стереотипных A-модулей $f_A\ X \to A^\star$, порожденный функционалом $f \in X^\star$ (с.129);

$\mathfrak{Ban}$ категория банаховых пространств (с.42);

$\mathfrak{Fre}$ категория пространств Фреше (с.40);

$\mathfrak{Smi}$ категория пространств Смит (с.42);

$\mathfrak{Bra}$ категория пространств Браунера (с.40);

$\mathfrak{Ste}^{\circledast}$ категория проективных стереотипных алгебр (с.94);

$\mathfrak{Ste}^{\odot}$ категория инъективных стереотипных алгебр (с.96);

${}_A\mathfrak{Ste}$ категория левых стереотипных модулей над проективной стереотипной алгеброй A (с.102);

$\mathfrak{Ste}_A$ категория правых стереотипных модулей над проективной стереотипной алгеброй A (с.102);

$\operatorname{Mor}(X,Y)$ класс всех морфизмов $\varphi\ X \to Y$ (в данной категории);

$\operatorname{Mon}(X,Y)$ класс всех мономорфизмов $\varphi\ X \to Y$ (в данной категории);

$\operatorname{Epi}(X,Y)$ класс всех эпиморфизмов $\varphi\ X \to Y$ (в данной категории);

$\operatorname{End}(X)$ класс всех эндоморфизмов $\varphi\ X \to X$ (в данной категории);

$\mathcal{C}(M)$ пространство (алгебра) непрерывных функций на паракомпактном локально-компактном пространстве M, (с.71);

$\mathcal{C}(G)$ алгебра непрерывных функций на локально компактной группе G (с.90);

$\mathcal{C}^\star(M)$ пространство мер Радона на паракомпактном локально-компактном пространстве M, (с.71,91);

$\mathcal{C}^\star(G)$ алгебра мер Радона на локально компактной группе G;

$\mathcal{E}(M)$ пространство (алгебра) гладких функций на вещественном гладком многообразии M (с.77,90);

$\mathcal{E}(G)$ алгебра гладких функций на вещественной группе Ли G;

$\mathcal{E}^\star(M)$ пространство распределений на вещественном гладком многообразии M (с.77);

$\mathcal{E}^\star(G)$ алгебра распределений на вещественной группе Ли G (с.91);

$\mathcal{O}(M)$ пространство (алгебра) голоморфных функций на многообразии Штейна M (с.79,90);

$\mathcal{O}(G)$ алгебра голоморфных функций на группе Штейна G;

$\mathcal{O}^\star(M)$ пространство голоморфных потоков на многообразии Штейна M (с.79);

$\mathcal{O}^\star(G)$ алгебра голоморфных потоков на группе Штейна G (с.91);

$\mathcal{R}(M)$ алгебра регулярных функций на комплексном аффинном алгебраическом многообразии M (с.80,91);

$\mathcal{R}(G)$ алгебра регулярных функций на комплексной аффинной алгебраической группе G;

$\mathcal{R}^\star(M)$ пространство регулярных потоков на комплексном аффинном алгебраическом многообразии M (с.80).

$\mathcal{R}^\star(G)$ пространство регулярных потоков на комплексной аффинной алгебраической группе G (с.91).

§ 0 Предварительные сведения

(a) Функционал Минковского и локально-выпуклые топологии на векторном пространстве

Функционалом Минковского множества B в векторном пространстве X называется отображение $p : X \to \mathbb{R}_+$, действующее по формуле

$$p(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B\} \tag{0.1}$$

Функционал Минковского p тогда и только тогда будет полунормой на X, когда B выпукло, уравновешено и поглощает X.

Лемма 0.1. *Пусть p – функционал Минковского выпуклого уравновешенного поглощающего множества B в векторном пространстве X над $\mathbb{C}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $B = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$*;*

(ii) B оставляет замкнутый след на каждом одномерном подпространстве в X: для всякого $x \in X$ множество $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha x \in B\}$ замкнуто в $\mathbb{C}$.

Доказательство. Поскольку p – полунорма, ее “единичный шар” $\{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ оставляет замкнутый след на одномерных подпространствах. Поэтому импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна. Докажем обратную импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть выполняется (ii) и пусть p – функционал, определенный формулой (0.1). Нам нужно проверить, что

$$x \in B \quad \Longleftrightarrow \quad p(x) \leqslant 1$$

Действительно, $x \in B$ означает, что $1 \in \{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B\}$ поэтому $p(x) = \inf\{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B\} \leqslant 1$. Наоборот, если $x \notin B$, то $1 \notin \{\lambda \geqslant 0 : x \in \lambda B\}$. Если выполнено (ii), то множество $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha x \in B\}$ есть замкнутый круг в $\mathbb{C}$ с центром в нуле, поэтому $\sup\{\alpha > 0 : \alpha x \in B\} < 1$. Отсюда $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\} = \frac{1}{\sup\{\alpha > 0 : \alpha x \in B\}} > 1$. □

Лемма 0.2. *Система $\mathcal{V}$ выпуклых уравновешенных множеств в векторном пространстве X над $\mathbb{C}$ тогда и только тогда является локальной базой некоторой отделимой локально-выпуклой топологии τ на X , когда выполняются следующие условия:*

(i) все множества $B \in \mathcal{V}$ поглощают X: $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda B = X$;

(ii) $\forall B \in \mathcal{V} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \exists C \in \mathcal{V} \quad C \subseteq \lambda B$*;*

(iii) $\forall B, C \in \mathcal{V} \quad \exists D \in \mathcal{V} \quad D \subseteq B \cap C$*;*

(iv) $\bigcap_{B \in \mathcal{V}} B = \{0\}$.

При этом,

(a) множество $B \in \mathcal{V}$ будет замкнуто относительно τ тогда и только тогда, когда оно оставляет замкнутый след на каждом одномерном подпространстве в X: для всякого $x \in X$ множество $\{\alpha \in \mathbb{C} : \alpha x \in B\}$ замкнуто в $\mathbb{C}$;

(b) система $\mathcal{V}$ будет совпадать с системой $\mathcal{QU}(X_\tau)$ всех выпуклых уравновешенных окрестностей нуля в X (относительно τ) тогда и только тогда, когда для выпуклого уравновешенного множества $M \subseteq X$ условие $\exists B \in \mathcal{V} \quad B \subseteq M$ автоматически влечет за собой условие $M \in \mathcal{V}$.

Доказательство. Свойство (i) означает, что функционалы Минковского (0.1) множеств $B \in \mathcal{V}$ являются полунормами на X , свойства (ii) и (iii) – что топология τ, порожденная этими полунормами, имеет систему $\mathcal{V}$ своей локальной базой, свойство (iv) – что эта топология отделима. Свойство (a) следует из Леммы 0.1, а (b) очевидно. □

Следствие 0.3. *Если выпуклая уравновешенная окрестность нуля U в ЛВП X оставляет замкнутый след на одномерных подпространствах в X, то U – замкнутая окрестность нуля.*

(b) Вполне ограниченные, емкие и массивные в нуле множества

Если X – локально-выпуклое пространство (ЛВП) над $\mathbb{C}$, то условимся символом $\mathcal{U}(X)$ обозначать систему всех окрестностей нуля в X, а символом $\mathcal{K}(X)$ – систему всех компактов в X.

Напомним, что множество S в ЛВП X называется *вполне ограниченным*, или *предкомпактным*, если для всякой окрестности нуля U в X найдется конечное множество A такое, что $S \subseteq U + A$ [3]. Это равносильно тому, что S вполне ограничено в смысле индуцированной из X равномерной структуры [37] (то есть A *можно выбирать лежащим в* S).

Система всех вполне ограниченных множеств в X обозначается $\mathcal{S}(X)$. Поскольку всякий компакт является вполне ограниченным множеством, справедливо вложение

$$\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{S}(X)$$

Предложение 0.4. *Для множества S в ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) *S вполне ограничено в X;*

(ii) $\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists T \in \mathcal{S}(X) \quad S \subseteq U + T$;

(iii) $\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists K \in \mathcal{K}(X) \quad S \subseteq U + K$;

Определение. Множество $D \subseteq X$ мы называем *емким по отношению к множеству* $S \subseteq X$, если для всякого скаляра $\varepsilon \neq 0$ найдется конечное множество $A \subseteq X$ такое, что $S \subseteq \varepsilon D + A$. Полезно заметить, что *если D выпукло, то A можно выбирать лежащим в S* (и при этом получится эквивалентное условие на D).

Лемма 0.5. *Пересечение $C \cap D$ любых двух выпуклых уравновешенных множеств C и D, емких по отношению к S является выпуклым уравновешенным множеством, емким по отношению к S.*

Доказательство. Нужно проверить емкость $C \cap D$ по отношению к S. Пусть $\varepsilon \neq 0$. Выберем конечное множество $A \subseteq S$ так, чтобы $S \subseteq \frac{\varepsilon}{2}C + A$. Каждому $a \in A$ поставим в соответствие множество $S_a = S \cap (\frac{\varepsilon}{2}C + a)$. Поскольку D выпукло и является емким по отношению к S_a , можно подобрать конечное $B_a \subseteq S_a$ так, чтобы $S_a \subseteq \varepsilon D + B_a$. Таким образом, мы получим конечное семейство конечных множеств $\{B_a, a \in A\}$. Положим $B = \bigcup_{a \in A} B_a$ и покажем, что

$$S \subseteq \varepsilon(C \cap D) + B \tag{0.2}$$

Пусть $x \in S$. Тогда существует $a \in A$ такое, что $x \in S_a \subseteq \frac{\varepsilon}{2}C + a$, откуда

$$x - a \in \frac{\varepsilon}{2}C \tag{0.3}$$

Поскольку, далее, $x \in S_a \subseteq \varepsilon D + B_a$, найдется $b \in B_a \subseteq B$ такое, что $x \in \varepsilon D + b$, то есть

$$x - b \in \varepsilon D \tag{0.4}$$

Наконец, поскольку $b \in B_a \subseteq S_a \subseteq \frac{\varepsilon}{2}C + a$, имеем

$$b - a \in \frac{\varepsilon}{2}C \tag{0.5}$$

Множество εC выпукло и уравновешено, поэтому из (0.3) и (0.5) следует

$$x - b = (x - a) - (b - a) \in \frac{\varepsilon}{2}C - \frac{\varepsilon}{2}C = \varepsilon C$$

Вместе с (0.4) это дает $x - b \in \varepsilon C \cap \varepsilon D = \varepsilon(C \cap D)$. Таким образом, $x \in \varepsilon(C \cap D) + b \subseteq \varepsilon(C \cap D) + B$, и мы доказали (0.2). □

Определение. Множество D в ЛВП X мы называем *емким*, если оно является емким по отношению к любому вполне ограниченному множеству $S \subseteq X$. Это равносильно тому, что $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists A \subseteq X \quad S \subseteq D + A$. Система всех емких множеств в X обозначается $\mathcal{D}(X)$. Очевидно, что всякая окрестность нуля является емким множеством, поэтому справедливо включение

$$\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$$

Лемма 0.6. *Всякое выпуклое уравновешенное емкое множество D в X является поглощающим:*

$$\bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} \lambda D = X$$

Поэтому, в частности, всякое замкнутое выпуклое уравновешенное емкое множество D в X является бочкой.

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$ и рассмотрим отрезок $[0, x] = \{\lambda x; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$. Поскольку он является компактом, найдется конечное множество $A \subseteq [0, x]$ такое, что $[0, x] \subseteq D + A$. То есть отрезок $[0, x]$ покрывается конечной системой своих подинтервалов $I_a = [0, x] \cap (D + a), \quad a \in A$. Ясно, что хотя бы один из этих интервалов должен быть невырожден: $\exists a \in A \quad I_a \neq \{a\}$. Тогда I_a содержит точку вида $\alpha x + a$, где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Таким образом,$\alpha x + a \in I_a \subseteq D + a$, откуда $\alpha x \in D$ и значит $x \in \frac{1}{\alpha} D$. □

Определение. Множество M в ЛВП X мы называем *массивным в нуле*, если для любого вполне ограниченного множества S в X найдется окрестность нуля U в X такая, что $S \cap U \subseteq M$. Система всех массивных в нуле множеств в X обозначается $\mathcal{M}(X)$. Очевидно, что всякая окрестность нуля является массивным в нуле множеством, а всякое массивное в нуле множество является емким. Поэтому

$$\mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{M}(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$$

Теорема 0.7. *Для замкнутого выпуклого уравновешенного множества D в ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) D является емким;

(ii) D является массивным в нуле.

Доказательство. 1. Докажем сначала импликацию $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $D \subseteq X$ – замкнутое, выпуклое, уравновешенное и емкое множество. Зафиксируем вполне ограниченное $S \subseteq X$ и покажем, что найдется конечное множество линейных непрерывных функционалов $F \subseteq X'$ такое, что

$$S \cap {}^{\circ}F \subseteq D \tag{0.6}$$

где ${}^{\circ}F = \{x \in X : \forall f \in F \quad |f(x)| \leqslant 1\}$ – обратная поляра множества F. Выберем конечное множество $A \subseteq X$ так, чтобы $2S \subseteq D + A$, то есть

$$S \subseteq \frac{1}{2}(D + A) \tag{0.7}$$

Положим $B = A \setminus D$ и заметим, что $\forall b \in B \quad 0 \notin \frac{1}{2}(D + b)$. Поэтому каждому $b \in B$ можно по теореме Хана-Банаха поставить в соответствие функционал $f_b \in X'$, отделяющий $\frac{1}{2}(D + b)$ от нуля:

$$\inf_{x\in\frac{1}{2}(D+b)} |f_b(x)| \geqslant 2$$

Тогда

$$\forall b \in B \quad \frac{1}{2}(D + b) \cap {}^{\circ}f_b = \varnothing \tag{0.8}$$

Рассмотрим полученное конечное множество функционалов $F = \{f_b; b \in B\}$. Для него, во-первых, оказывается

$$\frac{1}{2}(D + B) \cap {}^{\circ}F = \bigcup_{b\in B} \left[\frac{1}{2}(D + b) \cap {}^{\circ}F\right] \subseteq \bigcup_{b\in B} \left[\frac{1}{2}(D + b) \cap {}^{\circ}f_b\right] = (0.8) = \varnothing \tag{0.9}$$

и, во-вторых, поскольку $A \setminus B = A \setminus (A \setminus D) = A \cap D$,

$$\frac{1}{2}(D + (A \setminus B)) \cap {}^{\circ}F \subseteq \frac{1}{2}(D + D) \cap {}^{\circ}F = D \cap {}^{\circ}F \subseteq D \tag{0.10}$$

Формулы (0.7), (0.9) и (0.10) вместе дают (0.6):

$$S \cap {}^{\circ}F \subseteq \frac{1}{2}(D + A) \cap {}^{\circ}F \subseteq \left[\frac{1}{2}(D + B) \cap {}^{\circ}F\right] \cup \left[\frac{1}{2}\Big(D + (A \setminus B)\Big) \cap {}^{\circ}F\right] \subseteq \varnothing \cup D = D$$

Итак, доказана формула (0.6), в которой ${}^{\circ}F$ есть не что иное, как (X'-слабая) окрестность нуля $U \in \mathcal{U}(X)$:

$$S \cap U \subseteq D$$

Поскольку это верно для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$, множество D массивно в нуле.

2. Для доказательства импликации $(ii) \Rightarrow (i)$ нам понадобится следующая общая формула: если A, T, U – подмножества в ЛВП X, то
$$T \cap (U + A) \subseteq (T - A) \cap U + A \tag{0.11}$$
Действительно,
$$x \in T \cap (U + A) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \in T \\ x \in U + A \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \in T \\ x \in U + a, \quad a \in A \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x - a \in T - A \\ x - a \in U, \quad a \in A \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x - a \in (T - A) \cap U \quad \Rightarrow \quad x \in (T - A) \cap U + a \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x \in (T - A) \cap U + A$$
Докажем теперь $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $D \subseteq X$ массивно в нуле, а $T \subseteq X$ выпукло, уравновешенно и вполне ограничено. Тогда $2T$ тоже будет выпукло, уравновешенно и вполне ограничено, поэтому существует окрестность нуля $U \subseteq X$ такая что
$$(2T) \cap U \subseteq D \tag{0.12}$$
Возьмем конечное $A \subseteq T$ такое, что
$$T \subseteq U + A \tag{0.13}$$
Тогда
$$T \subseteq \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{формулу (0.13)} \end{pmatrix} \subseteq T \cap (U + A) \subseteq \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{формулу (0.11)} \end{pmatrix} \subseteq (T - A) \cap U + A \subseteq$$
$$\subseteq \begin{pmatrix} \text{поскольку} \quad A \subseteq T, \\ \text{а } T \text{ выпукло и уравновешенно} \\ \text{должно выполяняться} \\ T - A \subseteq T - T = 2T \end{pmatrix} \subseteq (2T) \cap U + A \subseteq \begin{pmatrix} \text{применяем} \\ \text{формулу (0.12)} \end{pmatrix} \subseteq D + A$$
Мы получили, что для всякого выпуклого уравновешенного вполне ограниченного множества $T \subseteq X$ найдется конечное $A \subseteq X$ такое, что $T \subseteq D + A$. Если теперь взять произвольное вполне ограниченное множество S, то положив $T = \operatorname{absconv} S$ мы получим, что найдется конечное $A \subseteq X$ такое, что $T \subseteq D + A$, и поэтому
$$S \subseteq T \subseteq D + A$$
То есть D – емкое множество в X. $\square$

Определение. Множество B в X мы называем *предкомпактно-замкнутым*, если оно оставляет замкнутый след $B \cap S$ на каждом замкнутом предкомпактном множестве $S \subseteq X$.

Пусть $\mathcal{Q}(X)$ обозначает систему всех выпуклых уравновешенных множеств в X, $\mathcal{P}(X)$ – систему всех предкомпактно-замкнутых выпуклых уравновешенных множеств в X, а $\mathcal{B}(X)$ – систему всех замкнутых выпуклых уравновешенных множеств в X. Положим
$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{BD}(X) = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{D}(X) & \mathcal{PD}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{D}(X) & \mathcal{QD}(X) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{D}(X) \\
\mathcal{BM}(X) = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{M}(X) & \mathcal{PM}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}(X) & \mathcal{QM}(X) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{M}(X) \\
\mathcal{BU}(X) = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{U}(X) & \mathcal{PU}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{U}(X) & \mathcal{QU}(X) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{U}(X) \\
\mathcal{BS}(X) = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{S}(X) & \mathcal{PS}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{S}(X) & \mathcal{QS}(X) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{S}(X) \\
\mathcal{BK}(X) = \mathcal{B}(X) \cap \mathcal{K}(X) & \mathcal{PK}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{K}(X) & \mathcal{QK}(X) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{K}(X)
\end{array}$$
Очевидно, эти системы связаны между собой соотношениями
$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{BD}(\mathcal{X}) & \subseteq & \mathcal{PD}(\mathcal{X}) & \subseteq & \mathcal{QD}(\mathcal{X}) \\
\mathsf{Vert} & & \cup\!| & & \cup\!| \\
\mathcal{BM}(\mathcal{X}) & \subseteq & \mathcal{PM}(\mathcal{X}) & \subseteq & \mathcal{QM}(\mathcal{X}) \\
\cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| \\
\mathcal{BU}(\mathcal{X}) & = & \mathcal{PU}(\mathcal{X}) & \subseteq & \mathcal{QU}(\mathcal{X})
\end{array}
\quad \text{и} \quad
\begin{array}{ccccc}
\mathcal{BS}(\mathcal{X}) & = & \mathcal{PS}(\mathcal{X}) & \subseteq & \mathcal{QS}(\mathcal{X}) \\
\cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| \\
\mathcal{BK}(\mathcal{X}) & = & \mathcal{PK}(\mathcal{X}) & = & \mathcal{QK}(\mathcal{X})
\end{array} \tag{0.14}$$
(равенство $\mathcal{BU} = \mathcal{PU}$ следует из 0.3, а $\mathcal{BD} = \mathcal{BM}$ – из 0.7)

Предложение 0.8. *Пусть $\mathcal{V}$ – какая-нибудь из систем множеств $\mathcal{BD}, \mathcal{PD}, \mathcal{BM}, \mathcal{PM}, \mathcal{QM}$. Тогда*

(i) $\forall D \in \mathcal{V} \quad \bigcup_{\lambda\in\mathbb{C}} \lambda D = X$;

(ii) $\forall D \in \mathcal{V} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \quad \lambda D \in \mathcal{V}$;

(iii) $\forall C, D \in \mathcal{V} \quad C \cap D \in \mathcal{V}$;

(iv) $\bigcap_{D\in\mathcal{V}} D = \{0\}$.

(c) Дуальные системы и поляры

Напомним, что если на паре векторных пространств (P, Q) определена невырожденная билинейная форма $<\cdot,\cdot>: P \times Q \to \mathbb{C}$, то такая пара называется *дуальной системой*. *Полярами* множеств $G \subseteq P$ и $H \subseteq Q$ называются множества

$$G^\circ = \{y \in Q : \forall x \in G \quad |<x, y>| \leqslant 1\} \qquad {}^\circ H = \{x \in P : \forall y \in H \quad |<x, y>| \leqslant 1\}$$

Лемма 0.9. *Пусть $<P, Q>$ – дуальная система векторных пространств над $\mathbb{C}$ и пусть заданы*

– *множество $G \subseteq P$, выпуклое, уравновешенное и Q-слабо замкнутое в P, и*

– *множество $H \subseteq Q$, выпуклое, уравновешенное и P-слабо КОМПАКТНОЕ в Q.*

Тогда

$$(G \cap {}^\circ H)^\circ \subseteq G^\circ + H$$

Доказательство. Из включения $G^\circ + H \supseteq G^\circ \cup H$ следует ${}^\circ(G^\circ + H) \subseteq {}^\circ(G^\circ \cup H) = {}^\circ(G^\circ) \cap {}^\circ H = G \cap {}^\circ H$. Множество G° P-слабо замкнуто, а H P-слабо компактно, поэтому $G^\circ + H$ P-слабо замкнуто. Отсюда $G^\circ + H = [{}^\circ(G^\circ + H)]^\circ \supseteq (G \cap {}^\circ H)^\circ$. □

(d) Три леммы о вполне ограниченных множествах

Для всякого линейного функционала $f : X \to \mathbb{C}$ на ЛВП X и произвольного множества $B \subseteq X$ обозначим

$$|f|_B = \sup_{x\in B} |f(x)| \tag{0.15}$$

Пусть X^+ – пространство всех линейных функционалов, а X' – пространство линейных непрерывных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$ на локально выпуклом пространстве X (не наделенное какой-либо топологией).

Лемма 0.10. *На всяком вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$ X'-слабая топология совпадает с индуцированной из X. Поэтому, в частности, $S \in \mathcal{S}(X)$ тогда и только тогда компактно в X, когда оно X'-слабо компактно.*

Доказательство. Рассмотрим пополнение $X^\blacktriangledown$ пространства X. Системы линейных непрерывных функционалов для X и $X^\blacktriangledown$ одинаковы. Замыкание $S^\blacktriangledown$ множества $S \in \mathcal{S}(X)$ в $X^\blacktriangledown$ будет компактом в $X^\blacktriangledown$, на котором функционалы $X' = (X^\blacktriangledown)'$ индуцируют хаусдорфову топологию, мажорируемую исходной. В силу известного свойства компактов [37] эта топология совпадает с исходной на $S^\blacktriangledown$, а значит и на $S \subseteq S^\blacktriangledown$. □

Лемма 0.11. *Пусть X – локально выпуклое пространство и $f : X \to \mathbb{C}$ – линейный функционал, непрерывный на некотором вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать непрерывный линейный функционал $g : X \to \mathbb{C}$ отличающийся от f на множестве S не более чем на ε:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in X' \quad |f - g|_S \leqslant \varepsilon$$

Доказательство. Функционал f непрерывен на S, поэтому существует окрестность нуля $V \in \mathcal{BU}(X)$ такая, что $|f|_{S\cap V} \leqslant \varepsilon$, то есть $f \in \varepsilon(S \cap V)^\circ_{X^+}$. В силу леммы 0.10, найдется X'-слабая окрестность нуля W в X такая, что $S \cap W \subseteq S \cap V$. При этом можно считать, что W выпукла, уравновешена и X'-слабо замкнута, то есть $W = {}^\circ K$ для некоторого конечномерного компакта $K \subseteq X' \subseteq X^+$:

$$f \in \varepsilon(S \cap V)^\circ_{X^+} \subseteq \varepsilon(S \cap W)^\circ_{X^+} \subseteq \varepsilon(S \cap {}^\circ K)^\circ_{X^+}$$

Воспользуемся теперь леммой 0.9 ($G = S \subseteq X = P, H = K \subseteq X^+ = Q$):

$$(S \cap {}^\circ K)^\circ_{X^+} \subseteq S^\circ_{X^+} + K$$

Значит $f \in \varepsilon S^\circ_{X^+} + \varepsilon K$. Таким образом, существует $g \in \varepsilon K \subseteq X'$ такой, что $f - g \in \varepsilon S^\circ_{X^+}$, и мы доказали (0.11). □

Лемма 0.12. *Пусть топология ЛВП Y является проективной относительно семейства линейных отображений $\pi_i : Y \to Y_i \quad (i \in I)$ в некоторую систему локально-выпуклых пространств $\{Y_i; i \in I\}$. Тогда множество $T \subseteq Y$ будет вполне ограничено в Y в том и только в том случае, если для всякого $i \in I$ образ $\pi_i(T)$ вполне ограничен в Y_i .*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна, а достаточность доказывается с помощью леммы 0.5: если $\pi_i(T)$ вполне ограничено в Y_i для любого $i \in I$, то для всякой окрестности нуля $V_i \subseteq Y_i$ прообраз $\pi_i^{-1}(V_i)$ будет емким по отношению к T множеством. Отсюда следует, что если зафиксировать окрестности нуля $V_{i_1} \subseteq Y_{i_1}, ..., V_{i_n} \subseteq Y_{i_n}$, то их общий прообраз $\bigcap_{k=1}^n \pi_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ будет емким по отношению к T множеством, и, поскольку все такие множества образуют локальную базу в Y, T должно быть вполне ограничено. $\square$

§ 1 Функторы $\vee, \wedge, \triangledown, \vartriangle, \blacktriangledown, \blacktriangle$

(a) Функтор пополнения $\blacktriangledown$ и плотные вложения

ЛВП X мы, как обычно, называем *полным*, если в нем всякая направленность Коши сходится. Как известно, всякое ЛВП обладает пополнением, то есть ближайшим к нему снаружи полным пространством. Пусть $X^\blacktriangledown$ обозначает *пополнение* пространства X [3], а $\blacktriangledown_X : X \to X^\blacktriangledown$ – соответствующее вложение $X \subseteq X^\blacktriangledown$, которое мы называем *отображением пополнения* (пространства X).

Теорема 1.1. *Конструкция пополнения $X \longmapsto (X^\blacktriangledown, \blacktriangledown_X)$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется следующими своими свойствами:*

(i) X полно, тогда и только тогда, когда $\blacktriangledown_X : X \to X^\blacktriangledown$ – изоморфизм;

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : X \to Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\blacktriangledown : X^\blacktriangledown \to Y^\blacktriangledown$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\blacktriangledown_X"'] \arrow[d, "\varphi"'] & X^\blacktriangledown \arrow[d, dashed, "\varphi^\blacktriangledown"] \\ Y \arrow[r, "\blacktriangledown_Y"'] & Y^\blacktriangledown \end{tikzcd}. \tag{1.1}$$

Это означает, что если имеется некая операция $X \longmapsto (X^{\widetilde{\blacktriangledown}}, \widetilde{\blacktriangledown}_X)$, которая каждому ЛВП X ставит в соответствие морфизм $\widetilde{\blacktriangledown}_X : X \to X^{\widetilde{\blacktriangledown}}$ в некоторое ЛВП $X^{\widetilde{\blacktriangledown}}$ так, что выполняются условиям $(i), (ii)$ теоремы 1.1, то найдется единственая система изоморфизмов $\alpha : X^\blacktriangledown \cong X^{\widetilde{\blacktriangledown}}$, замыкающая все диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\blacktriangledown_X"'] \arrow[dr, "\widetilde{\blacktriangledown}_X"] & \\ X^\blacktriangledown \arrow[rr, equal, "\alpha"] & & X^{\widetilde{\blacktriangledown}} \end{tikzcd}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Для доказательства нужно заметить, что если $\varphi : X \to Y$ – морфизм в полное ЛВП Y, то существует единственный морфизм $X^\blacktriangledown \to Y$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\blacktriangledown_X"'] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X^\blacktriangledown \arrow[dl, dashed] \\ & Y & \end{tikzcd}. \tag{1.3}$$

Теперь, если $\blacktriangledown$ и $\widetilde{\blacktriangledown}$ – две операции с одинаковыми свойствами $(i), (ii)$ из теоремы 1.1, то для всякого X возникают две коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} X^\blacktriangledown \arrow[rr, equal] \arrow[dr, dashed, "\alpha"'] & & X^\blacktriangledown \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\ & X^{\widetilde{\blacktriangledown}} & \\[-3em] & X \arrow[uul, "\blacktriangledown_X"] \arrow[uur, "\blacktriangledown_X"'] \arrow[u, "\widetilde{\blacktriangledown}_X"'] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & X^{\widetilde{\blacktriangledown}} \arrow[ddr, dashed, "\alpha"] & \\ & X \arrow[u, "\blacktriangledown_X"] \arrow[dl, "\widetilde{\blacktriangledown}_X"'] \arrow[dr, "\widetilde{\blacktriangledown}_X"] & \\ X^{\widetilde{\blacktriangledown}} \arrow[uur, dashed, "\beta"] \arrow[rr, equal] & & X^{\widetilde{\blacktriangledown}} \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

(в которых каждый внутренний треугольник с пунктирной стороной – это маленькая диаграмма (1.3)). В силу единственности пунктирных стрелок, морфизмы α и β слева – те же самые, что α и β справа. Поэтому равенства

$$\beta \circ \alpha = \mathbf{1}_{X^\blacktriangledown}, \quad \alpha \circ \beta = \mathbf{1}_{\widetilde{X}^\blacktriangledown},$$

означают, что α и β – изоморфизмы. $\square$

Из условия (ii) следует, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\blacktriangledown$ является ковариантным функтором категории $\mathfrak{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\blacktriangledown = \psi^\blacktriangledown \circ \varphi^\blacktriangledown$. Этот функтор мы называем *функтором пополнения.*

Определение. Условимся кроме того морфизм ЛВП $\sigma : X \to Y$ называть

– *вложением*, если σ инъективно и открыто (то есть $\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists V \in \mathcal{U}(Y) \quad U \supseteq V \cap \sigma(X)$),

– *плотным вложением*, если вдобавок образ $\sigma(X)$ плотен в Y.

Очевидным примером плотного вложения является отображение пополнения $\blacktriangledown_X : X \to X^\blacktriangledown$. Эта конструкция обладает естественным свойством универсальности в системе всех плотных вложений пространства X, потому что любое плотное вложение “лежит между X и $X^\blacktriangledown$”:

Теорема 1.2. *Морфизм ЛВП $\sigma : X \to Y$ тогда и только тогда является плотным вложением, когда он вписывается в (необходимо, единственную) коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\blacktriangledown_X"] \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[ddr, "\sigma"'] & & X^\blacktriangledown \\
& X^\sigma \arrow[ur, dashed, "\beta"] \arrow[d, equal] & \\
& Y \arrow[uur, dashed, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой

– *X^σ обозначает некоторое подпространство в пополнении $X^\blacktriangledown$ пространства X, содержащее X,*

– *морфизмы α и β изображают цепочку вложений $X \subseteq X^\sigma \subseteq X^\blacktriangledown$,*

– *$Y \cong X^\sigma$ – некоторый изоморфизм ЛВП.*

(b) Функтор насыщения $\blacktriangle$ и точные наложения

Пусть X – произвольное локально-выпук-лое пространство и τ обозначает его топологию. В силу предложения 0.8 и леммы 0.2, система $\mathcal{QM}(X)$ выпуклых уравновешенных массивных в нуле множеств в X является локальной базой некоторой отделимой локально-выпуклой топологии $\tau^\blacktriangle$ на X. Ясно, что $\tau^\blacktriangle$ мажорирует τ, то есть $\tau \subseteq \tau^\blacktriangle$. Обозначим через $X^\blacktriangle$ пространство X с этой новой топологией $\tau^\blacktriangle$ и условимся называть $X^\blacktriangle$ *насыщением* пространства X. Пусть кроме того $\blacktriangle_X : X^\blacktriangle \to X$ обозначает морфизм ЛВП, соответствующий переходу от топологии $\tau^\blacktriangle$ к более слабой топологии τ. Этот морфизм $\blacktriangle_X : X^\blacktriangle \to X$ мы называем *отображением насыщения* (пространства X).

Заметим, что *топология $\tau^\blacktriangle$ на X имеет ту же самую систему вполне ограниченных множеств, что и τ*

$$\mathcal{S}(X^\blacktriangle) = \mathcal{S}(X)$$

причем на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$ топологии $\tau^\blacktriangle$ и τ совпадают. Отсюда следуют второе и третье равенства в следующей цепочке (где первое равенство очевидно):

$$\mathcal{Q}(X^\blacktriangle) = \mathcal{Q}(X), \quad \mathcal{P}(X^\blacktriangle) = \mathcal{P}(X), \quad \mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{M}(X)$$

Это, в свою очередь, дает

$$\mathcal{QM}(X^\blacktriangle) = \mathcal{Q}(X^\blacktriangle) \cap \mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{Q}(X) \cap \mathcal{M}(X) = \mathcal{QM}(X) \tag{1.5}$$

$$\mathcal{PM}(X^\blacktriangle) = \mathcal{P}(X^\blacktriangle) \cap \mathcal{M}(X^\blacktriangle) = \mathcal{P}(X) \cap \mathcal{M}(X) = \mathcal{PM}(X) \tag{1.6}$$

Заметим также, что поскольку система множеств $\mathcal{QM}(X)$ удовлетворяет условиям леммы 0.2, для нее должно быть справедливо и утверждение (b) этой леммы, то есть

$$\mathcal{QM}(X) = \mathcal{QU}(X^\blacktriangle)$$

Вместе с (1.5) это дает цепочку равенств

$$\mathcal{QM}(X) = \mathcal{QM}(X^\blacktriangle) = \mathcal{QU}(X^\blacktriangle) \tag{1.7}$$

Покажем, что справедлива также цепочка

$$\mathcal{PM}(X) = \mathcal{PM}(X^\blacktriangle) = \mathcal{PU}(X^\blacktriangle) = \mathcal{BU}(X^\blacktriangle) \tag{1.8}$$

Здесь первое равенство есть (1.6), последнее $\mathcal{PU} = \mathcal{BU}$ упомянуто в (0.14) (и вытекает из следствия 0.3), и нам достаточно доказать лишь включение $\mathcal{PM}(X^\blacktriangle) \subseteq \mathcal{PU}(X^\blacktriangle)$ (потому что обратное включение очевидно). Действительно, $\mathcal{PM}(X^\blacktriangle) \subseteq \mathcal{QM}(X^\blacktriangle) = (1.7) = \mathcal{QU}(X^\blacktriangle)$. Значит $\mathcal{PM}(X^\blacktriangle) \subseteq \mathcal{PM}(X^\blacktriangle) \cap \mathcal{QU}(X^\blacktriangle) \subseteq \mathcal{PU}(X^\blacktriangle)$.

Определение. ЛВП X мы называем *насыщенным*, если выполняются следующие равносильные условия:

– отображение насыщения $\blacktriangle_X : X^\blacktriangle \to X$ является изоморфизмом;

– всякое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество M в X является окрестностью нуля (то есть справедливо включение $\mathcal{QM}(X) \subseteq \mathcal{QU}(X)$, из которого следует равенство $\mathcal{QM}(X) = \mathcal{QU}(X)$);

– всякое предкомпактно-замкнутое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество M в X является окрестностью нуля. (то есть справедливо включение $\mathcal{PM}(X) \subseteq \mathcal{PU}(X)$, из которого следуют равенства $\mathcal{PM}(X) = \mathcal{PU}(X) = \mathcal{BU}(X)$).

Эти условия эквивалентны, потому что, в силу (1.7) и (1.8), системы множеств $\mathcal{QM}(X)$ и $\mathcal{PM}(X)$ являются локальными базами топологии $\tau^\blacktriangle$. Поэтому изоморфизм $X \cong X^\blacktriangle$, то есть совпадение топологий τ и $\tau^\blacktriangle$, означал бы, что $\mathcal{QU}(X) = \mathcal{QU}(X^\blacktriangle) = (1.7) = \mathcal{QM}(X)$. Аналогично, $\mathcal{PU}(X) = \mathcal{PU}(X^\blacktriangle) = (1.7) = \mathcal{PM}(X)$.

Второе равенство в цепочке (1.7) означает сразу, что *для всякого локально-выпуклого пространства X его насыщение $X^\blacktriangle$ является насыщенным пространством.*

Следующая теорема "двойственна" теореме 1.1.

Теорема 1.3. *Конструкция насыщения $X \longmapsto (X^\blacktriangle, \blacktriangle_X)$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется следующими своими свойствами:*

(i) X насыщено, тогда и только тогда, когда $\blacktriangle_X : X^\blacktriangle \to X$ – изоморфизм;

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : Y \to X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\blacktriangle : Y^\blacktriangle \to X^\blacktriangle$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & X^\blacktriangle \arrow[l, "\blacktriangle_X"'] \\ Y \arrow[u, "\varphi"] & Y^\blacktriangle \arrow[l, "\blacktriangle_Y"] \arrow[u, dashed, "\varphi^\blacktriangle"'] \end{tikzcd}. \tag{1.9}$$

Это означает, что если имеется некая операция $X \longmapsto (X^{\widetilde{\blacktriangle}}, \widetilde{\blacktriangle}_X)$, которая каждому ЛВП X ставит в соответствие морфизм $\widetilde{\blacktriangle}_X : X^{\widetilde{\blacktriangle}} \to X$ из некоторого ЛВП $X^{\widetilde{\blacktriangle}}$ так, что выполняются условиям $(i), (ii)$ теоремы 1.3, то найдется единственая система изоморфизмов $\alpha : X^\blacktriangle \cong X^{\widetilde{\blacktriangle}}$, замыкающая все диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X^\blacktriangle \arrow[ur, "\blacktriangle_X"] \arrow[rr, equal, "\alpha"] & & X^{\widetilde{\blacktriangle}} \arrow[ul, "\widetilde{\blacktriangle}_X"'] \end{tikzcd} . \tag{1.10}$$

По аналогии с теоремой 1.1, здесь нужно заметить, что если $\varphi : Y \to X$ – морфизм из насыщенного ЛВП Y, то существует единственный морфизм ЛВП $\varphi : Y \to X^\blacktriangle$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & & X^\blacktriangle \arrow[ll, "\blacktriangle_X"'] \\ & Y \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} . \tag{1.11}$$

После этого строятся диаграммы в духе (1.6).

Понятно, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\blacktriangle$ есть ковариантный функтор категории $\mathfrak{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\blacktriangle = \psi^\blacktriangle \circ \varphi^\blacktriangle$. Мы называем его *функтором насыщения.*

Определение. Морфизм ЛВП $\pi : Y \to X$ мы называем

– *наложением*, если всякое вполне ограниченное множество $S \subseteq X$ содержится в образе $\pi(T)$ некоторого вполне ограниченного множества $T \subseteq Y$:

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists T \in \mathcal{S}(Y) \quad \pi(T) \supseteq S$$

– *точным наложением*, если вдобавок для всякого вполне ограниченного множества $T \subseteq Y$ ограничение $\pi|_T : T \to \pi(T)$ является гомеоморфизмом топологических пространств.

Заметим, что наложение всегда является сюръекцией, а точное наложение - биекцией. Поэтому *если пространства Y и X связаны точным наложением $\pi : Y \to X$ то Y можно рассматривать как новую, более тонкую топологизацию пространства X, сохраняющую вполне ограниченные множества и топологию на вполне ограниченных множествах.* Имея в виду свойства операции $\blacktriangle$, отмечавшиеся нами выше, мы можем сделать вывод, что *отображение насыщения $\blacktriangle_X : X^\blacktriangle \to X$ всякого ЛВП X является примером точного наложения.*

Более того, из определения топологии $X^\blacktriangle$ следует, что всякое вообще точное наложение естественно "вписывается" в отображение насыщения:

Теорема 1.4. *Морфизм ЛВП $\pi : Y \to X$ тогда и только тогда будет точным наложением, когда он вписывается в (необходимо единственную) коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
X & & X^\blacktriangle \arrow[ll, "\blacktriangle_X"'] \arrow[dl, dashed, "\beta"'] \arrow[ddl, dashed, "\chi"] \\
& X_\pi \arrow[ul, dashed, "\alpha"'] \arrow[d, equal] & \\
& Y \arrow[uul, "\pi"] &
\end{tikzcd},$$

в которой

– *X_π обозначает пространство X с новой топологией π, лежащей между топологиями X и $X^\blacktriangle$,*

– *морфизмы β и α изображают последовательное ослабление топологии от $X^\blacktriangle$ к X_π и от X_π к X,*

– *$Y \cong X_\pi$ – некоторый изоморфизм ЛВП.*

(c) Псевдополнота и псевдопополнение (функтор $\triangledown$)

ЛВП X мы называем *псевдополным*, если в нем всякая вполне ограниченная направленность Коши сходится. Это равносильно тому, что всякое замкнутое вполне ограниченное множество S в X является компактом. С обычной полнотой и квазиполнотой это условие связано импликациями

$$X \textbf{ является полным} \implies X \textbf{ является квазиполным} \implies X \textbf{ является псевдополным}$$

Поэтому всякое (полное и всякое) квазиполное пространство псевдополно. В метризуемом случае эти понятия эквивалентны.

Оказывается, что, как и в случае с полнотой, всякое ЛВП X обладает псевдопополнением, то есть ближайшим к нему "снаружи" псевдополным пространством. Формально эту конструкцию описывает следующая

Теорема 1.5. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\triangledown_X : X \to X^\triangledown$ в некоторое псевдополное ЛВП $X^\triangledown$ так, чтобы выполнялись условия*

(i) *X псевдополно, тогда и только тогда, когда $\triangledown_X : X \to X^\triangledown$ – изоморфизм;*

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : X \to Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\triangledown : X^\triangledown \to Y^\triangledown$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\triangledown_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & X^\triangledown \arrow[d, dashed, "\varphi^\triangledown"] \\ Y \arrow[r, "\triangledown_Y"] & Y^\triangledown \end{tikzcd}. \tag{1.12}$$

Как и в теоремах 1.1, 1.3, *условия* $(i), (ii)$ *здесь гарантируют единственность (с точностью до изоморфизма) операции* $X \longmapsto (X^\triangledown, \triangledown_X)$. Это следует из того, что для всякого морфизма $\varphi : X \to Y$ в псевдополное ЛВП Y то существует единственный морфизм $X^\triangledown \to Y$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\triangledown_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X^\triangledown \arrow[dl, dashed] \\ & Y & \end{tikzcd}. \tag{1.13}$$

Однозначность конструкции $\triangledown_X$ оправдывает следующее

Определение. Пространство $X^\triangledown$ называется *псевдопополнением*, а морфизм $\triangledown_X : X \to X^\triangledown$ -*отображением псевдопополнения* ЛВП X. Из (ii), кроме того, следует, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^\triangledown$ является ковариантным функтором категории $\mathfrak{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^\triangledown = \psi^\triangledown \circ \varphi^\triangledown$. Мы называем его *функтором псевдопополнения.*

Теорема 1.6. *Для всякого ЛВП X отображение псевдопополнения $\triangledown_X : X \to X^\triangledown$ является плотным вложением.*

Доказательство теорем 1.5 и 1.6 мы проведем в три этапа.

Функтор $\vee$. Каждому ЛВП X поставим в соответствие подпространство $X^\vee$ в пополнении $X^\blacktriangledown$, состоящее из пределов всевозможных вполне ограниченных направленностей Коши из X :

$$x \in X^\vee \quad \Longleftrightarrow \quad x \in X^\blacktriangledown \quad \& \quad \exists \{x_i\} \in \mathcal{S}(X) \quad x_i \xrightarrow{X^\blacktriangledown} x \quad (i \to \infty)$$

Пространство $X^\vee$ наделяется топологией, индуцированной из $X^\blacktriangledown$. Естественная инъекция X в $X^\vee$ обозначается $\vee_X : X \to X^\vee$.

Лемма 1.7. *Отображение $\vee_X : X \to X^\vee$ является плотным вложением, и*

(i) X псевдополно, тогда и только тогда, когда $\vee_X : X \to X^\vee$ – изоморфизм;

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : X \to Y$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\vee : X^\vee \to Y^\vee$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\vee_X"] \arrow[d, "\varphi"'] & X^\vee \arrow[d, dashed, "\varphi^\vee"] \\ Y \arrow[r, "\vee_Y"] & Y^\vee \end{tikzcd}. \tag{1.14}$$

Отсюда следует,что если $\varphi : X \to Y$ – морфизм в псевдополное ЛВП Y, то существует единственный морфизм $X^\vee \to Y$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\vee_X"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & X^\vee \arrow[dl, dashed] \\ & Y & \end{tikzcd}. \tag{1.15}$$

Инъективный ряд. *Инъективным рядом* локально-выпуклого пространства X мы называем трансфинитную последовательность локально-выпуклых пространств $\{X^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$, занумерованных порядковыми числами (то есть ординалами, являющимися множествами – см. [38]), с системой морфизмов ЛВП $\{\sigma_\iota^\varkappa : X^\iota \to X^\varkappa, \iota < \varkappa \in \mathbf{ORD}\}$, удовлетворяющей следующим условиям

(i) $X^0 = X$;

(ii) для любых трех ординалов $\iota < \varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^\iota \arrow[rr, "\sigma_\iota^\lambda"] \arrow[dr, "\sigma_\iota^\varkappa"'] & & X^\lambda \\ & X^\varkappa \arrow[ur, "\sigma_\varkappa^\lambda"'] & \end{tikzcd} ; \tag{1.16}$$

(iii) если λ – изолированный ординал, то есть существует ординал $\varkappa$ такой, что

$$\lambda = \varkappa + 1 = \min\{\omega \in \mathbf{ORD} : \varkappa < \omega\} \tag{1.17}$$

то существует изоморфизм $X^\lambda = X^{\varkappa+1} \cong (X^\varkappa)^\vee$ такой, что

$$\begin{tikzcd} X^\lambda \arrow[rr, equal] & & (X^\varkappa)^\vee \\ & X^\varkappa \arrow[ul, "\sigma_\varkappa^\lambda"] \arrow[ur, "\vee_{X^\varkappa}"'] & \end{tikzcd} ; \tag{1.18}$$

(iv) если λ – предельный ординал, то есть (1.17) не выполняется ни для какого $\varkappa$, то существует изоморфизм между X^λ и локально-выпуклым индуктивным пределом системы $\{X^\iota; \iota < \lambda, \iota \to \lambda\}$ такой, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^\lambda \arrow[rr, equal] & & \varinjlim_{\iota<\lambda} X^\iota \\ & X^\varkappa \arrow[ul, "\sigma_\varkappa^\lambda"] \arrow[ur, "\rho_\varkappa"'] & \end{tikzcd} , \tag{1.19}$$

в которой $\rho_\varkappa$ – естественная инъекция элемента $X^\varkappa$ индуктивной системы $\{X^\iota; \iota < \lambda\}$ в соответствующий индуктивный предел.

Трансфинитной индукцией доказывается

Лемма 1.8. *Всякое ЛВП X обладает инъективным рядом.*

Из леммы 1.8 и диаграмм (1.18) и (1.19) следует затем

Лемма 1.9. *Все морфизмы $\sigma_\iota^\varkappa : X^\iota \to X^\varkappa$ инъективного ряда произвольного данного ЛВП X являются плотными вложениями.*

Из нее в свою очередь вытекает

Лемма 1.10. *Инъективный ряд данного ЛВП X определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Это означает, что если $\{X^\omega, \sigma_\iota^\varkappa\}$ и $\{\widetilde{X}^\omega, \widetilde{\sigma}_\iota^\varkappa\}$ – два инъективных ряда для X, то существует система изоморфизмов $X^\omega = \widetilde{X}^\omega$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] & X^\omega \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\ X \arrow[r, equal] & \widetilde{X}^0 \arrow[r] & \widetilde{X}^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \widetilde{X}^\omega \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} . \tag{1.20}$$

Лемма 1.11. *Инъективный ряд $\{X^\omega, \sigma_\iota^\varkappa\}$ всякого ЛВП X стабилизируется: существует ординал μ такой, что*

$$\forall \omega > \mu \quad X^\omega = X^\mu \tag{1.21}$$

(то есть $\sigma_\mu^\omega : X^\mu \to X^\omega$ является изоморфизмом при $\omega > \mu$).

Доказательство. Из леммы 1.9 и теоремы 1.2 следует, что все пространства X^ω можно считать вложенными в пополнение $X^\blacktriangledown$ пространства X:

$$X = X^0 \subseteq X^1 \subseteq ... \subseteq X^\omega \subseteq ... \subseteq X^\blacktriangledown$$

Если предположить, что последовательность X^ω не стабилизируется, то есть

$$\forall \omega \in \mathbf{ORD} \quad \exists x^\omega \in X^{\omega+1} \setminus X^\omega$$

то класс элементов $\{x^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ должен иметь "неограниченную мощность", то есть не может быть множеством по Геделю-Бернайсу [38]. Но с другой стороны, все x^ω лежат в множестве $X^\blacktriangledown$ и значит класс $\{x^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ является множеством. Полученное противоречие означает, что

$$\exists \mu \in \mathbf{ORD} \quad X^{\mu+1} = X^\mu$$

а отсюда уже следует (1.21). □

Лемма 1.12. *Пусть* $\{X^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ *– инъективный ряд для ЛВП* X, $\{Y^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ *– инъективный ряд для ЛВП* Y. *Тогда для любого морфизма* $\varphi : X \to Y$ *найдется единственная последовательность морфизмов* $\{\varphi^\omega : X^\omega \to Y^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ *такая, что коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"'] & X^0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"] & X^1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"] & \cdots \arrow[r] & X^\omega \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^\omega"] & \cdots \\ Y \arrow[r, equal] & Y^0 \arrow[r] & Y^1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & Y^\omega \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \qquad (1.22)$$

Доказательство. Вначале полагаем $\varphi^0 = \varphi$. Затем, если для некоторого ординала λ все $\{\varphi^\varkappa; \varkappa < \lambda\}$ уже построены, то рассматриваются два случая:

– если λ – изолированный ординал, то есть выполняется (1.17), то, с помощью леммы 1.7, полагаем

$$\varphi^\lambda = \varphi^{\varkappa+1} = (\varphi^\varkappa)^\vee \qquad (1.23)$$

– если же λ – предельный ординал, то, считая X^ω и Y^ω реализованными как системы подпространств в пополнениях $X^\blacktriangledown$ и $Y^\blacktriangledown$, мы сможем переписать диаграмму (1.19) для X^ω и Y^ω в виде равенств

$$X^\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} X^\iota, \quad Y^\lambda = \bigcup_{\iota<\lambda} Y^\iota \qquad (1.24)$$

поэтому φ^λ будет однозначно определяться своими ограничениями $\varphi^\lambda|_{X^\iota} = \varphi^\iota : X^\iota \to Y^\iota (\iota < \lambda)$; причем непрерывность φ^λ будет следовать из определения индуктивного предела, а единственность – из леммы 1.9.

□

Конструкция $X^\triangledown$. Рассмотрим произвольное ЛВП X. Его инъективный ряд $\{X^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ по лемме 1.11 стабилизируется. Пусть μ – ординал, на котором происходит эта стабилизация. Положив

$$X^\triangledown = X^\mu, \quad \triangledown_X = \sigma_0^\mu$$

мы получим, что, во-первых, пространство $X^\triangledown$ псевдополно, потому что

$$(X^\triangledown)^\vee = (X^\mu)^\vee = X^{\mu+1} = X^\mu = X^\triangledown$$

Во-вторых, если X псевдополно, то, по лемме 1.7, $(\sigma_0^1 : X^0 \to X^1) = (\vee_X : X \to X^\vee)$ – изоморфизм, откуда по индукции следует, что в инъективном ряде $\{X^\omega, \sigma_\iota^\varkappa\}$ все морфизмы $\sigma_\iota^\varkappa$ являются изоморфизмами. В частности, $\vee_X = \sigma_0^\mu$ – тоже будет изоморфизмом. Наконец, в третьих, существование и единственность морфизма $\varphi^\triangledown$ в диаграмме (1.12) следует из леммы 1.12.

Таким образом, доказана теорема 1.5. Теорема 1.6 следует из леммы 1.9.

(d) Псевдонасыщенность и псевдонасыщение (функтор $\vartriangle$)

ЛВП X мы называем *псевдонасыщенным*, если в нем всякое замкнутое выпуклое уравновешенное емкое множество D является окрестностью нуля.

Пример 1.13. Всякое бочечное пространство псевдонасыщено, в силу леммы 0.6.

Пример 1.14. Всякое метризуемое (необязательно полное) ЛВП псевдонасыщено. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1.15. *Пусть X – метризуемое ЛВП. Для всякого вполне ограниченного множества в его пополнении $T \subseteq X^{\blacktriangledown}$ найдется вполне ограниченное множество $S \subseteq X$, плотное в T: $T \subseteq \overline{S}$.*

Замечательно, что существует стандартная конструкция, двойственная в определенном смысле конструкции псевдопополнения (см. ниже результаты §3), позволяющее каждому ЛВП X поставить в соответствие ближайшее к нему "изнутри" псевдонасыщенное ЛВП $X^{\vartriangle}$:

Теорема 1.16. *Каждому ЛВП X можно поставить в соответствие морфизм $\vartriangle_X\colon X^{\vartriangle} \to X$ из некоторого псевдонасыщенного ЛВП $X^{\vartriangle}$ так, чтобы выполнялись условия*

(i) X псевдонасыщено, тогда и только тогда, когда $\vartriangle_X\colon X^{\vartriangle} \to X$ – изоморфизм;

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : Y \to X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^{\vartriangle} : Y^{\vartriangle} \to X^{\vartriangle}$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & X^{\vartriangle} \arrow[l, "\vartriangle_X"'] \\ Y \arrow[u, "\varphi"] & Y^{\vartriangle} \arrow[l, "\vartriangle_Y"'] \arrow[u, dashed, "\varphi^{\vartriangle}"'] \end{tikzcd}. \tag{1.25}$$

Аналогично теоремам 1.1, 1.3 и 1.5, *условия $(i), (ii)$ здесь гарантируют единственность (с точностью до изоморфизма) операции $X \longmapsto (X^{\vartriangle}, \vartriangle_X)$*. Это следует из того, что для всякого морфизма $\varphi : Y \to X$ из псевдонасыщенного ЛВП Y то существует единственный морфизм $Y \to X^{\vartriangle}$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & & X^{\vartriangle} \arrow[ll, "\vartriangle_X"'] \\ & Y \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} . \tag{1.26}$$

Однозначность конструкции $\vartriangle_X$ оправдывает следующее

Определение. Пространство $X^{\vartriangle}$ называется *псевдонасыщением*, а морфизм $\vartriangle_X\colon X^{\vartriangle} \to X$ – *отображением псевдонасыщения* пространства X. Из (ii) следует, кроме того, что отображение $\varphi \mapsto \varphi^{\vartriangle}$ является ковариантным функтором категории $\mathfrak{LCS}$ в себя: $(\psi \circ \varphi)^{\vartriangle} = \psi^{\vartriangle} \circ \varphi^{\vartriangle}$. Мы называем его *функтором псевдонасыщения.*

Теорема 1.17. *Для всякого ЛВП X отображение псевдонасыщения $\vartriangle_X\colon X^{\vartriangle} \to X$ является точным наложением.*

Таким образом, $X^{\vartriangle}$ можно рассматривать как новую, более тонкую топологизацию X, при которой сохраняется система вполне ограниченных множеств

$$T \in \mathcal{S}(X^{\vartriangle}) \quad \iff \quad \vartriangle_X (T) \in \mathcal{S}(X)$$

причем топология на каждом вполне ограниченном множестве также не меняется.

Теоремы 1.16 и 1.17 доказываются по той же схеме, что и теоремы 1.5 и 1.6, и внешняя разница состоит лишь в обращении стрелок. Как и в § 1(c) доказательство проводится в три этапа.

Функтор $\wedge$. Для каждого ЛВП X обозначим через $X^{\wedge}$ новую топологизацию пространства X, в которой локальной базой служат всевозможные замкнутые выпуклые уравновешенные емкие множества из X:

$$U \in \mathcal{U}(X^{\wedge}) \quad \iff \quad \exists D \in \mathcal{BD}(X) \quad D \subseteq U$$

В силу предложения 0.8 и леммы 0.2, система $\mathcal{BD}(X)$ действительно является локальной базой некоторой локально-выпуклой топологии на X, поэтому наше определение корректно. Из леммы 0.2 (v) следует, что

$$\mathcal{BU}(X) \subseteq \mathcal{BD}(X) \subseteq \mathcal{BU}(X^\wedge) \tag{1.27}$$

поэтому топология $X^\wedge$ мажорирует топологию X. Получающееся таким образом отображение $X^\wedge$ в X обозначается $\wedge_X : X^\wedge \to X$.

Лемма 1.18. *Отображение $\wedge_X : X^\wedge \to X$ является точным наложением, причем*

(i) X псевдонасыщено, тогда и только тогда, когда $\wedge_X : X^\wedge \to X$ – изоморфизм;

(ii) для любого морфизма ЛВП $\varphi : Y \to X$ найдется единственный морфизм ЛВП $\varphi^\wedge : Y^\wedge \to X^\wedge$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & X^\wedge \arrow[l, "\wedge_X"'] \\ Y \arrow[u, "\varphi"] & Y^\wedge \arrow[l, "\wedge_Y"] \arrow[u, dashed, "\varphi^\wedge"'] \end{tikzcd}. \tag{1.28}$$

Здесь важно проверить, что топология действительно не меняется на вполне ограниченных множествах – это вытекает из теоремы 0.7.

Отсюда следует, что если $\varphi : Y \to X$ – морфизм из псевдонасыщенного ЛВП Y то существует единственный морфизм $Y \to X^\wedge$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & & X^\wedge \arrow[ll, "\wedge_X"'] \\ & Y \arrow[ul, "\varphi"] \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd} . \tag{1.29}$$

Проективный ряд. *Проективным рядом* локально-выпуклого пространства X мы называем трансфинитную последовательность локально-выпуклых пространств $\{X_\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$, занумерованных порядковыми числами (то есть ординалами, являющимися множествами – см. [38]), с системой морфизмов ЛВП $\{\pi^\iota_\varkappa : X^\varkappa \to X^\iota, \iota < \varkappa \in \mathbf{ORD}\}$, удовлетворяющей следующим условиям

(i) $X_0 = X$;

(ii) для любых трех ординалов $\iota < \varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\iota & & X_\lambda \arrow[ll, "\pi^\iota_\lambda"'] \arrow[dl, "\pi^\varkappa_\lambda"] \\ & X_\varkappa \arrow[ul, "\pi^\iota_\varkappa"] & \end{tikzcd} ; \tag{1.30}$$

(iii) если λ – изолированный ординал, то есть существует ординал $\varkappa$ со свойством (1.17) то существует изоморфизм $X_\lambda = X_{\varkappa+1} \cong (X_\varkappa)^\wedge$ такой, что

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\pi^\varkappa_\lambda"'] & & (X_\varkappa)^\wedge \arrow[dl, "\wedge_{X_\varkappa}"] \\ & X_\varkappa & \end{tikzcd} ; \tag{1.31}$$

(iv) если λ – предельный ординал, то есть (1.17) не выполняется ни для какого $\varkappa$, то существует изоморфизм между X_λ и локально-выпуклым проективным пределом системы $\{X_\iota; \iota < \lambda, \iota \to \lambda\}$ такой, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_\lambda \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\pi^\varkappa_\lambda"'] & & \varprojlim_{\iota<\lambda} X_\iota \arrow[dl, "\rho^\varkappa"] \\ & X_\varkappa & \end{tikzcd} , \tag{1.32}$$

в которой $\rho_\varkappa$ – естественная проекция проективного предела в элемент $X^\varkappa$ проективной системы $\{X^\iota; \iota < \lambda\}$.

Как и в § 1(c), последовательно доказываются пять лемм.

Лемма 1.19. *Всякое ЛВП X обладает проективным рядом.*

Лемма 1.20. *Все морфизмы $\pi^\iota_\varkappa : X_\iota \to X_\varkappa$ проективного ряда произвольного данного ЛВП X являются точными наложениями.*

Лемма 1.21. *Проективный ряд данного ЛВП X определяется однозначно с точностью до изоморфизма.*

Это означает, что если $\{X_\omega, \pi^\iota_\varkappa\}$ и $\{\widetilde{X}_\omega, \widetilde{\pi}^\iota_\varkappa\}$ – два проективных ряда для X, то существует система изоморфизмов $X_\omega = \widetilde{X}_\omega$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & X^0 \arrow[d, equal] & X^1 \arrow[l] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[l] & X^\omega \arrow[l] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[l] \\
X \arrow[r, equal] & \widetilde{X}^0 & \widetilde{X}^1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \widetilde{X}^\omega \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd} . \tag{1.33}$$

Лемма 1.22. *Проективный ряд $\{X_\omega, \pi^\iota_\varkappa\}$ всякого ЛВП X стабилизируется: существует ординал μ такой, что*

$$\forall \omega > \mu \quad X_\omega = X_\mu$$

(то есть $\pi^\mu_\omega : X_\omega \to X_\mu$ является изоморфизмом при $\omega > \mu$).

Доказательство. Из свойств функтора $\wedge$ следует, что проективный ряд можно представлять себе, как упорядоченную в сторону усиления систему топологизаций пространства X причем все эти топологии мажорируются топологией насыщения:

$$X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow ... \leftarrow X_\omega \leftarrow ... \leftarrow X^\blacktriangle$$

Поскольку различных топологизаций на X имеется не больше, чем некоторый кардинал $\mathfrak{m}$, который можно оценить, например, неравенством

$$\mathfrak{m} \leqslant 2^{2^{\operatorname{card}(X)}}$$

мы получаем, что по крайней мере начиная с номера $\mu = \mathfrak{m}$ все пространства X_ω совпадают. $\square$

Лемма 1.23. *Пусть $\{X_\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ – проективный ряд для ЛВП X, $\{Y_\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ – проективный ряд для ЛВП Y. Тогда для любого морфизма $\varphi : Y \to X$ найдется единственная последовательность морфизмов $\{\varphi_\omega : Y_\omega \to X_\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ такая, что коммутативна следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] & X^0 & X^1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & X^\omega \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
Y \arrow[r, equal] \arrow[u, "\varphi"] & Y^0 \arrow[u, "\varphi_0"'] & Y^1 \arrow[l] \arrow[u, "\varphi_1"'] & \cdots \arrow[l] & Y^\omega \arrow[l] \arrow[u, "\varphi_\omega"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd} . \tag{1.34}$$

Доказательство. Вначале полагаем $\varphi_0 = \varphi$. Затем, если для некоторого ординала λ все $\{\varphi_\varkappa; \varkappa < \lambda\}$ уже построены, то рассматриваются два случая:

– если λ – изолированный ординал, то есть выполняется (1.17), то, с помощью леммы 1.18, полагаем

$$\varphi_\lambda = \varphi_{\varkappa+1} = (\varphi_\varkappa)^\wedge$$

– если же λ – предельный ординал, то, диаграмма (1.32) будет означать, что для X_ω и Y_ω, реализованных как системы топологизаций на X и Y, X_λ и Y_λ будут в точности верхними гранями топологий $\{X_\varkappa; \varkappa < \lambda\}$ и $\{Y_\varkappa; \varkappa < \lambda\}$, поэтому непрерывность отображений $\{\varphi_\varkappa; \varkappa < \lambda\}$ влечет за собой непрерывность отображения φ_λ.

$\square$

Конструкция $X^\vartriangle$. Рассмотрим произвольное ЛВП X. Его проективный ряд $\{X_\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$ по лемме 1.22 стабилизируется. Пусть μ – ординал, на котором происходит эта стабилизация. Положив

$$X^\vartriangle = X_\mu, \quad \vartriangle_X = \pi^0_\mu$$

мы получим, что, во-первых, пространство $X^\vartriangle$ псевдонасыщено, потому что

$$(X^\vartriangle)^\wedge = (X_\mu)^\wedge = X_{\mu+1} = X_\mu = X^\vartriangle$$

Во-вторых, если X псевдонасыщено, то, по лемме 1.18, $(\pi^0_1 : X_1 \to X_0) = (\wedge_X : X^\wedge \to X)$ – изоморфизм, откуда следует, что в проективном ряде $\{X^\omega, \pi^\iota_\varkappa\}$ все морфизмы $\pi^\iota_\varkappa$ являются изоморфизмами. В частности, $\vartriangle_X = \pi^0_\mu$ – тоже будет изоморфизмом. Наконец, в третьих, существование и единственность морфизма $\varphi^\vartriangle$ в диаграмме (1.25) следует из леммы 1.23.

Таким образом, доказана теорема 1.16. Теорема 1.17 следует из леммы 1.23.

§ 2 Функтор сопряжения $\star$

Сопряженным пространством $X^\star$ к ЛВП X над $\mathbb{C}$ мы называем пространство линейных непрерывных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$, наделенное *топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в* X. Если $\varphi : X \to Y$ – морфизм ЛВП, то формула

$$\varphi^\star(g) = g \circ \varphi$$

определяет, как легко заметить, морфизм сопряженных пространств, $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$, который мы называем *сопряженным морфизмом.* Отображение $\varphi \mapsto \varphi^\star$ является контравариантным функтором в категории ЛВП, и мы называем его *функтором сопряжения.*

(a) Двойственность между вполне ограниченными и емкими множествами

Если $B \subseteq X$ и $F \subseteq X^\star$ – произвольные множества, то символами B° и ${}^\circ F$ обозначаются их (прямая и обратная) поляры (в $X^\star$ и X):

$$B^\circ = \{f \in X^\star : |f|_B := \sup_{x \in B} |f(x)| \leqslant 1\} \quad {}^\circ F = \{x \in X : |x|_F := \sup_{f \in F} |f(x)| \leqslant 1\}$$

Теорема 2.1. *Пусть X – произвольное ЛВП. Тогда*

(a) если $B \subseteq X$ вполне ограничено, то $B^\circ \subseteq X^\star$ – емкое;

(b) если $B \subseteq X$ – емкое, то $B^\circ \subseteq X^\star$ вполне ограничено;

(c) если $F \subseteq X^\star$ вполне ограничено, то ${}^\circ F \subseteq X$ – емкое;

(d) если $F \subseteq X^\star$ – емкое, то ${}^\circ F \subseteq X$ вполне ограничено;

Для доказательства нам понадобится несколько вспомогательных утверждений. По-прежнему, символом X' мы обозначаем векторное пространство линейных непрерывных функционалов на X (*без топологии*).

Лемма 2.2 (критерий полной ограниченности в сопряженном пространстве)**.** *Множество функционалов $F \subseteq X^\star$ вполне ограничено в $X^\star$ тогда и только тогда, когда F равностепенно непрерывно на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$.*

Доказательство. Каждому $S \in \mathcal{BS}(X)$ поставим в соответствие компакт $S^\blacktriangledown$, являющийся пополнением вполне ограниченного равномерного пространства S (см. [37],8.3.16). Пусть $\blacktriangledown_S : S \to S^\blacktriangledown$ – соответствующее вложение. Всякий функционал $f \in X^\star$ равномерно непрерывен на S, поэтому ограничение $f|_S$ можно (однозначно) продолжить до непрерывной функции $f^\blacktriangledown_S : S^\blacktriangledown \to \mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\blacktriangledown"] \arrow[dr, "f|_S"'] & & S^\blacktriangledown \arrow[dl, dashed, "f^\blacktriangledown_S"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd} .$$

Таким образом, возникает линейное отображение $\pi_S : f \mapsto f^\blacktriangledown_S$ пространства $X^\star$ в банахово пространство $\mathcal{C}(S^\blacktriangledown)$ непрерывных функций на компакте $S^\blacktriangledown$ (с топологией равномерной сходимости на $S^\blacktriangledown$).

Если заставить S меняться, пробегая $\mathcal{BS}(X)$, то топология $X^\star$ окажется проективной относительно системы линейных отображений $\pi_S : X^\star \to \mathcal{C}(S^\blacktriangledown)$ Значит, в силу леммы 0.12, множество $F \subseteq X^\star$ вполне ограничено в $X^\star$ тогда и только тогда, когда для всякого $S \in \mathcal{BS}(X)$ его образ $F_S^\blacktriangledown = \pi_S(F)$ вполне ограничен в $\mathcal{C}(S^\blacktriangledown)$ По теореме Асколи ([37, 8.2.10]), это эквивалентно условиям:

– $F_S^\blacktriangledown$ равностепенно непрерывно на $S^\blacktriangledown$ и

– $\forall x \in S^\blacktriangledown \quad F_S^\blacktriangledown(x)$ ограничено в $\mathbb{C}$.

Их можно сначала ослабить, заменив $S^\blacktriangledown$ на S,

– F равностепенно непрерывно на S и

– $\forall x \in S \quad F(x)$ ограничено в $\mathbb{C}$.

А затем второе условие вовсе можно отбросить, потому что если F равностепенно непрерывно на S, то $\forall x \in S \quad F$ равностепенно непрерывно на отрезке $[0, x]$ (именно для этого S выбиралось выпуклым и уравновешенным), а отсюда, в силу линейности функционалов $f \in F$ следует что $F(x)$ ограничено в $\mathbb{C}$. Мы доказали лемму 2.2, считая что $S \in \mathcal{BS}(X)$. Отсюда уже следует, что S может быть любым: $S \in \mathcal{S}(X)$. □

Лемма 2.3. *Поляра U° всякой окрестности нуля U в X является компактом в сопряженном пространстве $X^\star$.*

Доказательство. Из леммы 2.2 следует, что U° вполне ограничено в $X^\star$. С другой стороны, очевидно, что U° полно как равномерное пространство. Значит ([37, 8.3.16]) U° является компактом. □

Доказательство. Теперь мы можем доказать теорему 2.1.

1. Если $B \in \mathcal{S}(X)$, то, по определению топологии $X^\star$, $B^\circ \in \mathcal{U}(X^\star) \subseteq \mathcal{D}(X^\star)$.

2. Пусть $B \in \mathcal{D}(X)$. Поскольку поляры B и его замкнутой выпуклой уравновешенной оболочки совпадают, мы можем считать, что $B \in \mathcal{BD}(X)$. Тогда, по теореме 0.7, B будет массивно в нуле

$$\forall S \in \mathcal{BS}(X) \quad \exists U \in \mathcal{BU}(X) \quad U \cap S \subseteq B$$

Переходя к поляре и используя леммы 2.3 и 0.9 ($G = S \subseteq X = P, \quad H = U^\circ \subseteq X' = Q$), получаем

$$\forall S \in \mathcal{BS}(X) \quad \exists U \in \mathcal{BU}(X) \quad B^\circ \subseteq (U \cap S)^\circ \subseteq U^\circ + S^\circ$$

Здесь S° – базисная окрестность нуля в $X^\star$, а U° – компакт в $X^\star$ (по лемме 2.3). Значит

$$\forall V \in \mathcal{BU}(X^\star) \quad \exists K \in \mathcal{BK}(X^\star) \quad B^\circ \subseteq K + V$$

Это равносильно условию $B^\circ \in \mathcal{S}(X^\star)$, в силу предложения 0.4.

3. Пусть $F \in \mathcal{S}(X^\star)$. Тогда по лемме 2.2, F равностепенно непрерывно на каждом $S \in \mathcal{S}(X)$. Отсюда

$$\forall S \in \mathcal{BS}(X) \quad \exists U \in \mathcal{BU}(X) \quad U \cap S \subseteq {}^\circ F$$

то есть ${}^\circ F$ массивно в нуле и значит является емким в X.

4. Пусть $F \in \mathcal{D}(X^\star)$. Поскольку обратные поляры F и его замкнутой выпуклой уравновешенной оболочки совпадают, можно считать, что $F \in \mathcal{BD}(X^\star)$. Зафиксируем окрестность нуля $U \in \mathcal{BU}(X)$ и рассмотрим поляру $T = U^\circ \in \mathcal{B}(X^\star)$. По лемме 2.3, $T \in \mathcal{BK}(X^\star)$. Значит, по теореме 0.7,

$$\exists V \in \mathcal{BU}(X^\star) \quad V \cap T \subseteq F$$

Заметим теперь, что на компакте $T = U^\circ \subseteq X^\star$ X-слабая топология хаусдорфова и мажорируется $X^\star$-топологией. Значит ([37], 3.1.14), эти топологии на T совпадают. Поэтому должен существовать *конечномерный* компакт $K \in \mathcal{BK}(X)$ такой, что

$$K^\circ \cap T \subseteq V \cap T \subseteq F$$

Воспользуемся теперь леммой 0.9 ($G = T \subseteq X^\star = P, H = K \subseteq X = Q$):

$${}^\circ F \subseteq {}^\circ(K^\circ \cap T) \subseteq {}^\circ(K^\circ) + {}^\circ T \subseteq K + {}^\circ T \subseteq K + U$$

Мы получили, что

$$\forall U \in \mathcal{BU}(X) \quad \exists K \in \mathcal{BK}(X) \quad {}^\circ F \subseteq K + U$$

По предложению 0.4, это означает, что ${}^\circ F \in \mathcal{BS}(X)$. Теорема 2.1 доказана. □

(b) Кополнота и связь между насыщенностью и псевдонасыщенностью

ЛВП X условимся называть *кополным*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(i) сопряженное к X пространство $X^\star$ полно;

(ii) всякий линейный функционал $f : X \to \mathbb{C}$, непрерывный на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, непрерывен на всем X, то есть справедливо равенство (множеств):

$$X^\natural = X^\star \tag{2.1}$$

где $X^\natural$ обозначает пространство всех линейных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$, непрерывных на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$.

Доказательство. Если наделить $X^\natural$ топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах $S \subseteq X$, мы получим вложение локально-выпуклых пространств

$$X^\star \subseteq X^\natural$$

причем $X^\natural$ будет полным пространством, а $X^\star$ будет плотно в $X^\natural$ (по лемме 0.11). Поэтому полнота $X^\star$ будет эквивалентна равенству (2.1). □

Теорема 2.4 (о связи между насыщенностью и псевдонасыщенностью)**.** *ЛВП X насыщено тогда и только тогда, когда оно псевдонасыщено и кополно.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность. Пусть X псевдонасыщено и кополно. Рассмотрим насыщение $X^\blacktriangle$ пространства X. Из кополноты X следует, что сопряженные пространства у X и $X^\blacktriangle$ совпадают (как множества):

$$X^\star = (X^\blacktriangle)^\star \tag{2.2}$$

Пусть M – предкомпактно-замкнутое выпуклое уравновешенное массивное в нуле множество в X, то есть $M \in \mathcal{PM}(X)$. Тогда в силу (1.6), $M \in \mathcal{BU}(X^\blacktriangle)$ а отсюда в силу (2.2), $M \in \mathcal{B}(X)$. Значит $M \in \mathcal{BM}(X) = \mathcal{BU}(X)$. Таким образом, $\mathcal{PM}(X) \subseteq \mathcal{BU}(X)$, то есть X насыщено. □

(c) Равностепенная непрерывность функционалов и операторов

Теорема 2.5 (критерий псевдонасыщенности)**.** *Для ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) X псевдонасыщено,

(ii) всякое множество линейных непрерывных функционалов $F \subseteq X'$, равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, равностепенно непрерывно на всем X.

(iii) для любого ЛВП Y всякое множество Φ линейных непрерывных отображений $\varphi : X \to Y$, равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, равностепенно непрерывно на всем X.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (iii)$ Пусть X псевдонасыщено, Y – произвольное ЛВП и Φ – множество линейных непрерывных отображений $\varphi : X \to Y$, равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$. Возьмем замкнутую выпуклую уравновешенную окрестность нуля $V \subseteq Y$ Тогда $\Phi^{-1}(V) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} \varphi^{-1}(V)$ должно быть замкнутым выпуклым уравновешенным массивным в нуле (и, следовательно, емким) множеством в X. Значит $\Phi^{-1}(V)$ – окрестность нуля в X. Поскольку это верно для любой замкнутой выпуклой уравновешенной окрестности нуля $V \subseteq Y$, мы получаем, что Φ равностепенно непрерывно на всем X.

Импликация $(iii) \Rightarrow (ii)$ очевидна.

Докажем $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $D \in \mathcal{BD}(X)$. Поляра $F = D^\circ$ будет по теореме 2.1 (b) и лемме 2.2 множеством функционалов из X', равностепенно непрерывным на каждом $S \in \mathcal{S}(X)$. Если это равносильно равностепенной непрерывности F на всем X, то обратная поляра $D = {}^\circ F$ будет окрестностью нуля в X. □

Теорема 2.6 (критерий насыщенности)**.** *Для ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) X насыщено,

(ii) *всякое множество F линейных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$ (не предполагаемых заранее непрерывными), равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, равностепенно непрерывно на всем X.*

(iii) *для любого ЛВП Y всякое множество Φ линейных отображений $\varphi : X \to Y$ (не предполагаемых заранее непрерывными), равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, равностепенно непрерывно на всем X.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (iii)$ Пусть X насыщено, Y – произвольное ЛВП и $\varPhi$ – множество линейных отображений $\varphi : X \to Y$, равностепенно непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$. Возьмем выпуклую уравновешенную окрестность нуля $V \subseteq Y$ Тогда $\varPhi^{-1}(V) = \bigcap_{\varphi\in\varPhi} \varphi^{-1}(V)$ должно быть выпуклым уравновешенным массивным в нуле множеством в X. Значит $\varPhi^{-1}(V)$ – окрестность нуля в X. Поскольку это верно для любой выпуклой уравновешенной окрестности нуля $V \subseteq Y$, мы получаем, что $\varPhi$ равностепенно непрерывно на всем X.

Импликация $(iii) \Rightarrow (ii)$ очевидна.

Докажем $(ii) \Rightarrow (i)$. Если выполняется (ii), то

1) автоматически выполняется условие (ii) теоремы 2.5, поэтому X будет псевдонасыщено, и

2) всякий линейный функционал $f : X \to \mathbb{C}$ непрерывный на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$ будет автоматически непрерывен на всем X, поэтому X должно быть кополно.

Таким образом, X будет псевдонасыщено и кополно, то есть, по теореме 2.4, насыщено. $\square$

Следствие 2.7. *Если X – насыщенное ЛВП, то для всякого ЛВП Y любое линейное отображение $\varphi : X \to Y$, непрерывное на каждом вполне ограниченном множестве $S \subseteq X$, непрерывно на всем X.*

(d) Отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$

Вторым сопряженным пространством $X^{\star\star}$ к ЛВП X мы называем сопряженное к первому сопряженному:

$$X^{\star\star} = (X^\star)^\star$$

(каждая звездочка $\star$ означает, что берется топология равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах). Формула

$$i_X(x)(f) = f(x)$$

определяет естественное отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$.

Теорема 2.8. *Для всякого ЛВП X отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ инъективно, открыто и имеет плотный в $X^{\star\star}$ образ.*

Замечание 2.9. Это отображение не обязано быть непрерывным. Его открытость означает, что

$$\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists V \in \mathcal{U}(X^{\star\star}) \quad i_X(U) \supseteq V \cap i_X(X)$$

Для доказательства 2.8 заметим, что отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ переводит всякое множество $B \subseteq X$ в его вторую поляру $B^{\circ\circ} = \{y \in X^{\star\star} : \forall f \in B^\circ \quad |y(f)| \leqslant 1\}$. Поэтому определено отображение

$$i_B : B \to B^{\circ\circ}$$

Лемма 2.10. *Пусть $S \in \mathcal{BS}(X)$, тогда вторая поляра $S^{\circ\circ}$ является компактом в $X^{\star\star}$, а отображение $i_S : S \to S^{\circ\circ}$ является вложением топологических пространств с плотным образом.*

Доказательство. Действительно, первая поляра S° будет окрестностью нуля в $X^\star$ в силу выбора топологии $X^\star$, а вторая $S^{\circ\circ}$ поэтому будет компактом в $X^{\star\star}$ по лемме 2.3. По лемме 0.10, топология S совпадает с X'-слабой. С другой стороны, топология $S^{\circ\circ}$ также совпадает с X' -слабой, потому что X' -слабая топология является хаусдорфовой топологией на компакте $S^{\circ\circ}$, мажорируемой исходной топологией этого компакта (см. [37]). Значит, $i_S : S \to S^{\circ\circ}$ является вложением. С другой стороны, по теореме о биполяре [3], $i(S)$ плотно в $S^{\circ\circ}$ в смысле X'-слабой топологии, поэтому $i(S)$ плотно в $S^{\circ\circ}$ в смысле топологии пространства $X^{\star\star}$. $\square$

Лемма 2.11. *Для всякого ЛВП X справедливо равенство (множеств)*

$$X^{\star\star} = \bigcup_{S\in\mathcal{BS}(X)} S^{\circ\circ}$$

Доказательство. Возьмем $z \in X^{\star\star}$. Поскольку функционал $z : X^\star \to \mathbb{C}$ непрерывен, он должен быть ограничен на некоторой базисной окрестности нуля $V = S^\circ, S \in \mathcal{S}(X)$ Пошевелив, в случае необходимости, $S \in \mathcal{S}(X)$, можно в качестве ограничивающей константы взять единицу. Таким образом, $|z|_V \leqslant 1$, то есть $z \in V^\circ = S^{\circ\circ}$. □

Из лемм 2.10 и 2.11 следует

Лемма 2.12. *Для всякого ЛВП X любой вектор $z \in X^{\star\star}$ является пределом в $X^{\star\star}$ некоторой направленности из $i_X(X)$,*

$$z = \lim_{\nu\to\infty} i_X(x_\nu)$$

такой, что $\{x_\nu\}$ вполне ограничено в X, а $\{i_X(x_\nu)\}$ вполне ограничено в $X^{\star\star}$.

Доказательство. Докажем теперь теорему 2.8. Инъективность i_X очевидна. Плотность $i_X(X)$ в $X^{\star\star}$ следует из леммы 2.12. Проверим открытость. Пусть $U \in \mathcal{BU}(X)$ Тогда по лемме 2.3, $U^\circ \in \mathcal{BK}(X^\star) \subseteq \mathcal{BS}(X^\star)$ и значит, $U^{\circ\circ} \in \mathcal{BU}(X^{\star\star})$ Таким образом, $i_X(U) = U^{\circ\circ} \cap i_X(X)$ будет окрестностью нуля в пространстве $i_X(X) \subseteq X^{\star\star}$ □

(e) Двойственность между (псевдо)полнотой и (псевдо)насыщенностью

Итак, отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ всегда инъективно, открыто и имеет всюду плотный образ. Естественный вопрос о сюръективности и непрерывности этого отображения, как оказывается, напрямую связан с псевдополнотой и псевдонасыщенностью X.

Теорема 2.13. *Для произвольного ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) пространство X псевдополно;

(ii) отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ сюръективно (и значит, биективно).

Доказательство. По теореме Макки [3], $i_X : X \to X^{\star\star}$ биективно тогда и только тогда, когда существует локальная база в $X^\star$, состоящая из поляр T° $X^\star$-слабо компактных множеств $T \subseteq X$. Это означает, что для всякого $S \in \mathcal{BS}(X)$ должно существовать $X^\star$-слабо компактное $T \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $T^\circ \supseteq S^\circ$ то есть $S \subseteq T$. Иными словами, всякое $S \in \mathcal{BS}(X)$ должно быть $X^\star$-слабо компактным, и значит (лемма 0.10) просто компактным. □

Следствие 2.14. *Если пространство X псевдополно, то определено (непрерывное и биективное) отображение $i_X^{-1} : X^{\star\star} \to X$ являющееся точным наложением.*

Доказательство. Действительно, из открытости (теорема 2.8) и биективности отображения $i_X : X \to X^{\star\star}$ следует существование и непрерывность обратного отображения $i_X^{-1} : X^{\star\star} \to X$ При этом, если $S \in \mathcal{BS}(X)$ то, по лемме 2.10, $i_X(S) = S^{\circ\circ} \cap i_X(X) = S^{\circ\circ} \cap X^{\star\star} = S^{\circ\circ} \in \mathcal{BS}(X^{\star\star})$, то есть существует $T = i_X(S) \in \mathcal{BS}(X^{\star\star})$ такое, что $i_X^{-1}(T) = S$. Отображение $i_X^{-1}|_T : T \to S$ будет гомеоморфизмом, потому что S – отделимо (как топологическое пространство), а T является компактом в $X^{\star\star}$ (как поляра окрестности нуля $S^\circ \subseteq X^\star$). □

Теорема 2.15. *Для произвольного ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) пространство X псевдонасыщено;

(ii) отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ непрерывно (и значит, является вложением).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть X псевдонасыщено и V – базисная окрестность нуля в $X^{\star\star}$, то есть $V = F^\circ$, где $F \in \mathcal{BS}(X^\star)$ По теореме 2.1(d), множество ${}^\circ F = i^{-1}(F^\circ) = i^{-1}(V)$ должно быть емким, то есть окрестностью нуля в X. $(ii) \Rightarrow (i)$. Возьмем $D \in \mathcal{BD}(X)$ По теореме 2.1(b), поляра D° вполне ограничена в $X^\star$ поэтому вторая поляра $D^{\circ\circ}$ есть окрестность нуля в $X^{\star\star}$. Если $i_X : X \to X^{\star\star}$ непрерывно, то $D = i^{-1}(D^{\circ\circ})$ будет окрестностью нуля в X. □

Следствие 2.16. *Если пространство X псевдонасыщено, то отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ является плотным вложением.*

Следующий результат устанавливает обещанную в §1 двойственность между псевдополными и псевдонасыщенными пространствами.

Теорема 2.17. *Пусть X – произвольное ЛВП. Тогда*

– *если X псевдополно, то $X^\star$ псевдонасыщено;*

– *если X псевдонасыщено, то $X^\star$ псевдополно.*

Доказательство. Доказательство использует следующую очевидную формулу:

$$\forall f \in X^\star \quad i_{X^\star}(f) \circ i_X = f \tag{2.3}$$

1. Пусть X псевдополно, то есть (теорема 2.13) $i_X : X \to X^{\star\star}$ является биекцией. Тогда определено обратное отображение $i_X^{-1} : X^{\star\star} \to X$ непрерывное в силу следствия 2.14. Поэтому из формулы $i_{X^\star}(f) = f \circ i_X^{-1}$ следует, что $i_{X^\star}$ есть непрерывное отображение, то есть (теорема 2.15) $X^\star$ псевдонасыщено.

2. Пусть X псевдонасыщено, то есть $i_X : X \to X^{\star\star}$ непрерывно (теорема 2.15). Тогда, выбрав $g \in X^{\star\star\star}$ и положив $f = g \circ i_X$ мы получим, что $f \in X^\star$, причем

$$i_{X^\star}(f) \circ i_X = f = g \circ i_X$$

то есть, функционалы $i_{X^\star}(f)$ и g совпадают на подпространстве $i_X(X)$, плотном в $X^{\star\star}$, в силу теоремы 2.8. Следовательно, они совпадают на всем $X^{\star\star}$. Мы получили, что отображение $i_{X^\star} : X^\star \to X^{\star\star\star}$ сюръективно, то есть (теорема 2.13), $X^\star$ псевдополно. □

Теорема 2.18. *Пусть X – произвольное ЛВП. Тогда*

– *если X полно, то $X^\star$ насыщено;*

– *если X насыщено, то $X^\star$ полно.*

Доказательство. Второе утверждение здесь следует сразу же из теоремы 2.4: если X насыщено, то оно кополно, то есть $X^\star$ полно. Докажем первое. Пусть X полно. Тогда оно псевдополно и, по теореме 2.17, $X^\star$ должно быть псевдонасыщено. Поэтому для доказательства насыщенности $X^\star$ нам, по теореме 2.4, нужно лишь убедиться, что $X^\star$ кополно.

Пусть $f : X^\star \to \mathbb{C}$ – линейный функционал, непрерывный на каждом вполне ограниченном множестве $T \subseteq X^\star$ (то есть $f \in (X^\star)^\natural$). По лемме 0.11, существует направленность непрерывных функционалов $\{g_\nu\} \subset (X^\star)^\star$, сходящаяся к f равномерно на каждом $T \in \mathcal{S}(X^\star)$:

$$\forall T \in \mathcal{S}(X^\star) \qquad g_\nu(y) \underset{\nu\to\infty, y\in T}{\rightrightarrows} f(y)$$

Поскольку топология в $(X^\star)^\star$ есть топология равномерной сходимости на множествах $T \in \mathcal{S}(X^\star)$, направленность $\{g_\nu\} \subset (X^\star)^\star$ должна быть направленностью Коши в $(X^\star)^\star$. Рассмотрим отображение $i_X^{-1} : X^{\star\star} \to X$, корректно определенное, непрерывное и биективное, в силу следствия 2.14 (поскольку X в нашем случае псевдополно). Направленность Коши $\{g_\nu\} \subset (X^\star)^\star$ переводится этим отображением (в силу его линейности и непрерывности) в некоторую направленность Коши $\{x_\nu\} \subset X$:

$$x_\nu = i_X^{-1}(g_\nu)$$

Поскольку X полно, $\{x_\nu\}$ должна иметь предел в X:

$$x = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu \in X$$

Теперь для всякого $y \in X^\star$ мы получаем

$$f(y) = \lim_{\nu\to\infty} g_\nu(y) = \lim_{\nu\to\infty} i_X(x_\nu)(y) = \lim_{\nu\to\infty} y(x_\nu) = y(\lim_{\nu\to\infty} x_\nu) = y(x) = i_X(x)(y)$$

То есть f совпадает с (линейным и непрерывным) функционалом $i_X(x) \in (X^\star)^\star$. Мы доказали равенство $(X^\star)^\natural = (X^\star)^\star$, означающее в нашем случае, что $X^\star$ является насыщенным. □

(f) Лемма об аннуляторе

Аннулятором подпространства E в ЛВП X мы, как обычно, называем множество функционалов $f \in X^\star$ аннулирующихся на E:

$$E^\perp = \{f \in X^\star : f|_E = 0\} \tag{2.4}$$

Лемма 2.19. *Если E – замкнутое подпространство в локально выпуклом пространстве X, то справедлив изоморфизм локально выпуклых пространств*

$$E^\star \cong X^\star / E^\perp \tag{2.5}$$

Доказательство. Каждому функционалу $g \in E^\star$ поставим в соответствие множество $\widetilde{g} \subseteq X^\star$ всевозможных его линейных непрерывных продолжений на X;

$$\widetilde{g} = \{f \in X^\star : f|_E = g\}$$

Ясно, что $\widetilde{g}$ является классом эквивалентности относительно $E^\perp$, то есть $\widetilde{g} \in X^\star/E^\perp$, причем отображение

$$g \in E^\star \mapsto \widetilde{g} \in X^\star/E^\perp$$

биективно. Докажем его непрерывность в обе стороны.

1) Пусть $V \in \mathcal{BU}(X^\star/E^\perp)$, тогда $V = \pi(U)$, где $\pi : X^\star \to X^\star/E^\perp$ – фактор-отображение, а $U \in \mathcal{BU}(X^\star)$, $U + E^\perp = U$. Поскольку X – стереотипное, $U = K^\circ{}_{X^\star}$ где $K \in \mathcal{BK}(X)$. Условие $K^\circ + E^\perp = K^\circ$ означает, что $K \subseteq E$. Поэтому окрестность нуля $W = K^\circ{}_{E^\star} \in \mathcal{BU}(E^\star)$ будет прообразом V при отображении $g \in E^\star \mapsto \widetilde{g} \in X^\star/E^\perp$.

2) Наоборот, если имеется базисная окрестность нуля $W = K^\circ_{E^\star} \in \mathcal{BU}(E^\star), K \in \mathcal{BK}(E)$, то можно рассмотреть $U = K^\circ_{X^\star} \in \mathcal{BU}(X^\star)$ и положить $V = \pi(U)$, и мы получим $\widetilde{W} = V$. □

§ 3 Двойственность между функторами $\triangledown$ и $\vartriangle$

(a) Двойственность между плотными вложениями и точными наложениями

В этом пункте мы доказываем следующие две теоремы.

Теорема 3.1. *Если X псевдополно и $\varphi : X \to Y$ – точное наложение, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – плотное вложение.*

Теорема 3.2. *Если X псевдонасыщено и $\varphi : X \to Y$ – плотное вложение, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – точное наложение.*

Их доказательству мы предпошлем несколько лемм.

Лемма 3.3. *Пусть $\varphi : X \to Y$ – морфизм ЛВП. Тогда*

$$\forall A \subseteq X \quad \{\varphi(A)\}^\circ_{Y^\star} = (\varphi^\star)^{-1}(A^\circ_{X^\star}) \tag{3.1}$$

а если X псевдополно, то

$$\forall B \subseteq Y \quad \{\varphi^{-1}(B)\}^\circ_{X^\star} = \overline{\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})} \tag{3.2}$$

Доказательство. Если $A \subseteq X$, то $[\varphi(A)]^\circ_{Y^\star} = \{g \in Y^\star : |g|_{\varphi(A)} \leqslant 1\} = \{g \in Y^\star : |\varphi^\star(g)|_A = |g \circ \varphi|_A \leqslant 1\} = \{g \in Y^\star : \varphi^\star(g) \in A^\circ_{X^\star}\} = (\varphi^\star)^{-1}(A^\circ_{X^\star})$. Пусть теперь X псевдополно и $B \subseteq Y$. Тогда, по теореме 2.13,

$$[\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})]^\circ_{X^{\star\star}} = [\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})]^\circ_X = \{x \in X : \forall f \in \varphi^\star(B^\circ_{Y^\star}) \quad |f(x)| \leqslant 1\} = \{x \in X : \forall g \in B^\circ_{Y^\star} \quad |\varphi^\star(g)(x)| =$$

$$= |g(\varphi(x))| \leqslant 1\} = \{x \in X : \varphi(x) \in (B^\circ_{Y^\star})^\circ_Y\} = \varphi^{-1}[(B^\circ_{Y^\star})^\circ_Y] = \varphi^{-1}[\overline{\operatorname{absconv}}_Y B] = \overline{\operatorname{absconv}}_X[\varphi^{-1}(B)]$$

где $\overline{\operatorname{absconv}}$ – замкнутая выпуклая уравновешеная оболочка. Поскольку $B^\circ_{Y^\star}$, а значит, и $\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})$ выпукло и уравновешено, имеем

$$\overline{\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})} = \overline{\operatorname{absconv}}_{X^\star} \varphi^\star(B^\circ_{Y^\star}) = \{[\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})]^\circ_{X^{\star\star}}\}^\circ_{X^\star} = \{\overline{\operatorname{absconv}}_X[\varphi^{-1}(B)]\}^\circ_{X^\star} = \{\varphi^{-1}(B)\}^\circ_{X^\star}$$

Лемма 3.3 доказана. □

Из нее следует

Лемма 3.4. *Если X псевдополно и $\varphi : X \to Y$ – мономорфизм, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – эпиморфизм.*

Доказательство. Действительно, положив $B = \{0\} \subseteq Y$, мы получим $X^\star = \{0\}^\circ_{X^\star} = \{\varphi^{-1}(B)\}^\circ_{X^\star} = \overline{\varphi^\star(B^\circ_{Y^\star})} = \overline{\varphi^\star(Y^\star)}$ □

Лемма 3.5. *Если X псевдонасыщено и $\varphi : X \to Y$ – вложение, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – наложение.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{S}(X^\star)$. В силу леммы 2.2 и теоремы 2.5, F равностепенно непрерывно на X, то есть все функционалы $f \in F$ подчинены одной полунорме p, непрерывной на X:

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad x \in X, f \in F$$

Поскольку $\varphi : X \to Y$ – вложение, полунорма p продолжается до некоторой полунормы q, непрерывной на Y: $q \circ \varphi = p$. С помощью теоремы Хана-Банаха для всякого $f \in F$ выберем продолжение $f_Y \in Y^\star$, подчиненное q:

$$f_Y \circ \varphi = f \quad \& \quad \forall y \in Y \quad |f_Y(y)| \leqslant q(y)$$

Множество функционалов $F_Y = \{f_Y; f \in F\}$ подчинено непрерывной полунорме q на Y, то есть равностепенно непрерывно на Y. Значит (лемма 2.2) $F_Y \in \mathcal{S}(Y^\star)$. При этом

$$\varphi^\star(F_Y) = F_Y \circ \varphi = F$$

Лемма 3.5 доказана. □

Следующие леммы очевидны.

Лемма 3.6. *Если $\varphi : X \to Y$ – наложение, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – вложение.*

Лемма 3.7. *Если $\varphi : X \to Y$ – эпиморфизм, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – мономорфизм.*

Доказательство. Теорема 3.1 теперь следует из лемм 3.4 и 3.6. Докажем 3.2. Из лемм 3.5 и 3.7 следует, что если X псевдонасыщено и $\varphi : X \to Y$ – плотное вложение, то $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – биективное наложение. Для доказательства его точности возьмем вполне ограниченное множество $G \subseteq Y^\star$. Его образ $F = \varphi^\star(G) = G \circ \varphi$ будет вполне ограничен в $X^\star$. По лемме 2.2 и теореме 2.5, F равностепенно непрерывно на X, значит F содержится в поляре U° некоторой окрестности нуля $U \subseteq X$. Поскольку $\varphi : X \to Y$ – вложение, существует окрестность нуля $V \subseteq Y$ такая, что $U = \varphi^{-1}(V)$. При этом $G \subseteq Y^\star$ будет содержаться в поляре V°.

Заметим теперь, что (по лемме 2.3) U° – компакт в $X^\star$ а X-слабая топология на нем хаусдорфова и мажорируется исходной (то есть индуцированной из $X^\star$). Значит исходная топология U° совпадает с X-слабой. С другой стороны, поскольку X плотно в Y (в смысле φ), на компакте $V^\circ \subseteq Y^\star$ X-слабая топология тоже хаусдорфова и тоже мажорируется исходной (то есть индуцированной из $Y^\star$). Значит, исходная топология V° совпадает с X-слабой.

Итак, топологии компактов $U^\circ \subseteq X^\star$ и $V^\circ \subseteq Y^\star$ совпадают с X-слабой топологией, и это значит, что V° и U° гомеоморфны в смысле биекции $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$. Следовательно, их подпространства $G \subseteq V^\circ$ и $F \subseteq U^\circ$ также гомеоморфны относительно $\varphi^\star$. Теорема 3.2 доказана. □

(b) Двойственность между ∨ и ∧

Лемма 3.8. *Для всякого псевдополного ЛВП X существует (единственный) изоморфизм $X^\wedge = X^{\star\star}$ такой, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X^\wedge \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "\wedge_X"'] & & X^{\star\star} \arrow[dl, "i_X^{-1}"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad (3.3)$$

При этом, для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi : X \to Y$ будет коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^\wedge \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi^\wedge"'] & X^{\star\star} \arrow[d, "\varphi^{\star\star}"] \\ Y^\wedge \arrow[r, equal] & Y^{\star\star} \end{tikzcd} \qquad (3.4)$$

Доказательство. В силу следствия 2.14, отображение $i_X^{-1} : X^{\star\star} \to X$ является точным наложением, и поэтому его можно рассматривать, как более тонкую топологизацию X, сохраняющую вполне ограниченные множества. Локальной базой такой топологии будут множества ${}^\circ F, F \in \mathcal{BS}(X^\star)$ то есть, в силу теоремы 2.1 (b),(c), множества $D \in \mathcal{BD}(X)$. Это совпадает с определением $X^\wedge$. Дальнейшее ясно. □

Лемма 3.9. *Для всякого псевдонасыщенного ЛВП X существует (единственный) изоморфизм $X^\vee = X^{\star\star}$ такой, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X^\vee \arrow[rr, equal] & & X^{\star\star} \\ & X \arrow[ul, "\vee_X"] \arrow[ur, "i_X"'] & \end{tikzcd} . \tag{3.5}$$

При этом, для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi : X \to Y$ будет коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} X^\vee \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi^\vee"'] & X^{\star\star} \arrow[d, "\varphi^{\star\star}"] \\ Y^\vee \arrow[r, equal] & Y^{\star\star} \end{tikzcd} . \tag{3.6}$$

Это следует из определения $X^\vee$, леммы 2.12 и следствия 2.16.

Теорема 3.10. *Если X псевдополно, то существует (единственный) изоморфизм $(X^\wedge)^\star = (X^\star)^\vee$ такой, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} (X^\wedge)^\star \arrow[rr, equal] & & (X^\star)^\vee \\ & X^\star \arrow[ul, "(\wedge_X)^\star"] \arrow[ur, "\vee_{X^\star}"'] & \end{tikzcd} . \tag{3.7}$$

При этом, для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi : X \to Y$ будет коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^\wedge)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)^\vee \\ (Y^\wedge)^\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^\wedge)^\star"] & (Y^\star)^\vee \arrow[u, "(\varphi^\star)^\vee"'] \end{tikzcd} . \tag{3.8}$$

Доказательство. По теореме 2.17, $X^\star$ будет псевдонасыщено, поэтому

$$(X^\wedge)^\star = (\text{лемма } 3.8) = (X^{\star\star})^\star = (X^\star)^{\star\star} = (\text{лемма } 3.9) = (X^\star)^\vee$$

$$(\varphi^\wedge)^\star = (\text{лемма } 3.8) = (\varphi^{\star\star})^\star = (\varphi^\star)^{\star\star} = (\text{лемма } 3.9) = (\varphi^\star)^\vee$$

□

Теорема 3.11. *Если X псевдонасыщено, то существует (единственный) изоморфизм $(X^\vee)^\star = (X^\star)^\wedge$ такой, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} (X^\vee)^\star \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "(\vee_X)^\star"'] & & (X^\star)^\wedge \arrow[dl, "\wedge_{X^\star}"] \\ & X^\star & \end{tikzcd} . \tag{3.9}$$

При этом, для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi : X \to Y$ будет коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^\vee)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)^\wedge \\ (Y^\vee)^\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^\vee)^\star"] & (Y^\star)^\wedge \arrow[u, "(\varphi^\star)^\wedge"'] \end{tikzcd} . \tag{3.10}$$

Доказательство. По теореме 2.17, $X^\star$ будет псевдополно, поэтому

$$(X^\vee)^\star = (\text{лемма } 3.9) = (X^{\star\star})^\star = (X^\star)^{\star\star} = (\text{лемма } 3.8) = (X^\star)^\wedge$$

$$(\varphi^\vee)^\star = (\text{лемма } 3.9) = (\varphi^{\star\star})^\star = (\varphi^\star)^{\star\star} = (\text{лемма } 3.8) = (\varphi^\star)^\wedge$$

□

(c) Двойственность между инъективным и проективным рядом

Теорема 3.12. *Пусть X – псевдополное ЛВП, и $\{X_\omega, \pi\}$ – проективный ряд для X. Тогда*

(a) проективный ряд $\{X_\omega, \pi\}$ состоит из псевдополных пространств;

(b) если $\{(X^\star)_\omega, \sigma\}$ – инъективный ряд для сопряженного пространства $X^\star$, то существует единственная система изоморфизмов
$$(X_\omega)^\star = (X^\star)^\omega$$
такая, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма
$$\begin{tikzcd} (X_\lambda)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)^\lambda \\ (X_\varkappa)^\star \arrow[u, "(\pi^\varkappa_\lambda)^\star"] \arrow[r, equal] & (X^\star)^\varkappa \arrow[u, "\sigma^\lambda_\varkappa"'] \end{tikzcd} ; \tag{3.11}$$

(c) для всякого морфизма псевдополных ЛВП $\varphi : X \to Y$ и любого ординала ω коммутативна диаграмма
$$\begin{tikzcd} (X_\omega)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)^\omega \\ (Y_\omega)^\star \arrow[u, "(\varphi_\omega)^\star"] \arrow[r, equal] & (Y^\star)^\omega \arrow[u, "(\varphi^\star)^\omega"'] \end{tikzcd} , \tag{3.12}$$
в которой $\{Y_\omega\}$ – произвольный проективный ряд для Y, $\{(Y^\star)^\omega\}$ – произвольный инъективный ряд для $Y^\star$, а φ_ω и $(\varphi^\star)^\omega$ – системы морфизмов, определенные в леммах 1.23 и 1.12.

Доказательство. Заметим сразу, что все пространства $\{X_\omega\}$ псевдополны, поскольку в силу леммы 1.19, их можно считать топологизациями пространства X, сохраняющими систему вполне ограниченных множеств и топологию на вполне ограниченных множествах. Проверим, что система $(X_\omega)^\star$ является инъективным рядом для X, то есть удовлетворяет условиям (i)-(iv) § 1(c). Условия (i) и (ii) выполняются автоматически. Докажем (iii). Возьмем изолированный ординал λ и рассмотрим тетраэдр
$$\begin{tikzcd} (X_\varkappa)^{\wedge\star} \arrow[rr, equal] \arrow[dddr, equal] & & (X_\varkappa)^{\star\vee} \arrow[dddl, dashed] \\ & (X_\varkappa)^\star \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\ & & \\ & (X_\lambda)^\star & \end{tikzcd} , \tag{3.13}$$
в котором верхний внутренний треугольник есть диаграмма (3.7), а левый внутренний треугольник – диаграмма, сопряженная к (1.31). Определив пунктирную стрелку как композицию морфизмов $X_\varkappa^{\star\vee} \longrightarrow X_\varkappa^{\wedge\star} \longrightarrow (X_\lambda)^\star$, мы получим коммутативную диаграмму (3.13). Пунктирная стрелка, как и другие стороны большого треугольника, будет изоморфизмом, поэтому примыкающий к пунктирной стрелке правый внутренний треугольник есть попросту диаграмма (1.18).

Проверим теперь условие (iv). Для этого возьмем предельный ординал λ и покажем, что имеется естественный изоморфизм
$$(\varprojlim_{\iota<\lambda} X_\iota)^\star = (X_\lambda)^\star = \varinjlim_{\iota<\lambda}(X_\iota)^\star \tag{3.14}$$
Действительно, если представлять себе X_ω как цепочку топологизаций τ_ω векторного пространства X (направленную в сторону усиления), то топология τ_λ пространства X_λ будет в точности верхней гранью (объединением) топологий $\tau_\iota, \iota < \lambda$. Поэтому формула (3.14), рассматриваемая как равенство множеств,

будет означать просто, что функционал f на X_λ тогда и только тогда непрерывен в топологии τ_λ когда он непрерывен в какой-нибудь топологии $\tau_\iota, \iota < \lambda$. С другой стороны, формула (3.14), рассматриваемая как совпадение топологических пространств означает, что множество F линейных функционалов на X_λ тогда и только тогда является окрестностью нуля в $(X_\lambda)^\star$, когда в каждом пространстве $(X_\iota)^\star$, $\quad \iota < \lambda$ его след $F \cap (X_\iota)^\star$ является окрестностью нуля. Это тоже верно, потому что топологии в $(X_\lambda)^\star$ и $(X_\iota)^\star$ задаются полярами одной и той же системы множеств в X: во всех пространствах $(X_\omega)^\star$ базисные окрестности нуля – поляры множеств $S \in \mathcal{BS}(X)$.

Итак, справедливо (3.14), и если заметить, что для всякого $\varkappa < \lambda$ это равенство естественно вписывается в диаграмму

$$\begin{tikzcd} (\varprojlim_{\iota<\lambda} X_\iota)^\star \arrow[rr, equal] & & (\varinjlim_{\iota<\lambda} X_\iota)^\star \\ & (X_\varkappa)^\star \arrow[ul, "(\rho^\varkappa)^\star"] \arrow[ur, "\sigma_\varkappa"'] & \end{tikzcd} , \tag{3.15}$$

(где $\sigma_\varkappa$ – вложение элемента индуктивной системы в соответствующий индуктивный предел), то это будет означать выполнение условия (iv) для инъективного ряда $(X_\omega)^\star$.

Мы убедились, что система $(X_\omega)^\star$ является инъективным рядом для пространства $X^\star$. По лемме 1.10 это означает, что между $(X_\omega)^\star$ и $(X^\star)_\omega$ имеется естественный изоморфизм с коммутативностью диаграммы (3.11).

Нам остается доказать утверждение (c). Это делается индукцией по индексу ω с помощью теоремы 3.10. Теорема 3.12 доказана. $\square$

Аналогично доказывается

Теорема 3.13. *Пусть X – псевдонасыщенное ЛВП, и $\{X^\omega, \sigma\}$ – инъективный ряд для X. Тогда*

(a) инъективный ряд $\{X^\omega\}$ состоит из псевдонасыщенных пространств;

(b) если $\{(X^\star)_\omega, \pi\}$ – проективный ряд для сопряженного пространства $X^\star$, то существует единственная система изоморфизмов

$$(X^\omega)^\star = (X^\star)_\omega$$

такая, что для всякого $\varkappa < \lambda$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^\lambda)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)_\lambda \\ (X^\varkappa)^\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\sigma^\lambda_\varkappa)^\star"] & (X^\star)_\varkappa \arrow[u, "\pi^\varkappa_\lambda"'] \end{tikzcd} ; \tag{3.16}$$

(c) для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП $\varphi : X \to Y$ и любого ординала ω коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^\omega)^\star \arrow[r, equal] & (X^\star)_\omega \\ (Y^\omega)^\star \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^\omega)^\star"] & (Y^\star)_\omega \arrow[u, "(\varphi^\star)_\omega"'] \end{tikzcd} , \tag{3.17}$$

в которой Y^ω – произвольный инъективный ряд для Y, $(Y^\star)_\omega$ – произвольный проективный ряд для $Y^\star$ а φ^ω и $(\varphi^\star)_\omega$ – системы морфизмов, определенные в леммах 1.12 и 1.23.

(d) Двойственность между $\triangledown$ и $\vartriangle$

Из теоремы 3.12 немедленно следует

Теорема 3.14. *Пусть X – псевдополное ЛВП. Тогда*

(a) *существует единственный изоморфизм*

$$(X^{\triangle})^{\star} = (X^{\star})^{\triangledown}$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^{\triangle})^{\star} \arrow[rr, equal] & & (X^{\star})^{\triangledown} \\ & X^{\star} \arrow[ul, "(\triangle_X)^{\star}"] \arrow[ur, "\triangledown_{X^{\star}}"'] & \end{tikzcd} ; \tag{3.18}$$

(b) *для всякого морфизма псевдополных ЛВП* $\varphi : X \to Y$ *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} (X^{\triangle})^{\star} \arrow[r, equal] & (X^{\star})^{\triangledown} \\ (Y^{\triangle})^{\star} \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^{\triangle})^{\star}"] & (Y^{\star})^{\triangledown} \arrow[u, "(\varphi^{\star})^{\triangledown}"'] \end{tikzcd} . \tag{3.19}$$

Аналогично, из теоремы 3.13 следует

Теорема 3.15. *Пусть* X *– псевдонасыщенное ЛВП. Тогда*

(a) *существует единственный изоморфизм*

$$(X^{\triangledown})^{\star} = (X^{\star})^{\triangle}$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} (X^{\triangledown})^{\star} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "(\triangledown_X)^{\star}"'] & & (X^{\star})^{\triangle} \arrow[dl, "\triangle_{X^{\star}}"] \\ & X^{\star} & \end{tikzcd} ; \tag{3.20}$$

(b) *для всякого морфизма псевдонасыщенных ЛВП* $\varphi : X \to Y$ *коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} (X^{\triangledown})^{\star} \arrow[r, equal] & (X^{\star})^{\triangle} \\ (Y^{\triangledown})^{\star} \arrow[r, equal] \arrow[u, "(\varphi^{\triangledown})^{\star}"] & (Y^{\star})^{\triangle} \arrow[u, "(\varphi^{\star})^{\triangle}"'] \end{tikzcd} . \tag{3.21}$$

(e) Таблица инвариантов

Как известно, полнота сохраняется при переходе к замкнутому подпространству, прямой сумме, прямому произведению и проективному пределу в категории локально-выпуклых пространств. Теми же свойствами, как легко заметить, обладает псевдополнота. Двойственным образом, оказывается, что насыщенность и псевдонасыщенность сохраняются при переходе к (отделимому) фактор-пространству, прямому произведению, прямой сумме и индуктивному пределу в категории ЛВП.

Напротив, полнота и псевдополнота не сохраняются при переходе к фактор-пространству и локально-выпуклому индуктивному пределу, а насыщенность и псевдонасыщенность не сохраняются при переходе к подпространству и проективному пределу.

Наконец, оказывается, что псевдополнота и псевдонасыщенность сохраняются под действием шести описанных в §1 операций – $\vee, \wedge, \triangledown, \triangle, \blacktriangledown, \blacktriangle$, а полнота и насыщенность – под действием $\vee, \wedge, \triangledown, \triangle$. Наглядно все эти закономерности удобно отразить в виде следующей таблицы инвариантов.

ТАБЛИЦА ИНВАРИАНТОВ

Операция (в категории $\mathfrak{LCS}$)	Псевдополнота	Псевдо-насыщенность	Полнота	Насыщенность
$X^\vee$ (первый шаг к псевдопополнению)	$+$	$\oplus$ 3.17	$+$	$\oplus$ 3.21
$X^\wedge$ (первый шаг к псевдонасыщению)	$\oplus$ 3.16	$+$	$\oplus$ 3.19	$+$
$X^\triangledown$ (псевдопополнение)	$+$	$\oplus$ 3.17	$+$	$\oplus$ 3.22
$X^\vartriangle$ (псевдонасыщение)	$\oplus$ 3.16	$+$	$\oplus$ 3.20	$+$
$X^\blacktriangledown$ (пополнение)	$+$	$\oplus$ 3.17	$+$	?
$X^\blacktriangle$ (насыщение)	$\oplus$ 3.16	$+$	?	$+$
$\prod_{i\in I} X_i$ (прямое произведение)	$+$	$+$	$+$	$+$
$\sum_{i\in I} X_i$ (прямая сумма)	$+$	$+$	$+$	$+$
$\varprojlim X_i$ (проективный предел)	$+$	$\ominus$ 3.23	$+$	$\ominus$ 3.23
$\varinjlim X_i$ (индуктивный предел)	$\ominus$ 3.24	$+$	$\ominus$ 3.24	$+$
$Y \subseteq X$ (замкнутое подпространство)	$+$	$\ominus$ 3.22	$+$	$\ominus$ 3.22
X/Y (отделимое фактор-пространство)	$\ominus$ 3.22	$+$	$\ominus$ 3.22	$+$

Кружками здесь обведены минусы и плюсы, требующие проверки (остальные ячейки таблицы мы считаем очевидными). Цифры рядом с кружками означают номер соответствующего утверждения, которое мы доказываем в этом пункте.

Важное обстоятельство заключается в том, что в двух ячейках таблицы стоят вопросительные знаки, означающие, что ответы для этих случаев автору неизвестны. Будет ли полнота сохраняться при насыщении, и будет ли насыщенность сохраняться при пополнении – остается нерешенной задачей.

Предложение 3.16. *Если X псевдополно, то $X^\wedge$, $X^\vartriangle$ и $X^\blacktriangle$ также псевдополны*

Доказательство. По лемме 1.18, теореме 1.17 и теореме 1.4, $\wedge$, $\vartriangle$ и $\blacktriangle$ сохраняют систему вполне ограниченных множеств и топологию на каждом вполне ограниченном множестве. $\square$

Предложение 3.17. *Если X псевдонасыщено, то $X^\vee$, $X^\triangledown$ и $X^\blacktriangledown$ также псевдонасыщены.*

Доказательство. Это следует из того, что $\vee_X : X \to X^\vee$, $\triangledown_X : X \to X^\triangledown$ и $\blacktriangledown_X : X \to X^\blacktriangledown$ – плотные вложения. Действительно, если $D \in \mathcal{BD}(X^\vee)$ то $D \cap X \in \mathcal{BD}(X)$ откуда, в силу псевдонасыщенности X, $D\cap X$ – окрестность нуля в X. Значит, замыкание $\overline{D \cap X}$ в пространстве $X^\vee$ является окрестностью нуля в $X^\vee$. Но $\overline{D \cap X} \subseteq \overline{D} = D$ и значит D – тоже окрестность нуля в $X^\vee$. Аналогично рассматривается случай $X^\triangledown$ и $X^\blacktriangledown$. $\square$

Предложение 3.18. *Если X полно, то $X^\wedge$ тоже полно.*

Доказательство. По теореме 2.18, сопряженное пространство $X^\star$ должно быть насыщено. Значит, по той же теореме, второе сопряженное пространство $X^{\star\star}$ будет полно. С другой стороны, по лемме 3.8, $X^\wedge = X^{\star\star}$, то есть $X^\wedge$ полно. $\square$

Предложение 3.19. *Если X полно, то $X^\vartriangle$ тоже полно.*

Доказательство. Рассмотрим проективный ряд X_ω и предположим, что для некоторого λ уже доказано, что все $\{X_\varkappa; \varkappa < \lambda\}$ полны. Тогда

– если λ – изолированный ординал, то есть для некоторого $\varkappa$ выполняется (1.17), то пространство $X_\lambda = (X_\varkappa)^\wedge$ будет полно по предложению 3.18.

– если λ – предельный ординал, то X_λ будет полно, как проективный предел полных пространств $X_\lambda = \underset{\varkappa\to\lambda}{\underleftarrow{\lim}} X_\varkappa$ (соответствующий плюс в таблице инвариантов не обведен кружком).

$\square$

Предложение 3.20. *Если X насыщено, то $X^\vee$ тоже насыщено.*

Доказательство. По теореме 2.18, сопряженное пространство $X^\star$ должно быть полно. Значит, по той же теореме, второе сопряженное пространство $X^{\star\star}$ будет насыщено. С другой стороны, по лемме 3.9, $X^\vee = X^{\star\star}$, то есть $X^\vee$ насыщено. $\square$

Предложение 3.21. *Если X насыщено, то X^∇ тоже насыщено.*

Доказательство. Рассмотрим инъективный ряд X^ω и предположим, что для некоторого λ уже доказано, что все $\{X^\varkappa; \varkappa < \lambda\}$ насыщены. Тогда

– если λ – изолированный ординал, то есть для некоторого $\varkappa$ выполняется (1.17), то пространство $X^\lambda = (X^\varkappa)^\vee$ будет насыщено по предложению 3.20.

– если λ – предельный ординал, то X^λ будет насыщено, как индуктивный предел насыщенных пространств $X^\lambda = \underset{\varkappa\to\lambda}{\underrightarrow{\lim}} X^\varkappa$ (соответствующий плюс в таблице инвариантов не обведен кружком).

$\square$

Пример 3.22. Существует локально выпуклое пространство Z обладающее следующими свойствами:

(i) Z и $Z^\star$ полны и насыщены;

(ii) Z содержит замкнутое подпространство Y такое, что

  (a) фактор-пространство Z/Y не является псевдополным пространством;

  (b) аннулятор $Y^\perp$ (с индуцированной из $Z^\star$ топологией) не является псевдонасыщенным пространством.

Доказательство. Таким пространством будет пространство $Z = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ гладких финитных функций на $\mathbb{R}$. Оно полно (как строгий индуктивный предел последовательности полных пространств [2]) и насыщено (как индуктивный предел последовательности насыщенных пространств). По теореме 2.18, сопряженное пространство $Z^\star = \mathcal{D}^\star(\mathbb{R})$ тоже будет полно и насыщено. В работе [39] О.Г.Смолянов показал, что Z содержит замкнутое подпространство Y, такое что фактор-пространство Z/Y является метризуемым, но не полным пространством. Значит, Z/Y не псевдополно.

Положим $X = Z^\star$, $E = Y^\perp$ и покажем, что E не псевдонасыщено. По лемме об аннуляторе 2.19, $Z/Y = X^\star/E^\perp = E^\star$. Поэтому, если бы E было псевдонасыщено, то Z/Y было бы псевдополно по теореме 2.17. $\square$

Пример 3.23. Существует ЛВП E полное, и поэтому представимое в виде проективного предела банаховых пространств, но не псевдонасыщенное.

Доказательство. Таким пространством будет пространство $E = Y^\perp$ из примера 3.22. $\square$

Пример 3.24. Существует ЛВП Q представимое в виде индуктивного предела пространств Фреше, но не псевдополное.

Доказательство. Таким пространством будет пространство $Q = Z/Y$ из примера 3.22. Оно не псевдополно. Но, поскольку Z является строгим индуктивным пределом пространств Фреше $Z = \underrightarrow{\lim}\, Z_i$, его фактор-пространство также будет индуктивным пределом пространств Фреше $Z/Y = \underrightarrow{\lim}\, Z_i/Y$. $\square$

§ 4 Стереотипные пространства

(a) Определения и примеры

ЛВП X мы называем *стереотипным*, если оно одновременно псевдополно и псевдонасыщено. Термин был введен автором в [17] и доводами в его пользу служили следующие соображения. Во-первых (как станет видно из примера 4.3), класс псевдополных псевдонасыщенных пространств весьма широк (настолько, что включает все реально используемые в анализе локально-выпуклые пространства). Во-вторых (как оказывается по результатам § 4(c) и § 4(f)), выйти из этого класса невозможно, если пользоваться стандартными (категорными) правилами конструирования новых пространств. Наконец, в-третьих, описанные в § 1(c) и § 1(d) операции псевдопополнения и псевдонасыщения позволяют строить для каждого локально-выпуклого пространства ближайшие к нему в строго определенном смысле пространства из нашего класса, символизирующие его *стереотип* (или *стереотипы*, поскольку остается пока неясным, коммутируют друг с другом операции псевдопополнения и псевдонасыщения, или нет).

Из теорем 2.13 и 2.15 следует

Теорема 4.1 (Характеризация стереотипных пространств)**.** *Для ЛВП X следующие условия эквивалентны:*

(i) пространство X стереотипное;

(ii) отображение $i_X : X \to X^{\star\star}$ является изоморфизмом.

Таким образом, класс стереотипных пространств выделяется равенством

$$X^{\star\star} \cong X \tag{4.1}$$

Впервые пространства с таким условием рефлексивности рассматривались в работе М.Ф.Смит 1952 года [23]. В ней было доказано, что равенству (4.1) удовлетворяют все банаховы и все рефлексивные в обычном смысле пространства. Затем, существенно позже, в 1967 году Б.С.Брудовский показал, что похожее равенство эквивалентно выполнению неких условий, близких к тем, что мы называем псевдополнотой и псевдонасыщенностью [24]. Параллельно им отмечалось, что равенству (4.1) удовлетворяют квазиполные бочечные пространства. Тот же факт независимо от него был установлен В.С.Уотерхаусом в работе [25] 1968 года. Наконец, независимо от всех, в 1973 году К.Браунер в [26] отметил утверждение, в точности эквивалентное теореме 4.1.

Заметим, что из теоремы 4.1 (или теоремы 2.18) следует

Теорема 4.2. *Если X – стереотипное пространство, то $X^\star$ – тоже стереотипное пространство.*

Приведем некоторые примеры (из работ [21]-[24]).

Пример 4.3. *Квазиполные бочечные пространства* являются стереотипными в силу примера 1.13.

Пример 4.4. *Пространства Фреше и Браунера.* Понятно, что всякое пространство Фреше X, как полное и бочечное, является стереотипным. Его сопряженное пространство $Y = X^\star$ также будет стереотипным по теореме 4.2. При этом, если $\{U_n\}$ – счетная локальная база в X, то поляры $K_n = U_n^\circ$ являются компактами в Y, причем образуют *фундаментальную систему компактов*: каждый компакт $T \subseteq Y$ содержится в некотором компакте K_n (отсюда следует, между прочим, что Y не может быть пространством Фреше, если X бесконечномерно). Пространства Y, сопряженные (в смысле определения §2) к пространствам Фреше X впервые рассматривались К.Браунером в [26], и мы будем называть их *пространствами Браунера.* Характеристические свойства этих пространств полезно собрать в одном предложении.

Предложение 4.5. *Для локально-выпуклого пространства Y следующие условия эквивалентны:*

(i) Y является пространством Браунера;

(ii) Y полно, является пространством Келли (то есть всякое множество $M \subseteq Y$, оставляющее замкнутый след $M \cap K$ на любом компакте $K \subseteq Y$, замкнуто в Y) и обладает счетной фундаментальной системой компактов K_n: $\forall T \in \mathcal{K}(Y) \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad T \subseteq K_n$;

(iii) Y является стереотипным и обладает счетной фундаментальной системой компактов K_n: $\forall T \in \mathcal{K}(Y) \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad T \subseteq K_n$;

(iv) Y является стереотипным и обладает счетной исчерпывающей системой компактов K_n: $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = Y$.

Здесь счетную фундаментальную систему компактов в Y образуют поляры $K_n = {}^\circ U_n$ окрестностей нуля U_n, образующих счетную локальную базу в сопряженном пространстве Фреше $Y^\star$. По модулю этого замечания все утверждения предложения 4.5 очевидны, кроме одного – что пространство Браунера Y всегда является пространством Келли. Этот результат принадлежит К.Браунеру и выводится в его статье [26] как следствие теоремы Банаха-Дьедонне (см. [40]). Поскольку этот факт понадобится нам в будущем, мы приведем здесь его доказательство. Оно опирается на следующую лемму.

Лемма 4.6. *Пусть Y – локально выпуклое пространство и пусть U открытая окрестность нуля в топологии Келли пространства Y (то есть $0 \in U$ и для всякого компакта L в Y разность $L \setminus U$ замкнута в Y). Тогда для любых двух абсолютно выпуклых компактов K и L в Y и любого замкнутого множества E в Y из условия*

$$E \cap K \subset U \tag{4.2}$$

следует, что найдется конечное множество функционалов $H \subset K^\circ$ такое, что

$$^\circ H \cap E \cap L \subseteq U \tag{4.3}$$

Доказательство. Предположим, что это не так, то есть что для всякого конечного подмножества $H \subset K^\circ$ выполняется

$$^\circ H \cap E \cap L \subseteq U$$

или, что равносильно,

$$^\circ H \cap E \cap (L \setminus U) \neq \varnothing$$

Тогда множества

$$A_H := {}^\circ H \cap E \cap (L \setminus U),$$

где H пробегает систему всех конечных подмножеств в K°, образуют систему непустых замкнутых подмножеств компакта $L \setminus U$, причем эта система будет центрирована, потому что для любого конечного набора $H_1, ..., H_n$ получаем

$$A_{H_1} \cap ... \cap A_{H_n} = \Big({}^\circ H_1 \cap ... \cap {}^\circ H_n \Big) \cap E \cap (L \setminus U) = {}^\circ (H_1 \cup ... \cup H_n) \cap E \cap (L \setminus U) = A_{H_1 \cup ... \cup H_n} \neq \varnothing$$

Значит, система A_H имеет непустое пересечение, и мы получаем противоречие с (4.2):

$$\varnothing \neq \bigcap_{H \subset K^\circ} A_H = \bigcap_{H \subset K^\circ} {}^\circ H \cap E \cap (L \setminus U) = {}^\circ (K^\circ) \cap E \cap (L \setminus U) = K \cap E \cap (L \setminus U) = \underbrace{(K \setminus U)}_{\substack{\| \\ \varnothing, \\ \text{в силу (4.2)}}} \cap E \cap L = \varnothing$$

□

Доказательство импликации (i)$\Longrightarrow$(ii) в предложении 4.5. Пусть Y – пространство Браунера и пусть K_n – фундаментальная система абсолютно выпуклых компактов в Y. Выберем произвольную открытую окрестность нуля U в топологии Келли пространства Y и покажем, что U – окрестность нуля в исходной топологии пространства Y. Нам понадобится некая индуктивно построенная система подмножеств в $Y^\star$.

1. Поскольку $U \cap K_1$ – окрестность нуля в K_1, а топология компакта $K_1 \subset Y$ совпадает с $Y^\star$–слабой топологией на K_1, должно существовать конечное множество функционалов $F_1 \subset Y^\star$ такое, что

$$^\circ F_1 \cap K_1 \subseteq U$$

2. По лемме 4.6, существует конечное множество функционалов $H_1 \subset K_1^\circ$ такое, что

$$^\circ H_1 \cap {}^\circ F_1 \cap K_2 \subseteq U$$

Положив $F_2 = H_1 \cup F_1$, мы получим

$$^\circ F_2 \cap K_2 \subseteq U$$

3. Затем, снова по лемме 4.6, определяется $H_2 \subset K_2^\circ$ так, чтобы

$$^\circ H_2 \cap {}^\circ F_2 \cap K_3 \subseteq U$$

и полагают $F_3 = H_2 \cup F_2$. И так далее.

Действуя таким образом, мы получим две последовательности конечных множеств $F_n, H_n \subset Y^\star$ со следующими свойствами:

$$H_n \subset K_n^\circ, \qquad F_{n+1} = H_n \cup F_n, \qquad {}^\circ F_n \cap K_n \subseteq U$$

Рассмотрим множество

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

Оно счетно, и его элементы можно занумеровать так, чтобы при возрастании номера элемента соответствующий номер n множества H_n, которому этот элемент принадлежит тоже не уменьшался:

$$F = \{f_k;\ k \in \mathbb{N}\}, \qquad n_k = \min\{n \in \mathbb{N} :\ f_k \in F_{n+1} \setminus F_n = H_n\}, \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad n_k \leqslant n_{k+1}, \qquad n_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

Тогда последовательность $\{f_k\}$ будет стремиться к нулю (потому что $f_k \in H_{n_k} \subset K_{n_k}^\circ$, а множества K_n° образуют базу окрестностей нуля в пространстве Фреше $Y^\star$),

$$f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

и отсюда следует, что множество $F = \{f_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ вполне ограничено в $Y^\star$. Значит его поляра ${}^\circ F$ будет окрестностью нуля в Y. Нам остается заметить, что

$${}^\circ F \subseteq U$$

Действительно,

$${}^\circ F = {}^\circ\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} {}^\circ F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} {}^\circ F_n \cap \underbrace{\bigcup_{l=1}^{\infty} K_l}_{\overset{\|}{Y}} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} {}^\circ F_n}_{\subseteq\, {}^\circ F_l} \cap K_l \Big) \subseteq \bigcup_{l=1}^{\infty} {}^\circ F_l \cap K_l \subseteq U$$

$\square$

Пример 4.7. *Пространства Банаха и Смит* являются частными случаями пространств Фреше и Браунера. Если X – пространство Банаха, то, в силу 4.4, X и $Y = X^\star$ являются стереотипными пространствами. При этом шар B в Y имеет полярой так называемый *универсальный компакт* $K = B^\circ$ в Y, то есть такой компакт, который поглощает любой другой компакт T в Y. Пространства $Y = X^\star$, сопряженные в смысле определения §2 к пространствам Банаха X первой рассматривала М.Ф.Смит в [23], поэтому мы называем их *пространствами Смит.* Их характеристические свойства собраны в следующем предложении

Предложение 4.8. *Для локально-выпуклого пространства Y следующие условия эквивалентны:*

(i) Y является пространством Смит;

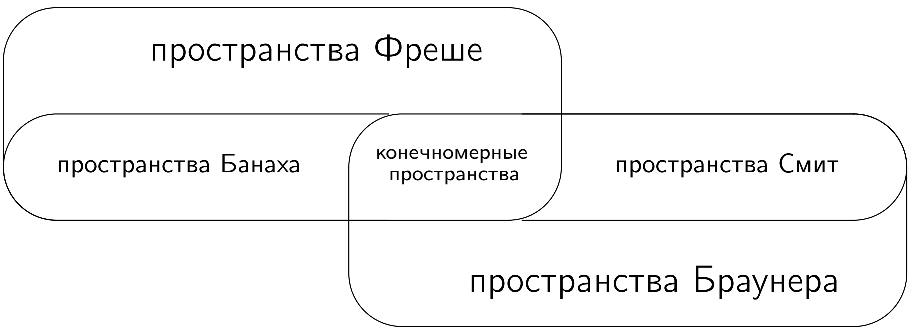
(ii) Y полно, является пространством Келли и обладает универсальным компактом $K : \forall T \in \mathcal{K}(X) \quad \exists \lambda \in \mathbb{C} \quad T \subseteq \lambda K$;

(iii) Y является стереотипным пространством и обладает универсальным компактом;

(iv) Y является стереотипным пространством и обладает компактной бочкой.

Пусть $\mathfrak{Ste}$ обозначает класс стереотипных пространств, $\mathfrak{Fre}$ – класс пространств Фреше, $\mathfrak{Bra}$ – класс пространств Браунера, $\mathfrak{Ban}$ – класс пространств Банаха, $\mathfrak{Smi}$ – класс пространств Смит.

Связи между классами пространств Фреше, Браунера, Банаха и Смит можно проиллюстрировать следующей диаграммой (в которой переход к сопряженному классу получается поворотом на 180°):



Поскольку бесконечномерное пространство Смит не может быть бочечным, класс стереотипных пространств не ограничивается квазиполными бочечными. Более того, как оказывается он содержит пространства, не являющиеся пространствами Макки:

Пример 4.9 (Стереотипное пространство, не являющееся пространством Макки)**.** Таким пространством будет сопряженное $Y = X^\star$ к произвольному рефлексивному (в обычном смысле) банахову пространству X. Действительно, в X замкнутый единичный шар U, как известно, будет X'-слабо компактным, но не компактным в нормированной топологии множеством. Для сопряженного пространства $Y = X^\star$ это означает, что в нем имеется замкнутое выпуклое уравновешенное множество $K = U^\circ$, не являющееся окрестностью нуля, поляра которого $K^\circ = U$ является Y-слабым компактом в Y'.

Приведем, наконец, примеры пространств, не являющихся стереотипными по разным причинам.

Пример 4.10 (Псевдополное, но не псевдонасыщенное пространство)**.** Пусть X – произвольное бесконечномерное банахово пространство и пусть $Y = X'_\sigma$ – его сопряженное пространство с X-слабой топологией. По теореме Банаха-Штейнгауза, пространство Y псевдополно. Покажем, что оно не стереотипное. Действительно, в $Y = X'_\sigma$ вполне ограниченные множества – то же самое, что ограниченные, и то же самое, что подмножества в полярах U° окрестностей нуля U из X. Поэтому $Y^\star = X$, а $Y^{\star\star} = X^\star \neq X'_\sigma = Y$.

Пример 4.11 (Псевдонасыщенное, но не псевдополное пространство)**.** Таким пространством, в силу примера 1.14, будет произвольное неполное метризуемое пространство.

(b) Двойственность в классе стереотипных пространств

В силу теоремы 4.1, каждое стереотипное пространство X однозначно восстанавливается по своему сопряженному пространству $Y = X^\star$. Поэтому различным свойствам X должны соответствовать их двойственные аналоги в Y и наоборот. Если собрать в одном предложении наиболее очевидные закономерности такого рода, возникает следующая любопытная картина.

Теорема 4.12. *Пусть* $< X, Y >$ *– дуальная система стереотипных пространств, то есть* $X^\star = Y$ *и* $Y^\star = X$*. Тогда*

(a) X *нормируемо* $\iff$ X *– пространство Банаха* $\iff$ Y *– пространство Смит;*

(b) X *метризуемо* $\iff$ X *– пространство Фреше* $\iff$ Y *– пространство Браунера;*

(c) X *бочечно* $\iff$ Y *обладает свойством Гейне-Бореля;*

(d) X *квазибочечно* $\iff$ *в* Y *любое подмножество* T*, поглощаемое любой бочкой, вполне ограничено;*

(e) X *– пространство Макки* $\iff$ *в* Y *всякое* Y'*-слабо компактное множество компактно;*

(f) X *– монтелевское пространство* $\iff$ X *бочечно и обладает свойством Гейне-Бореля* $\iff$ Y *– монтелевское пространство;*

(g) X *– пространство со слабой топологией* $\iff$ *в* Y *любой компакт* T *конечномерен;*

(h) X *сепарабельно (то есть, обладает счетным всюду плотным множеством)* $\iff$ *в* Y *существует последовательность замкнутых подпространств* L_n *конечной коразмерности*

$(\forall n \quad \dim(Y/L_n) < \infty)$ *с тривиальным пересечением:* $\bigcap_{n=1}^\infty L_n = \{0\}$.

(i) X *обладает (классическим) свойством аппроксимации* $\iff$ Y *обладает (классическим) свойством аппроксимации;*

(j) X *полно* $\iff$ Y *кополно* $\iff$ Y *насыщено;*

(k) X *пространство Птака (= совершенно полное в смысле [2])* $\iff$ *в* Y *всякое подпространство* L*, оставляющее замкнутый след* $L \cap K$ *на каждом компакте* $K \subseteq Y$ *автоматически замкнуто;*

(l) X *– гиперполное пространство (в смысле [2])* $\iff$ *в* Y *всякое выпуклое уравновешенное множество* B*, оставляющее замкнутый след* $B \cap K$ *на каждом компакте* $K \subseteq Y$ *автоматически замкнуто.*

Для доказательства достаточно заметить, что операция перехода к поляре $B \mapsto B^\circ$ устанавливает биекцию между системами замкнутых выпуклых уравновешенных множеств в X и Y, причем окрестность нуля переходит в компакт, а бочка – в ограниченное множество.

(c) Лемма об аннуляторе для стереотипных пространств

В стереотипной теории лемма об аннуляторе 2.19 имеет важное обобщение:

Лемма 4.13. *Пусть X – стереотипное пространство, E – его замкнутое локально-выпуклое подпространство и пусть*

$$E^{\perp} = \{f \in X^{\star} : f|_E = 0\}$$

аннулятор пространства E в сопряженном пространстве $X^{\star}$. Тогда

(a) имеется естественный изоморфизм локально-выпуклых пространств

$$E^{\star} \cong X^{\star}/E^{\perp} \tag{4.4}$$

порождающий изоморфизмы стереотипных пространств

$$(E^{\vartriangle})^{\star} \cong (X^{\star}/E^{\perp})^{\triangledown} \qquad E^{\vartriangle} \cong [(X^{\star}/E^{\perp})^{\triangledown}]^{\star} \tag{4.5}$$

(b) имеется естественный изоморфизм локально-выпуклых пространств

$$(E^{\perp})^{\star} \cong X/E \tag{4.6}$$

порождающий изоморфизмы стереотипных пространств

$$((E^{\perp})^{\vartriangle})^{\star} \cong (X/E)^{\triangledown} \qquad (E^{\perp})^{\vartriangle} \cong [(X/E)^{\triangledown}]^{\star} \tag{4.7}$$

Доказательство. Формула (4.4) совпадает с (2.5), и из нее следует

$$(E^{\star})^{\triangledown} \cong (X^{\star}/E^{\perp})^{\triangledown}$$

Далее, воспользовавшись теоремой 3.14, мы получим

$$(E^{\vartriangle})^{\star} \cong (E^{\star})^{\triangledown} \cong (X^{\star}/E^{\perp})^{\triangledown}$$

и уже отсюда

$$E^{\vartriangle} \cong (E^{\vartriangle})^{\star\star} \cong [(X^{\star}/E^{\perp})^{\triangledown}]^{\star}$$

Таким образом, доказано (a). Переобозначив объекты, мы получим условие (b). $\square$

(d) Непосредственное подпространство и непосредственное фактор-пространство

Класс $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств образует категорию, морфизмами в которой служат линейные непрерывные отображения $\varphi : X \to Y$. Легко проверить, что в этой категории, как и в категории $\mathfrak{LCS}$, *мономорфизмами* будут инъективные отображения (то есть такие, что $\varphi^{-1}(0) = \{x \in X : \varphi(x) = 0\} = \{0\}$), а *эпиморфизмами* – отображения с плотным образом (то есть такие, что $\overline{\varphi(X)} = \overline{\{\varphi(x); x \in X\}} = Y$). Напомним, что морфизм называется *биморфизмом*, если он одновременно мономорфизм и эпиморфизм.

Стереотипное пространство Y мы называем *подпространством стереотипного пространства* X, если задан (произвольный) мономорфизм стереотипных пространств $\mu : Y \to X$, называемый *представляющим мономорфизмом* подпространства Y в пространстве X.

Если Y и $\widetilde{Y}$ – два подпространства в стереотипном пространстве X с представляющими мономорфизмами μ и $\widetilde{\mu}$, причем имеется биморфизм $\beta : Y \to \widetilde{Y}$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\beta"] & & \widetilde{Y} \arrow[ul, "\widetilde{\mu}"'] \end{tikzcd} \quad , \tag{4.8}$$

то подпространство $\widetilde{Y}$ называется *посредником* подпространства Y в пространстве X.

Подпространство Y стереотипного пространства X мы называем *непосредственным подпространством* в X, если у него нет посредников, то есть если для любого его посредника $\widetilde{Y}$ в X соответствующий биморфизм β в диаграмме (4.8) автоматически является изоморфизмом.

Пример 4.14. Пусть X – стереотипное пространство и E – его замкнутое локально-выпуклое подпространство (то есть подпространство в алгебраическом смысле, являющееся одновременно замкнутым подмножеством топологического пространства X). Тогда ЛВП E (с индуцированной из X топологией) будет псевдополным, поэтому его псевдонасыщение $E^\vartriangle$ будет также псевдополным, в силу таблицы инвариантов § 3(e). Значит, $E^\vartriangle$ является стереотипным пространством. Ясно, что оно будет непосредственным подпространством стереотипного пространства X с представляющим мономорфизмом $\sigma^\vartriangle : E^\vartriangle \to X$ где $\sigma : E \subseteq X$ – естественное вложение (локально-выпуклых пространств). Следующая теорема утверждает, что эта конструкция описывает все непосредственные подпространства:

Теорема 4.15 (о строении непосредственных подпространств)**.** *Стереотипное пространство Y тогда и только тогда будет непосредственным подпространством стереотипного пространства X с представляющим мономорфизмом $\mu : Y \to X$, когда найдутся*

- *замкнутое подпространство E локально-выпуклого пространства X,*
- *изоморфизм стереотипных пространств $\beta : Y \to E^\vartriangle$,*

такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\beta"] & & E^\vartriangle \arrow[ul, "\sigma^\vartriangle"'] \end{tikzcd} . \tag{4.9}$$

в которой $\sigma^\vartriangle$ – псевдонасыщение естественного вложения $\sigma : E \subseteq X$.

Для доказательства в качестве E нужно взять $\overline{\mu(Y)}$.

Стереотипное пространство Y мы называем *фактор-пространством стереотипного пространства* X, если задан (произвольный) эпиморфизм стереотипных пространств $\varepsilon : X \to Y$, называемый *представляющим эпиморфизмом* фактор-пространства Y пространства X.

Если Y и $\widetilde{Y}$ – два фактор-пространства стереотипного пространства X с представляющими эпиморфизмами ε и $\widetilde{\varepsilon}$, причем имеется биморфизм $\beta : \widetilde{Y} \to Y$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varepsilon}"] & \\ Y & & \widetilde{Y} \arrow[ll, "\beta"'] \end{tikzcd} , \tag{4.10}$$

то фактор-пространство $\widetilde{Y}$ называется *посредником* фактор-пространства Y пространства X.

Фактор-пространство Y стереотипного пространства X мы называем *непосредственным фактор-пространством* пространства X, если у него нет посредников, то есть если для любого его посредника $\widetilde{Y}$ соответствующий биморфизм β в диаграмме (4.10) автоматически является изоморфизмом.

Пример 4.16. Пусть X – стереотипное пространство и E – его замкнутое локально-выпуклое подпространство (то есть подпространство в алгебраическом смысле, являющееся одновременно замкнутым подмножеством топологического пространства X). Тогда фактор-пространство локально-выпуклых пространств X/E будет, в силу таблицы инвариантов § 3(e), псевдонасыщенным локально-выпуклым пространством. Значит, опять же в силу таблицы инвариантов, его псевдопополнение $(X/E)^\triangledown$ будет псевдонасыщенным (и псевдополным), то есть, стереотипным пространством. Покажем, что оно будет непосредственным фактор-пространством пространства X с представляющим эпиморфизмом $\pi^\triangledown : X \to (X/E)^\triangledown$ где $\pi : X \to X/E$ – фактор-отображение локально-выпуклых пространств. Действительно, аннулятор $E^\perp$ – замкнутое локально-выпуклое подпространство в $X^\star$. По лемме 4.13(b), фактор-пространство $(X/E)^\triangledown$ стереотипного пространства X имеет сопряженным пространством $[(X/E)^\triangledown]^\star$ подпространство $(E^\perp)^\vartriangle$ стереотипного пространства $X^\star$. Поскольку, в силу примера 4.14, $(E^\perp)^\vartriangle$ – непосредственное подпространство в $X^\star$, по принципу двойственности получаем, что $(X/E)^\triangledown$ должно быть непосредственным фактор-пространством для X.

Применяя теперь принцип двойственности к теореме 4.15, мы получим утверждение об универсальности конструкции примера 4.16:

Теорема 4.17 (о строении непосредственных фактор-пространств)**.** *Стереотипное пространство Y тогда и только тогда будет непосредственным фактор-пространством стереотипного пространства X с представляющим эпиморфизмом $\varepsilon : X \to Y$, когда найдутся*

– *замкнутое подпространство E локально-выпуклого пространства X,*

– *изоморфизм стереотипных пространств $\beta : (X/E)^\triangledown \to Y$,*

такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\pi^\triangledown"] & \\ Y & & (X/E)^\triangledown \arrow[ll, "\beta"'] \end{tikzcd} . \tag{4.11}$$

в которой $\pi^\triangledown$ – псевдопополнение фактор-отображения $\pi : X \to X/E$.

(e) Предабелевость категории $\mathfrak{Ste}$

Поскольку любые два параллельных морфизма $\varphi, \psi : X \to Y$ в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$ можно складывать и вычитать, понятно, что $\mathfrak{Ste}$ является аддитивной категорией. Не так очевидно, что она предабелева:

Теорема 4.18. *Всякий морфизм стереотипных пространств $\varphi : X \to Y$ обладает*

– *ядром* $\ker\varphi : \operatorname{Ker}\varphi \to X$,

– *коядром* $\operatorname{coker}\varphi : Y \to \operatorname{Coker}\varphi$,

– *образом* $\operatorname{im}\varphi : \operatorname{Im}\varphi \to Y$

– *и кообразом* $\operatorname{coim}\varphi : X \to \operatorname{Coim}\varphi$

в категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств. При этом, операция $\varphi \mapsto \varphi^\star$ перехода к сопряженному отображению устанавливает следующие связи между этими объектами:

$$(\ker\varphi)^\star = \operatorname{coker}\varphi^\star \quad (\operatorname{coker}\varphi)^\star = \ker\varphi^\star \quad (\operatorname{im}\varphi)^\star = \operatorname{coim}\varphi^\star \quad (\operatorname{coim}\varphi)^\star = \operatorname{im}\varphi^\star \tag{4.12}$$

$$(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp\vartriangle} = \operatorname{Im}\varphi^\star \quad (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp\vartriangle} = \operatorname{Ker}\varphi^\star \quad \operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi^\star)^{\perp\vartriangle} \quad \operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi^\star)^{\perp\vartriangle} \tag{4.13}$$

Доказательство. Прообраз нуля $\varphi^{-1}(0)$ будет, очевидно, замкнутым локально-выпуклым подпространством в X. Поэтому его псевдонасыщение $[\varphi^{-1}(0)]^\vartriangle$ будет в силу примера 4.14 (непосредственным) подпространством стереотипного пространства X. Положив $\operatorname{Ker}\varphi = [\varphi^{-1}(0)]^\vartriangle$ мы получим, что всякий морфизм $\psi : Z \to X$ со свойством $\varphi\circ\psi = 0$ автоматически поднимается до морфизма локально-выпуклых пространств $\widetilde{\psi} : Z \to \varphi^{-1}(0)$ и, поскольку Z псевдонасыщено, до морфизма $\widetilde{\psi} : Z \to [\varphi^{-1}(0)]^\vartriangle = \operatorname{Ker}\varphi$ (здесь применяется диаграмма (1.26)). Таким образом, $\operatorname{Ker}\varphi$ действительно является ядром морфизма φ в категории $\mathfrak{Ste}$.

Положив далее $\operatorname{Coker}\varphi = [Y/\overline{\varphi(X)}]^\triangledown$ мы получим, что из леммы 4.13 следует равенство $\operatorname{Coker}\varphi = [\operatorname{Ker}\varphi^\star]^\star$ которое, в силу принципа двойственности, должно означать, что $\operatorname{Coker}\varphi$ действительно является коядром для φ. Существование ядра и коядра автоматически влечет за собой существование образа и кообраза, которые в данном случае принимают вид $\operatorname{Im}\varphi = [\overline{\varphi(X)}]^\vartriangle$ и $\operatorname{Coim}\varphi = [X/\varphi^{-1}(0)]^\triangledown$.

Формулы (4.12) следуют из принципа двойственности и влекут за собой (4.13). Например, с помощью (4.7) получаем

$$\operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Coker}\varphi^\star)^\star = ((X^\star/\operatorname{Im}\varphi^\star)^\triangledown)^\star = (4.7) = (\operatorname{Im}\varphi^\star)^{\perp\vartriangle}$$

□

Из предабелевости категории $\mathfrak{Ste}$ следует, что всякий морфизм $\varphi : X \to Y$ в $\mathfrak{Ste}$ единственным образом раскладывается в композицию

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{coim}\varphi"'] & Y \\ \operatorname{Coim}\varphi \arrow[r, "\operatorname{red}\varphi"] & \operatorname{Im}\varphi \arrow[u, "\operatorname{im}\varphi"'] \end{tikzcd} . \tag{4.14}$$

где морфизм $\operatorname{red}\varphi$ называется *редуцированным морфизмом, ассоциированным с φ.*[6]

[6]Неясно, будет ли $\operatorname{red}\varphi$ биморфизмом.

(f) Иммерсии и субмерсии

Условимся говорить, что образ морфизма $\mu : X \to Y$ шире образа морфизма $\varphi : Z \to Y$

$$\operatorname{Im} \varphi \leqslant \operatorname{Im} \mu$$

если для всякого морфизма $\lambda : Y \to L$ из равенства

$$\lambda \circ \mu = 0$$

следует равенство

$$\lambda \circ \varphi = 0$$

Морфизм стереотипных пространств $\mu : X \to Y$ называется *иммерсией*, если для всякого морфизма $\varphi : Z \to Y$ такого, что

$$\operatorname{Im} \varphi \leqslant \operatorname{Im} \mu$$

найдется единственный морфизм $\psi : Z \to X$ замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\mu"] & & Y \\ & Z \arrow[ul, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd} . \tag{4.15}$$

Теорема 4.19. *Для морфизма стереотипных пространств $\mu : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) μ является иммерсией;

(ii) μ совпадает со своим образом:

$$\mu = \operatorname{im} \mu$$

(то есть $\operatorname{coim} \mu$ и $\operatorname{red} \mu$ являются изоморфизмами);

(iii) X является непосредственным подпространством в Y с представляющим мономорфизмом μ.

Рассмотрим двойственную конструкцию. Условимся говорить, что ядро морфизма $\varepsilon : X \to Y$ уже ядра морфизма $\varphi : Z \to Y$

$$\operatorname{Ker} \varepsilon \leqslant \operatorname{Ker} \varphi$$

если для всякого морфизма $\lambda : L \to X$ из равенства

$$\varepsilon \circ \lambda = 0$$

следует равенство

$$\varphi \circ \lambda = 0$$

Морфизм стереотипных пространств $\varepsilon : X \to Y$ называется *субмерсией*, если для всякого морфизма $\varphi : X \to Z$ такого, что

$$\operatorname{Ker} \varepsilon \leqslant \operatorname{Ker} \varphi$$

найдется единственный морфизм $\psi : Y \to Z$ замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & Z & \end{tikzcd} . \tag{4.16}$$

Теорема 4.20. *Для морфизма стереотипных пространств $\varepsilon : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) ε является субмерсией;

(ii) ε совпадает со своим кообразом:

$$\varepsilon = \operatorname{coim} \varepsilon$$

(то есть $\operatorname{im} \varepsilon$ и $\operatorname{red} \varepsilon$ являются изоморфизмами);

(iii) Y является непосредственным фактор-пространством для X с представляющим эпиморфизмом ε.

(g) Полнота категории $\mathfrak{Ste}$

Из таблицы инвариантов § 3(e) следует

Теорема 4.21. *Всякое семейство $\{X_i; i \in I\}$ стереотипных пространств обладает прямой суммой и прямым произведением в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$.*

Доказательство. Эти объекты будут совпадать с обычной локально-выпуклой прямой суммой и прямым произведением. □

Теорема 4.22. *Всякая индуктивная (проективная) система $\{X_i; i \in I, i \to \infty\}$ стереотипных пространств обладает индуктивным (проективным) пределом в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$.*

Доказательство. С обычным локально-выпуклым индуктивным и проективным пределом эти объекты связаны формулами

$$\mathfrak{Ste} - \varinjlim_{i\to\infty} X_i = (\mathfrak{LCS} - \varinjlim_{i\to\infty} X_i)^{\triangledown} \qquad \mathfrak{Ste} - \varprojlim_{i\to\infty} X_i = (\mathfrak{LCS} - \varprojlim_{i\to\infty} X_i)^{\vartriangle} \tag{4.17}$$

□

§ 5 Функторы $Y : X$ и $Z : (X, Y)$

В этом параграфе мы докажем серию важных технических результатов, которые понадобятся нам затем в §6 при описании свойств стереотипных пространств линейных операторов и билинейных форм.

(a) Вполне ограниченные множества в $Y : X$

Пусть X и Y – два ЛВП. Обозначим через $Y : X$ пространство всех морфизмов (то есть линейных непрерывных операторов) $\varphi : X \to Y$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X.

Теорема 5.1. *Пусть X и Y – произвольные ЛВП. Множество морфизмов $\Phi \subseteq Y : X$ вполне ограничено в $Y : X$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

(a) равностепенная непрерывность на предкомпактных множествах:

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall V \in \mathcal{U}(Y) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \quad \forall a, b \in S \quad a - b \in U \Rightarrow \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi(a) - \varphi(b) \in V$$

(b) равномерная предкомпактность на предкомпактных множествах:

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \Phi(S) = \{\varphi(x), x \in S, \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{S}(Y)$$

Условие (b) в этой паре можно заменить более слабым условием

(c) поточечная предкомпактность:

$$\forall x \in X \quad \Phi(x) = \{\varphi(x), \varphi \in \Phi\} \in \mathcal{S}(Y)$$

Кроме того,

– *если Y обладает свойством Гейне-Бореля, то (a) $\Rightarrow$ (b)&(c);*

– *если X бочечно, то (c) $\Rightarrow$ (a)&(b).*

Доказательство. Рассмотрим пополнение $Y^{\blacktriangledown}$ пространства Y. Очевидно, $Y : X$ естественно вкладывается в $Y^{\blacktriangledown} : X$. Поэтому множество $\Phi \subseteq Y : X$ тогда и только тогда будет вполне ограничено в $Y : X$, когда оно вполне ограничено в $Y^{\blacktriangledown} : X$. Точно также выполнение условий $(a), (b), (c)$ для Φ, рассматриваемого как множество отображений из X в Y эквивалентно тем же условиям для Φ как множества отображений из X в $Y^{\blacktriangledown}$.

Одним словом, мы можем считать, что Y полно. Тогда доказательство теоремы с небольшими поправками копирует доказательство леммы 2.2. Каждому $S \in \mathcal{S}(X)$ ставится в соответствие компакт $S^{\blacktriangledown}$, являющийся пополнением вполне ограниченного равномерного пространства S (см. [37, 8.3.16]). Пусть

$\blacktriangledown_S : S \to S^\blacktriangledown$ - соответствующее вложение. Всякое линейное непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$ равномерно непрерывно на X, и значит на S, поэтому ограничение $\varphi|_S$ можно продолжить на $S^\blacktriangledown$ до непрерывной функции $\varphi_S^\blacktriangledown$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\blacktriangledown"] \arrow[dr, "\varphi|_S"'] & & S^\blacktriangledown \arrow[dl, dashed, "\varphi_S^\blacktriangledown"] \\ & Y & \end{tikzcd} .$$

Мы получили отображение $\pi_S : \varphi \mapsto \varphi_S^\blacktriangledown$ пространства $Y : X$ в пространство $\mathcal{C}(S^\blacktriangledown, Y)$ непрерывных функций из $S^\blacktriangledown$ в Y с топологией равномерной сходимости на компакте $S^\blacktriangledown$.

Если теперь S будет бегать по системе $\mathcal{S}(X)$, то топология $Y : X$ окажется проективной относительно системы отображений $\pi_S : (Y : X) \to \mathcal{C}(S^\blacktriangledown, Y)$. В силу леммы 0.12 это означает, что множество $\Phi \subseteq Y : X$ вполне ограничено в $Y : X$ тогда и только тогда, когда для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$ система функций $\Phi_S^\blacktriangledown = \pi_S(\Phi)$ будет вполне ограничена в $\mathcal{C}(S^\blacktriangledown, Y)$. С другой стороны, поскольку Y – тихоновское пространство ([37, 8.1.20]), для $\mathcal{C}(S^\blacktriangledown, Y)$ справедлива теорема Асколи ([37, 8.2.10]): множество $\Phi_S^\blacktriangledown$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда

(a’) $\Phi_S^\blacktriangledown$ равностепенно непрерывно на S и

(c’) $\forall x \in S^\blacktriangle \quad \Phi_S^\blacktriangledown(x)$ вполне ограничено в Y.

Второе условие можно усилить до

(b’) $\Phi_S^\blacktriangledown(S^\blacktriangledown)$ вполне ограничено в Y.

В результате возникает цепочка равносильностей

$$\Phi \in \mathcal{S}(Y : X) \Leftrightarrow [\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad (a')\&(c')] \Leftrightarrow [\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad (a')\&(b')] \Leftrightarrow$$
$$[\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad (a)\&(b)] \Leftrightarrow [\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad (a)\&(c)]$$

Теперь если Y обладает свойством Гейне-Бореля, то справедлива импликация $(a) \Rightarrow (c)$. Действительно, если выполнено (a), то для всякого $x \in X \quad \Phi$ будет равностепенно непрерывно на отрезке $[0, x]$:

$$\forall V \in \mathcal{U}(Y) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \quad \forall a, b \in [0, x] \quad (a - b \in U \Rightarrow \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi(a) - \varphi(b) \in V)$$

Взяв $b = 0$, мы получим, что для некоторого $\lambda \neq 0$

$$\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x) \subseteq V$$

То есть $\Phi(x) \subseteq \frac{1}{\lambda} V$. Это означает, что $\Phi(x)$ ограничено в Y, а поскольку для Y это равносильно полной ограниченности, мы получаем, что выполнено условие (c).

Наконец, если X бочечно, то $(a)\&(b)$ равносильно (c), по теореме Банаха-Штейнгауза. □

Замечание 5.2. Если пространство Y не обладает свойством Гейне-Бореля, то импликация $(a) \Rightarrow (c)$ не обязана сохраняться. Для примера можно взять бесконечномерное банахово пространство Y и единичный шар U в нем. Тогда семейство отображений $\varphi_y : \mathbb{C} \to Y$, действующих по формуле $\varphi_y(\lambda) = \lambda y$ будет равностепенно непрерывно, но не будет поточечно предкомпактно.

Следствие 5.3. *Если $\Phi \in \mathcal{S}(Y : X)$ и $M \in \mathcal{M}(Y)$, то*

$$\Phi^{-1}(M) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \varphi^{-1}(M) \in \mathcal{M}(X)$$

Доказательство. Возьмем $S \in \mathcal{S}(X)$ и обозначим $T = \Phi(S)$. По теореме 5.1 $T \in \mathcal{S}(Y)$, поэтому $\exists V \in \mathcal{U}(Y) \quad V \cap T \subseteq D$. Так как Φ равностепенно непрерывно на S, $\exists U \in \mathcal{U}(X) \quad \Phi(U \cap S) \subseteq V$ Таким образом, $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \quad \Phi(U \cap S) \subseteq V \cap T \subseteq D$ то есть $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \quad U \cap S \subseteq \Phi^{-1}(D)$ Это означает, что $\Phi^{-1}(D)$ массивно в нуле. □

Отсюда получаем

Следствие 5.4. *Если $\Phi \in \mathcal{S}(Y : X)$ и $D \in \mathcal{BD}(Y)$ (соответственно $M \in \mathcal{PM}(Y)$), то $\Phi^{-1}(D) \in \mathcal{BD}(X)$ (соответственно $\Phi^{-1}(M) \in \mathcal{PM}(X)$).*

Следствие 5.5. *Если X псевдонасыщено и $\Phi \in \mathcal{S}(Y : X)$, то Φ равностепенно непрерывно на X.*

(b) Сохранение полной ограниченности операциями $\star, \vee, \wedge, \nabla, \vartriangle$

Лемма 5.6. *Пусть X и Y – произвольные ЛВП. Если система морфизмов $\varPhi \subseteq Y : X$ вполне ограничена в $Y : X$, то система морфизмов $\varPhi^\star = \{\varphi^\star, \varphi \in \varPhi\} \subseteq X^\star : Y^\star$ вполне ограничена в $X^\star : Y^\star$:*

$$\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) \Rightarrow \varPhi^\star \in \mathcal{S}(X^\star : Y^\star)$$

Доказательство. По теореме 5.1 условие $\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X)$ означает, что $\varPhi$ равномерно предкомпактно и равностепенно непрерывно на множествах $S \in \mathcal{S}(X)$. Покажем, что $\varPhi^\star$ равностепенно непрерывно и равномерно предкомпактно на множествах $F \in \mathcal{S}(Y^\star)$.

1. Пусть $F \in \mathcal{S}(Y^\star)$, то есть (лемма 2.2) F равностепенно непрерывно на любом $T \in \mathcal{S}(Y)$. Тогда для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$ мы получаем, что $\varPhi$ равностепенно непрерывно на S, а F равностепенно непрерывно на $\varPhi(S) \in \mathcal{S}(Y)$, поэтому $\varPhi^\star(F) = F \circ \varPhi$ равностепенно непрерывно на S. Поскольку это верно для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$ мы получаем, что $\varPhi^\star(F) \in \mathcal{S}(X^\star)$.

2. Выберем базисную окрестность $U \in \mathcal{BU}(X^\star)$ т.е. $U = S^\circ, S \in \mathcal{S}(X)$. Тогда множество $(\varPhi^\star)^{-1}(U) = \{f \in Y^\star : \forall \varphi \in \varPhi \quad \varphi^\star(f) = f \circ \varphi \in U = S^\circ\} = \{f \in Y^\star : \forall \varphi \in \varPhi \quad |f \circ \varphi|_S \leqslant 1\} = \{f \in Y^\star : |f|_{\varPhi(S)} \leqslant 1\} = [\varPhi(S)]^\circ$ будет окрестностью нуля в $Y^\star$, потому что $\varPhi(S) \in \mathcal{S}(Y)$. Значит $\varPhi^\star$ равностепенно непрерывно на $Y^\star$ и тем более на любом $F \in \mathcal{S}(Y^\star)$. □

Лемма 5.7.

(a) Пусть X и Y – произвольные ЛВП. Отображение сопряжения $\varphi \in (Y : X) \mapsto \varphi^\star \in (X^\star : Y^\star)$ непрерывно на каждом вполне ограниченном множестве $\varPhi \subseteq Y : X$.

(b) Если, кроме того, Y псевдонасыщено, то отображение $\varphi \in (Y : X) \mapsto \varphi^\star \in (X^\star : Y^\star)$ непрерывно на всем пространстве $Y : X$.

Доказательство. a. Пусть $\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X)$, $\varphi_i \in \varPhi$, $\varphi \in \varPhi$ и

$$\varphi_i \overset{Y:X}{\longrightarrow} \varphi \quad (i \to \infty)$$

то есть

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \varphi_i(x) \underset{x \in S}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \varphi(x) \quad (i \to \infty)$$

(двойные стрелки означают равномерную сходимость). Тогда, поскольку по теореме 5.1 $\varPhi(S) \in \mathcal{S}(Y)$, всякое вполне ограниченное множество функционалов $G \subseteq Y^\star$ должно быть равностепенно непрерывно на $\varPhi(S)$, значит

$$\varphi_i^\star(g)(x) = g(\varphi_i(x)) \underset{x \in S, g \in G}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} g(\varphi(x)) = \varphi^\star(g)(x) \quad (i \to \infty)$$

Это верно для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$, поэтому

$$\varphi_i^\star(g) \underset{g \in G}{\overset{X^\star}{\rightrightarrows}} \varphi^\star(g) \quad (i \to \infty)$$

Это, в свою очередь, верно для всякого $G \in \mathcal{S}(Y^\star)$ и значит

$$\varphi_i^\star \overset{X^\star:Y^\star}{\longrightarrow} \varphi^\star \quad (i \to \infty)$$

b. Если вдобавок Y псевдонасыщено, то предположение что φ_i и φ принадлежат вполне ограниченному множеству $\varPhi \subset Y : X$ становится лишним: в этом случае всякое вполне ограниченное множество функционалов $G \subseteq Y^\star$ равностепенно непрерывно на всем пространстве Y (по лемме 2.2 и теореме 2.5), поэтому мы можем применить те же импликации без ссылок на $\varPhi$. □

Лемма 5.8. *Пусть X и Y – произвольные ЛВП. Если система морфизмов $\varPhi \subseteq Y : X$ вполне ограничена в $Y : X$, то под действием функтора $\wedge$ она превращается во вполне ограниченную систему морфизмов $\varPhi^\wedge$ в $Y^\wedge : X^\wedge$:*

$$\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) \Rightarrow \varPhi^\wedge \in \mathcal{S}(Y^\wedge : X^\wedge)$$

Доказательство. Зафиксируем $S \in \mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X^\wedge)$ и покажем, что система отображений $\varPhi^\wedge$ из $X^\wedge$ в $Y^\wedge$ вполне ограничена и равностепенно непрерывна на S. Первое очевидно, поскольку $\varPhi^\wedge(S) = \varPhi(S) \in \mathcal{S}(Y) = \mathcal{S}(Y^\wedge)$. Чтобы доказать второе, возьмем базисную окрестность нуля W в $Y^\wedge$, то есть $W \in \mathcal{BD}(Y)$. Поскольку $\varPhi(2S) \in \mathcal{S}(Y)$, из теоремы 0.7 следует, что найдется окрестность $V \in \mathcal{U}(Y)$ такая что $V \cap \varPhi(2S) \subseteq W$. С другой стороны, $\varPhi$ равностепенно непрерывно из S в Y, поэтому найдется окрестность нуля $U \in \mathcal{U}(X)$ такая что $\varPhi(U \cap 2S) \subseteq V$. Таким образом, $\varPhi(U \cap 2S) \subseteq V \cap \varPhi(2S) \subseteq W$, и поскольку это верно для любой базисной окрестности нуля $W \subseteq Y^\wedge$, мы получаем $\forall W \in \mathcal{BU}(Y^\wedge) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \subseteq \mathcal{U}(X^\wedge) \quad \varPhi(U \cap 2S) \subseteq W$. Это значит, что $\varPhi$ равностепенно непрерывно на S. □

Лемма 5.9. *Для любых псевдонасыщенных ЛВП X и Y всякое вполне ограниченное множество морфизмов $\varPhi \subseteq Y : X$ переходит под действием функтора $\vee$ во вполне ограниченное множество морфизмов $\varPhi^\vee \subseteq Y^\vee : X^\vee$:*

$$\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) \Rightarrow \varPhi^\vee \in \mathcal{S}(Y^\vee : X^\vee)$$

Доказательство. Имеем цепочку импликаций $\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) \Rightarrow$ (лемма 5.6) $\Rightarrow \varPhi^\star \in \mathcal{S}(X^\star : Y^\star) \Rightarrow$ (лемма 5.6) $\Rightarrow \varPhi^{\star\star} \in \mathcal{S}(Y^{\star\star} : X^{\star\star}) \Rightarrow$ (лемма 3.9) $\Rightarrow \varPhi^\vee \in \mathcal{S}(Y^\vee : X^\vee)$. □

Лемма 5.10. *Для любых ЛВП X и Y всякое вполне ограниченное множество морфизмов $\varPhi \subseteq Y : X$ переходит под действием функтора $\vartriangle$ во вполне ограниченное множество морфизмов $\varPhi^\vartriangle \subseteq Y^\vartriangle : X^\vartriangle$:*

$$\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) \Rightarrow \varPhi^\vartriangle \in \mathcal{S}(Y^\vartriangle : X^\vartriangle)$$

Доказательство. Это доказывается индукцией с помощью леммы 5.8. □

Лемма 5.11. *Для любых псевдонасыщенных ЛВП X и Y всякое вполне ограниченное множество морфизмов $\varPhi \subseteq Y : X$ переходит под действием функтора $\triangledown$ во вполне ограниченное множество морфизмов $\varPhi^\triangledown \subseteq Y^\triangledown : X^\triangledown$:*

$$\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) \Rightarrow \varPhi^\triangledown \in \mathcal{S}(Y^\triangledown : X^\triangledown)$$

Доказательство. Каждому морфизму $\varphi : X \to Y$ по лемме 1.12 соответствует система морфизмов $\{\varphi^\omega : X^\omega \to Y^\omega; \omega \in \mathbf{ORD}\}$, замыкающая диаграмму (1.22). Докажем по индукции, что все множества $\varPhi^\lambda = \{\varphi^\lambda, \varphi \in \varPhi\}$ вполне ограничены в пространствах $Y^\lambda : X^\lambda$.

0) Для $\lambda = 0$ получаем $\varPhi^0 = \varPhi \in \mathcal{S}(Y : X) = \mathcal{S}(Y^0 : X^0)$.

1) Пусть для некоторого λ доказано, что $\varPhi^\varkappa \in \mathcal{S}(Y^\varkappa : X^\varkappa)$ при любом $\varkappa < \lambda$, тогда рассматрмваются два случая:

– если λ – изолированный ординал, то есть для некоторого $\varkappa$ выполняется (1.16), то из (1.22) следует, что по лемме 5.8

$$\varPhi^\lambda = \varPhi^{\varkappa+1} = (\varPhi^\varkappa)^\vee \in \mathcal{S}((Y^\varkappa)^\vee : (X^\varkappa)^\vee) = \mathcal{S}(Y^{\varkappa+1} : X^{\varkappa+1}) = \mathcal{S}(Y^\lambda : X^\lambda)$$

– если же λ – предельный ординал, то в этом случае справедливы формулы (1.22), и чтобы доказать включение $\varPhi^\lambda \in \mathcal{S}(Y^\lambda : X^\lambda)$, нужно убедиться, что $\varPhi^\lambda$ поточечно предкомпактно на X^λ и равностепенно непрерывно на каждом $S \in \mathcal{S}(X^\lambda)$. Первое (то есть поточечная предкомпактность) следует из равенств (1.24) и условия $\varPhi^\lambda|_{X^\iota} = \varPhi^\iota \in \mathcal{S}(Y^\iota : X^\iota)$. Второе же следует из теоремы 3.13: поскольку все X^ι псевдонасыщены, равностепенная непрерывность $\varPhi^\iota$ на множествах $S \in \mathcal{S}(X^\iota)$ означает, что $\varPhi^\iota$ равностепенно непрерывно на всем $X^\iota (\iota < \lambda)$. Значит $\varPhi^\lambda = \varinjlim_{\iota<\lambda} \varPhi^\iota$ равностепенно непрерывно на $X^\lambda = \varinjlim_{\iota<\lambda} X^\iota$.

Итак, мы убедились, что $\forall \lambda \quad \varPhi^\lambda \in \mathcal{S}(Y^\lambda : X^\lambda)$, следовательно, $\varPhi^\triangledown = \varPhi^\mu \in \mathcal{S}(Y^\mu : X^\mu) = \mathcal{S}(Y^\triangledown : X^\triangledown)$, где μ – максимум длин инъективных рядов X и Y. □

(c) Дроби $\beta : \alpha$

Пусть $\alpha : E \to F$ и $\beta : G \to H$ – морфизмы локально-выпуклых пространств. Обозначим через $\beta : \alpha$ отображение пространств операторов

$$(\beta : \alpha) : (G : F) \to (H : E)$$

действующее по формуле

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\beta:\alpha)(\psi)=\beta\circ\psi\circ\alpha"'] & F \arrow[d, "\psi"] \\ H & G \arrow[l, "\beta"'] \end{tikzcd}. \tag{5.1}$$

Ясно, что $\beta : \alpha$ является морфизмом ЛВП. Оправданием такому обозначению служат следующие тождества

$$(\gamma\circ\beta):\alpha = (\gamma:1)\circ(\beta:\alpha) \qquad \gamma:(\beta\circ\alpha) = (1:\alpha)\circ(\gamma:\beta)$$

Перечислим некоторые важные примеры.

Пример 5.12. Сопряженное отображение, как легко понять, является частным случаем дроби:

$$\varphi^\star = 1_{\mathbb{C}} : \varphi$$

где $1_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – тождественное отображение.

Пример 5.13. Пусть X псевдонасыщено, а Y стереотипно. Поскольку отображение $\vee_Y : Y \to Y^\vee$ является изоморфизмом, определен морфизм

$$(\vee_Y^{-1} : \vee_X) : (Y^\vee : X^\vee) \to (Y : X)$$

Диаграмма (5.1) в этом случае принимает вид

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\vee_X"] \arrow[d, dashed, "(\vee_Y^{-1}:\vee_X)(\psi)"'] & X^\vee \arrow[d, "\psi"] \\ Y & Y^\vee \arrow[l, "\vee_Y^{-1}"'] \end{tikzcd}.$$

Заметим, что справедливо тождество

$$(\vee_Y^{-1} : \vee_X)(\varphi^\vee) = \varphi$$

из которого следует, что *морфизм* $(\vee_Y^{-1} : \vee_X)$ *является точным наложением.* Действительно, если $\Phi \in \mathcal{S}(Y : X)$, то положив $\Psi = \Phi^\vee$ мы получим, что $\Psi \in \mathcal{S}(Y^\star : X^\star)$ (лемма 5.9) и при этом

$$(\vee_Y^{-1} : \vee_X)(\Psi) = (\vee_Y^{-1} : \vee_X)(\Phi^\vee) = \Phi$$

Остается проверить, что отображение $(\vee_Y^{-1} : \vee_X) : \Phi^\vee \to \Phi$ является гомеоморфизмом. Это следует из лемм 5.7 и 3.9: дважды применяя 5.7 а затем 3.9 мы получим, что должно быть непрерывно отображение $(\vee_Y^{-1} : \vee_X)^{-1} : \Phi \to \Phi^\star \to \Phi^{\star\star} = \Phi^\vee$.

Пример 5.14. Пусть X стереотипно, а Y псевдополно. Поскольку отображние $\wedge_X : X^\wedge \to X$ является изоморфизмом, определен морфизм

$$(\wedge_Y : \wedge_X^{-1}) : (Y^\wedge : X^\wedge) \to (Y : X)$$

Диаграмма (5.1) при этом имеет вид

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\wedge_X^{-1}"] \arrow[d, dashed, "(\wedge_Y:\wedge_X^{-1})(\psi)"'] & X^\wedge \arrow[d, "\psi"] \\ Y & Y^\wedge \arrow[l, "\wedge_Y"'] \end{tikzcd}.$$

а из лемм 5.8, 5.7 и 3.8 и тождества

$$(\wedge_Y : \wedge_X^{-1})(\varphi^\wedge) = \varphi \quad \varphi \in Y : X \tag{5.2}$$

следует, что *морфизм* $(\wedge_Y : \wedge_X^{-1})$ *является точным наложением.*

Пример 5.15. Пусть X псевдонасыщено, а Y стереотипно. Отображение $\nabla_Y : Y \to Y^\nabla$ является изоморфизмом, поэтому определен морфизм

$$(\nabla_Y^{-1} : \nabla_X) : (Y^\nabla : X^\nabla) \to (Y : X)$$

Диаграмма (5.1) принимает вид

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\nabla"] \arrow[d, dashed, "(\nabla_Y^{-1}:\nabla_X)(\psi)"'] & X^\nabla \arrow[d, "\psi"] \\ Y & Y^\nabla \arrow[l, "\nabla_Y^{-1}"'] \end{tikzcd} .$$

а из леммы 5.11, примера 5.13 и тождества

$$(\nabla_Y^{-1} : \nabla_X)(\varphi^\nabla) = \varphi, \quad \varphi \in Y : X$$

следует, что *морфизм* $\nabla_Y^{-1} : \nabla_X$ *является точным наложением.*

Пример 5.16. Пусть X стереотипно, а Y псевдополно. Отображение $\vartriangle_X : X^\vartriangle \to X$ является изоморфизмом, поэтому определен морфизм

$$(\vartriangle_Y : \vartriangle_X^{-1}) : (Y^\vartriangle : X^\vartriangle) \to (Y : X)$$

Диаграмма (5.1) при этом имеет вид

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(\vartriangle_Y:\vartriangle_X^{-1})(\psi)"'] & X^\vartriangle \arrow[d, "\psi"] \\ Y & Y^\vartriangle \arrow[l] \end{tikzcd} .$$

а из леммы 5.10, примера 5.14 и тождества

$$(\vartriangle_Y : \vartriangle_X^{-1})(\psi^\vartriangle) = \psi, \qquad \psi \in Y : X \tag{5.3}$$

следует, что *морфизм* $\vartriangle_Y : \vartriangle_X^{-1}$ *является точным наложением.*

(d) Дроби $B : A$

Пусть X и Y – два ЛВП и $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ – произвольные множества. Обозначим через $B : A$ систему всех морфизмов $\varphi : X \to Y$, переводящих A в B:

$$B : A = \{\varphi \in X : Y | \quad \varphi(A) \subseteq B\}$$

Оправданием такому обозначению служат тождества

$$(\lambda B) : A = \lambda(B : A) \qquad B : (\lambda A) = \frac{1}{\lambda}(B : A) \tag{5.4}$$

В следующем пункте нам понадобится

Лемма 5.17. *Пусть X стереотипно, а Y псевдополно. Тогда*

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall D \in \mathcal{BD}(Y) \quad D : S \in \mathcal{BD}(Y : X)$$

Доказательство. Для доказательства нужно проверить лишь емкость множества $D : S$. Пусть $\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X)$. По лемме 5.10, $\varPhi^\vartriangle \in \mathcal{S}(Y^\vartriangle : X^\vartriangle)$. С другой стороны, $D \in \mathcal{BU}(Y^\vartriangle)$, поэтому $D : S \in \mathcal{BU}(Y^\vartriangle : X^\vartriangle)$. Значит, существует конечное множество $A \subseteq Y^\vartriangle : X^\vartriangle$ такое, что

$$\varPhi^\vartriangle \subseteq (D : S) + A$$

Заметим теперь, что, поскольку $Y : X$ и $Y^\vartriangle : X^\vartriangle$ совпадают как множества ($\vartriangle_Y : \vartriangle_X^{-1}$ является биекцией в силу примера 5.16), A можно считать подмножеством в $Y : X$. Значит

$$\varPhi \subseteq (D : S) + A$$

Поскольку это верно для всякого $\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X)$, мы получаем, что $D : S \in \mathcal{D}(Y : X)$. $\square$

(e) Отображения $1^{\wedge}_{Z:Y} : \wedge_X$ и $1^{\vartriangle}_{Z:Y} :\vartriangle_X$

Лемма 5.18. *Пусть X и Z – псевдополные ЛВП, а Y – стереотипное. Тогда для всякого морфизма ЛВП*

$$X \xrightarrow{I} (Z : Y)$$

найдется единственный морфизм ЛВП

$$X^{\wedge} \xrightarrow{\widetilde{I}} (Z^{\wedge} : Y^{\wedge}),$$

обозначаемый

$$\widetilde{I} = (1^{\wedge}_{Z:Y} : \wedge_X)(I),$$

замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X & X^{\wedge} \arrow[l, "\wedge_X"'] \arrow[d, dashed, "\widetilde{I}"] \\ Z : Y \arrow[from=u, "I"'] & Z^{\wedge} : Y^{\wedge} \arrow[l, "\wedge_Z : \wedge_Y^{-1}"'] \end{tikzcd} .$$

Доказательство. Заметим сразу, что единственность $\widetilde{I}$ следует из того, что $\wedge_X$ и $\wedge_Z : \wedge_Y^{-1}$ являются биекциями. Рассмотрим отображение

$$1^{\wedge}_{Z:Y} : (Z : Y) \to (Z^{\wedge} : Y^{\wedge}), \qquad 1^{\wedge}_{Z:Y}(\varphi) = \varphi^{\wedge}, \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[d, "\varphi"'] & Y^{\wedge} \arrow[l, "\wedge_Y"'] \arrow[d, dashed, "\varphi^{\wedge}"] \\ Z & Z^{\wedge} \arrow[l, "\wedge_Z"'] \end{tikzcd}$$

(оно не обязано быть непрерывным). Легко видеть, что $1^{\wedge}_{Z:Y}$ является обратным отображением к $\wedge_Z : \wedge_Y^{-1}$ (см. тождество (5.2)). Поэтому для доказательства нашего утверждения достаточно положить

$$\widetilde{I} = 1^{\wedge}_{Z:Y} \circ I \circ \wedge_X, \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[d, "I"'] & X^{\wedge} \arrow[l, "\wedge_X"'] \arrow[d, dashed, "\widetilde{I}"] \\ Z : Y \arrow[r, "1^{\wedge}_{Z:Y}"] & Z^{\wedge} : Y^{\wedge} \end{tikzcd} ,$$

и убедиться, что $\widetilde{I}$ – непрерывное отображение.

Это делается с помощью леммы 5.17. Выберем в $Z^{\wedge} : Y^{\wedge}$ базисную окрестность нуля, то есть множество вида $U = D : S$, где $D \in \mathcal{BD}(Z), S \in \mathcal{S}(Y)$. По лемме 5.17, $U \in \mathcal{BD}(Z : Y)$, значит $I^{-1}(U) \in \mathcal{BD}(X) \subseteq \mathcal{BU}(X^{\wedge})$. То есть $\widetilde{I}^{-1}(U) = \wedge_X^{-1}(I^{-1}((1^{\wedge}_{Z:Y})^{-1}(U)) \in \mathcal{BU}(X^{\wedge})$. Таким образом, $\widetilde{I}$ действительно непрерывно. $\square$

Лемма 5.19 (основная)**.** *Пусть X и Z – псевдополные ЛВП, а Y – стереотипное. Тогда для всякого морфизма ЛВП*

$$X \xrightarrow{I} Z : Y$$

найдется единственный морфизм ЛВП

$$X^{\vartriangle} \xrightarrow{\widetilde{I}} Z^{\vartriangle} : Y^{\vartriangle},$$

обозначаемый

$$\widetilde{I} = (1^{\vartriangle}_{Z:Y} :\vartriangle_X)(I),$$

замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "I"'] & X^{\vartriangle} \arrow[l, "\vartriangle_X"'] \arrow[d, dashed, "\widetilde{I}=(1^{\vartriangle}_{Z:Y}:\vartriangle_X)(I)"] \\ Z : Y & Z^{\vartriangle} : Y^{\vartriangle} \arrow[l, "\vartriangle_Z:\vartriangle_Y^{-1}"'] \end{tikzcd} .$$

Доказательство. Поскольку $\triangle_X$ и $\triangle_Z{:}\triangle_Y^{-1}{=}\triangle_Z{:}\ 1_Y$ являются биекциями, ясно, что $\widetilde{I}$ единственно. Рассмотрим отображение

$$1^{\triangle}_{Z:Y} : (Z : Y) \to (Z^{\triangle} : Y^{\triangle}),\qquad 1^{\triangle}_{Z:Y}(\varphi) = \varphi^{\triangle},$$

$$\begin{tikzcd} Y & Y^{\triangle} \arrow[l, "\triangle_Y"'] \arrow[d, dashed, "\varphi^{\triangle}"] \\ Z \arrow[from=u, "\varphi"'] & Z^{\triangle} \arrow[l, "\triangle_Z"'] \end{tikzcd}$$

(не обязательно непрерывное). Положим

$$\widetilde{I} = 1^{\triangle}_{Z:Y} \circ I \circ \triangle_X,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "I"'] & X^{\triangle} \arrow[l, "\triangle_X"'] \arrow[d, dashed, "\widetilde{I}"] \\ Z : Y \arrow[r, "1^{\triangle}_{Z:Y}"] & Z^{\triangle} : Y^{\triangle} \end{tikzcd}$$

и покажем, что отображение $\widetilde{I}$ непрерывно.

Рассмотрим проективные ряды для Y и Z:

$$Y = Y_0 = Y_1 = ... = Y_\lambda = ... = Y_\mu = Y^{\triangle}$$

$$Z = Z_0 \longleftarrow Z_1 \longleftarrow ... \longleftarrow Z_\lambda \longleftarrow ... \longleftarrow Z_\mu = Z^{\triangle}$$

Им соответствует трансфинитная последовательность

$$Z : Y = Z_0 : Y_0 \longleftarrow Z_1 : Y_1 \longleftarrow ... \longleftarrow Z_\lambda : Y_\lambda \longleftarrow ... \longleftarrow Z_\mu : Y_\mu = Z^{\triangle} : Y^{\triangle}$$

Подрисуем к ней проективный ряд пространства X и покажем, что существует последовательность морфизмов I_λ, замыкающая диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "I"'] & X_0 \arrow[d, "I_0"] & X_1 \arrow[l] \arrow[d, "I_1"] & \cdots \arrow[l] & X_\lambda \arrow[l] \arrow[d, "I_\lambda"] & \cdots \arrow[l] & X_\mu \arrow[l] \arrow[r, equal] \arrow[d, "I_\mu"] & X^{\triangle} \arrow[d, "\widetilde{I}"] \\ Z : Y \arrow[r, equal] & Z_0 : Y_0 & Z_1 : Y_1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & Z_\lambda : Y_\lambda \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & Z_\mu : Z_\mu \arrow[l] \arrow[r, equal] & Z^{\triangle} : Y^{\triangle} \end{tikzcd}$$

(длина проективного ряда у X и Z может быть неодинаковой, но, увеличив, где это необходимо, индекс μ, мы получим, что $X_\mu = X^{\triangle}$ и $Z_\mu = Z^{\triangle}$).

Последовательность I_λ строится по индукции.

0) Вначале полагаем $I_0 = I$.

1) Пусть для некоторого ординала λ все морфизмы $\{I_\varkappa, \varkappa < \lambda\}$ уже построены. Тогда рассматриваются два случая:

– если λ – изолированный ординал, то есть выполняется (1.17), то в силу (1.31), $X_\lambda = (X_\varkappa)^\wedge$, $Z_\lambda = (Z_\varkappa)^\wedge$ поэтому можно положить

$$I_\lambda = (1^{\wedge}_{Z_\varkappa : Y_\varkappa} : \wedge_X)(I_\varkappa)$$

и по лемме 5.18 это отображение будет непрерывно.

– если же λ – предельный ординал, то

$$X_\lambda = \varprojlim_{\iota<\lambda} X_\iota, \quad Z_\lambda = \varprojlim_{\iota<\lambda} Z_\iota, \quad Z_\lambda : Y_\lambda = \varprojlim_{\iota<\lambda} Z_\iota : Y_\iota,$$

и, положив

$$I_\lambda = \varprojlim_{\iota<\lambda} I_\iota,$$

мы получим, что отображение I_λ будет непрерывно в силу выбора топологий в X_λ и Z_λ.

□

(f) Пространство $Z : (X, Y)$

Пусть X, Y, Z – произвольные ЛВП. Билинейную форму $\beta : X \times Y \to Z$ мы называем *непрерывной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\forall W \in \mathcal{U}(Z) \quad \forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists V \in \mathcal{U}(Y) \quad \beta(S, V) \subseteq W$$

$$\forall W \in \mathcal{U}(Z) \quad \forall T \in \mathcal{S}(Y) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \quad \beta(U, T) \subseteq W$$

Символом $Z : (X, Y)$ обозначается пространство всех непрерывных билинейных форм $\beta : X \times Y \to Z$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в $X \times Y$.

Пример 5.20. Если X – стереотипное пространство, то билинейная форма $(x, f) \in X \times X^\star \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ непрерывна.

Теорема 5.21. *Пусть X, Y, Z – ЛВП. Тогда*

(a) если Y псевдонасыщено, то формула

$$\beta(x, y) = \varphi(x)(y), \quad \beta \in Z : (X, Y), \varphi \in (Z : Y) : X$$

определяет изоморфизм

$$Z : (X, Y) = (Z : Y) : X$$

(b) если X псевдонасыщено, то формула

$$\beta(x, y) = \varphi(y)(x), \quad \beta \in Z : (X, Y), \varphi \in (Z : X) : Y$$

определяет изоморфизм

$$Z : (X, Y) = (Z : X) : Y$$

Доказательство мы разобьем на две леммы.

Лемма 5.22. *Для любых ЛВП X, Y, Z формула*

$$\Lambda\beta(x)(y) = \beta(x, y)$$

определяет линейное непрерывное отображение

$$Z : (X, Y) \xrightarrow{\Lambda} (Z : Y) : X$$

Доказательство. Если зафиксировать $x \in X$, то отображение $\Lambda\beta(x) : Y \to Z$ будет непрерывно в силу непрерывности β: $\forall W \in \mathcal{U}(Z) \quad \exists V \in \mathcal{U}(Y) \quad \Lambda\beta(x)(V) = \beta(x, V) \subseteq W$. Таким образом, определено отображение

$$X \xrightarrow{\Lambda\beta} Z : Y$$

Его непрерывность также следует из непрерывности β: если $V \in \mathcal{U}(Z : Y)$ – базисная окрестность нуля, то есть $V = W : T$, где $W \in U(Z), T \in S(Y)$, то, воспользовавшись непрерывностью β, можно выбрать $U \in \mathcal{U}(X)$ такое, что $\Lambda\beta(U)(T) = \beta(U, T) \subseteq W$, то есть $\Lambda\beta(U) \subseteq W : T = V$. Мы получили, что определено отображение $Z : (X, Y) \to (Z : Y) : X$. Докажем его непрерывность. Пусть

$$\beta_i \overset{Z:(X,Y)}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$$

Тогда $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall T \in \mathcal{S}(Y)$

$$\Lambda\beta_i(x)(y) = \beta_i(x, y) \underset{x \in S, y \in T}{\overset{Z}{\rightrightarrows}} 0$$

то есть

$$\Lambda\beta_i(x) \underset{x \in S}{\overset{Z:Y}{\rightrightarrows}} 0$$

и значит

$$\Lambda\beta_i \overset{(Z:Y):X}{\rightrightarrows} 0$$

□

Лемма 5.23. *Пусть X,Y,Z – ЛВП, причем Y псевдонасыщено. Тогда формула*

$$\Xi\varphi(x,y) = \varphi(x)(y)$$

определяет линейное непрерывное отображение

$$(Z:Y):X \xrightarrow{\Xi} Z:(X,Y)$$

Доказательство. Убедимся сначала, что форма $\Xi\varphi : X \times Y \to Z$ непрерывна. Действительно,

– если $S \in \mathcal{S}(X)$, то $\varphi(S) \in \mathcal{S}(Z:Y)$, то есть (следствие 5.5) $\varphi(S)$ – равностепенно непрерывное множество операторов из Y в Z, значит

$$\forall W \in \mathcal{U}(Z) \quad \exists V \in \mathcal{U}(Y) \quad \Xi\varphi(S,V) = \varphi(S)(V) \subseteq W$$

– если же $W \in \mathcal{U}Z)$ и $T \in \mathcal{S}(Y)$, то $W:T \in \mathcal{U}(Z:Y)$ поэтому из непрерывности $\varphi : X \to Z:Y$ следует, что существует $U \in \mathcal{U}(X)$ такое, что $\varphi(U) \subseteq W:T$, то есть

$$\Xi\varphi(U,T) = \varphi(U)(T) \subseteq W$$

Докажем непрерывность $\Xi : \{(Z:Y):X\} \to \{Z:(X,Y)\}$. Если

$$\varphi_i \overset{(Z:Y):X}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$$

то есть

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \varphi_i(x) \underset{x\in S}{\overset{Z:Y}{\rightrightarrows}} 0$$

то

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall T \in \mathcal{S}(Y) \quad \Xi\varphi_i(x,y) = \varphi_i(x)(y) \underset{x\in S, y\in T}{\overset{Z}{\rightrightarrows}} 0$$

то есть

$$\Xi\varphi_i \overset{Z:(X,Y)}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$$

Лемма 5.23 и теорема 5.21 доказаны. □

Теорема 5.24. *Пусть X,Y,Z – произвольные ЛВП. Тогда для всякой непрерывной билинейной формы $\beta : X\times Y \to Z$ найдется единственная непрерывная билинейная форма $\beta^\vartriangle : X^\vartriangle \times Y^\vartriangle \to Z^\vartriangle$ замыкающая диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} X\times Y & \xleftarrow{\vartriangle_X \times \vartriangle_Y} & X^\vartriangle \times Y^\vartriangle \\ {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta^\vartriangle} \\ Z & \xleftarrow[\quad]{\vartriangle_Z} & Z^\vartriangle \end{array} .$$

Доказательство. Пусть $\varLambda$ – отображение, определенное в лемме 5.22, и $S \in \mathcal{S}(X)$. Поскольку, по лемме 5.22, $\varLambda\beta : X \to (Z:Y)$ – непрерывное отображение, множество отображений $\varPhi = \varLambda\beta(S) \subseteq Z:Y$ вполне ограничено в $Z:Y$, то есть $\varPhi \in \mathcal{S}(Z:Y)$. Значит (лемма 5.10) $\varPhi^\vartriangle \in \mathcal{S}(Z^\vartriangle : Y^\vartriangle)$, то есть (следствие 5.5) $\varPhi^\vartriangle$ – равностепенно непрерывное множество отображений из $Y^\vartriangle$ в $Z^\vartriangle$. Таким образом,

$$\forall W \in \mathcal{U}(Z^\vartriangle) \quad \exists V \in \mathcal{U}(Y^\vartriangle) \quad \beta(S,V) = \varPhi(V) \subseteq W$$

Аналогично доказывается. что

$$\forall T \in \mathcal{S}(Y) \quad \forall W \in \mathcal{U}(Z^\vartriangle) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X^\vartriangle) \quad \beta(U,T) \subseteq W$$

□

Теорема 5.25. *Пусть X,Y,Z – локально выпуклые пространства, причем X и Y насыщены, и пусть $\beta : X\times Y \to Z$ – билинейная форма, непрерывная на произведениях $S\times T$ вполне ограниченных множеств $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$. Тогда $\beta : X\times Y \to Z$ непрерывна.*

Доказательство. Берем вполне ограниченное множество $S \subseteq X$ и рассматриваем линейные отображения

$$\varphi_x : Y \to Z \quad \Big| \quad \varphi_x(y) = \beta(x, y)$$

Для всякого вполне ограниченого множества $T \subseteq Y$ отображение $\beta|_{S\times T} : S \times T \to Z$ непрерывно, поэтому семейство отображений $\{\varphi_x; x \in S\}$ равностепенно непрерывно на T. Отсюда по теореме 2.6 следует, что $\{\varphi_x; x \in S\}$ равностепенно непрерывно на Y (так как насыщено Y). Таким образом

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall y_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} y \quad \beta(x, y_i) = \varphi_x(y_i) \underset{\substack{i\to\infty \\ x\in S}}{\rightrightarrows} \varphi_x(y) = \beta(x, y)$$

Аналогично доказывается, что

$$\forall T \in \mathcal{S}(Y) \quad \forall x_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} x \quad \beta(x_i, y) \underset{\substack{i\to\infty \\ y\in T}}{\rightrightarrows} \beta(x, y)$$

□

§ 6 Функторы $Y \oslash X$ и $Z \oslash (X, Y)$

(a) Внутреннее пространство линейных операторов $Y \oslash X$

Пусть X и Y – два ЛВП. Символом $Y \oslash X$ мы обозначаем псевдонасыщение пространства $Y : X$ линейных непрерывных операторов $\varphi : X \to Y$:

$$Y \oslash X = (Y : X)^{\vartriangle}$$

Мы называем его *внутренним пространством операторов*, имея в виду, что $Y \oslash X$ является внутренним Hom-функтором в категории $\mathfrak{Ste}$ (теорема 7.7). Это пространство, по-прежнему, состоит из линейных непрерывных операторов $\varphi : X \to Y$, но его топология представляет собой некоторое усиление (в смысле теоремы 1.17) топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X.

Если потребовать, чтобы X было псевдонасыщено, а Y – псевдополно, то в силу следствия 5.5 окажется, что пространство $Y : X$ является псевдополным. Поскольку псевдополнота сохраняется при псевдонасыщении (таблица инвариантов § 3(e)), это в свою очередь, будет означать, что $Y \oslash X$ также псевдополно, и значит, стереотипно. В частности, справедлива

Теорема 6.1. *Если X и Y – стереотипные пространства, то $Y \oslash X$ – тоже стереотипное пространство.*

Из леммы 5.7(b) вытекает

Теорема 6.2. *Отображение сопряжения $\varphi \mapsto \varphi^\star$ устанавливает изоморфизм стереотипных пространств*

$$X^\star \oslash Y^\star = Y \oslash X$$

Если $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, то символом $B \oslash A$ мы обозначаем подмножество в $Y \oslash X$, состоящее из всех морфизмов $\varphi : X \to Y$ переводящих A в B:

$$B \oslash A = \{\varphi \in Y \oslash X : \varphi(A) \subseteq B\}$$

Понятно, что $B \oslash A$ совпадает с $B : A$, но мы используем значок $\oslash$, чтобы подчеркнуть, что речь идет о подмножестве в $Y \oslash X$. Тождества (5.4) при таких обозначениях принимают вид

$$(\lambda B) \oslash A = \lambda(B \oslash A) \qquad B \oslash (\lambda A) = \frac{1}{\lambda}(B \oslash A)$$

В следующих примерах пространство $Y : X$ автоматически насыщено, поэтому $Y \oslash X = Y : X$.

Пример 6.3. *Если X – пространство Смит, а Y – пространство Банаха, то $Y \oslash X = Y : X$ – пространство Банаха.* Шаром в $Y \oslash X$ будет множество $V \oslash S$ где V – шар в Y, а S – универсальный компакт в X.

Пример 6.4. *Если X – пространство Банаха, а Y – пространство Смит, то $Y \oslash X = Y : X$ – пространство Смит.* Универсальным компактом в $Y \oslash X$ будет множество $T \oslash U$ где T – универсальный компакт в Y, а U – шар в X. Это можно проверить, убедившись, что $T \oslash U$ – компактная бочка в $Y \oslash X$ Действительно, всякий морфизм $\varphi : X \to Y$ должен переводить ограниченное множество U в ограниченное множество $\varphi(U)$. Поскольку Y обладает свойством Гейне-Бореля (теорема 4.12), $\varphi(U)$ должно быть вполне ограничено. Значит, $\varphi(U)$ должно поглощаться универсальным компактом T:

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \varphi(U) \subseteq \lambda T$$

То есть $\varphi \in \lambda(T \oslash U)$ Мы показали, что $T \oslash U$ – поглощающее множество в $Y \oslash X$. Из теоремы 5.1 следует также, что $T \oslash U$ вполне ограничено в $Y \oslash X$, а поскольку $T \oslash U$ очевидно, замкнуто в $Y \oslash X$, мы получаем, что $T \oslash U$ – компакт. Таким образом, пространство $Y \oslash X$ обладает компактной бочкой. Это значит, что $Y \oslash X$ является пространством Смит. Ниже в § 7(f) мы увидим, что $Y \oslash X$ и $Y : X$ изоморфны (и поэтому $Y : X$ тоже является пространством Смит).

Пример 6.5. *Если X – пространство Браунера, а Y – пространство Фреше, то $Y \oslash X = Y : X$ – пространство Фреше.* Счетной локальной базой в $Y \oslash X$ будут множества $V_n \oslash S_n$, где V_n – счетная локальная база в Y, а S_n – исчерпывающая последовательность компактов в X.

Пример 6.6. *Если X – пространство Фреше, а Y – пространство Браунера, то $Y \oslash X = Y : X$ – пространство Браунера.* Фундаментальной последовательностью компактов в $Y \oslash X$ будут множества $T_n \oslash U_n$, где T_n – фундаментальная последовательность компактов в Y, а U_n – счетная локальная база в X. Докажем это. Ясно, что множества $T_n \oslash U_n$ равностепенно непрерывны на X, и поскольку Y обладает свойством Гейне-Бореля (теорема 4.12), это значит (теорема 5.1), что $T_n \oslash U_n$ вполне ограничены в $Y \oslash X$. Кроме того, $T_n \oslash U_n$ замкнуты и значит являются компактами. Покажем, что любой компакт $\Psi \subseteq Y \oslash X$ содержится в некотором компакте $T_n \oslash U_n$. Если бы это было не так, то для любого $n \in \mathbb{N}$ нашлись бы $x_n \in U_n$ и $\psi_n \in \Psi$ такие, что

$$\psi_n(x_n) \notin T_n$$

Это означало бы что

- с одной стороны, $x_n \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$,
- а с другой, $\psi_n(x_n) \not\longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$, так как иначе последовательность $\psi_n(x_n)$ была бы вполне ограничена и значит содержалась бы в некотором T_n.

Это противоречит компактности Ψ: по теореме 5.1, Ψ должно быть равностепенно непрерывно на X, и поэтому

$$\psi_n(x_n) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Мы доказали, что $Y \oslash X$ является пространством Браунера. Ниже в § 7(f) мы увидим, что $Y \oslash X$ изоморфно $Y : X$ (и поэтому $Y : X$ тоже является пространством Браунера).

(b) Пространство билинейных форм $Z \oslash (X, Y)$

Пусть X, Y, Z – ЛВП. Символом $Z \oslash (X, Y)$ мы обозначаем псевдонасыщение пространства $Z : (X, Y)$ непрерывных билинейных форм $\beta : X \times Y \to Z$:

$$Z \oslash (X, Y) = \{Z : (X, Y)\}^{\vartriangle}$$

Если потребовать, чтобы X и Y были псевдонасыщены, а Z – псевдополно, то из следствия 5.5 и теоремы 5.21 будет следовать, что пространство $Z : (X, Y)$ является псевдополным. Поскольку псевдополнота сохраняется при псевдонасыщении (таблица инвариантов § 3(e)), это в свою очередь, будет означать, что $Z \oslash (X, Y)$ также псевдополно, и значит, стереотипно. В частности, справедлива

Теорема 6.7. *Если X, Y, Z – стереотипные пространства, то $Z \oslash (X, Y)$ – тоже стереотипное пространство.*

Пусть $A \subseteq X, B \subseteq Y, C \subseteq Z$. Условимся символом $C \oslash (A, B)$ обозначать множество всех форм $\beta \in Z \oslash (X, Y)$, переводящих $A \times B$ в C:

$$\beta \in C \oslash (A, B) \Leftrightarrow \beta \in Z \oslash (X, Y) \quad \& \quad \beta(A, B) \subseteq C$$

В следующих примерах пространство $Z : (X, Y)$ автоматически насыщено, поэтому $Z \oslash (X, Y) = Z : (X, Y)$.

Пример 6.8. *Если X и Y – пространства Смит, а Z – пространство Банаха, то $Z \oslash (X,Y) = Z : (X,Y)$ – пространство Банаха.* Шаром в $Z \oslash (X,Y)$ будет множество $W \oslash (S,T)$, где W – шар в Z, а S и T – универсальные компакты в X и Y.

Пример 6.9. *Если X и Y – пространства Банаха, а Z – пространство Смит, то $Z \oslash (X,Y) = Z : (X,Y)$ – пространство Смит.* Универсальным компактом в $Z \oslash (X,Y)$ будет множество $K \oslash (U,V)$, где K – универсальный компакт в Z, а U и V – шары в X и Y. (Равенство $Z \oslash (X,Y) = Z : (X,Y)$ следует из примера 6.4 и теоремы 5.21.)

Пример 6.10. *Если X и Y – пространства Браунера, а Z – пространство Фреше, то $Z \oslash (X,Y) = Z : (X,Y)$ – пространство Фреше.* Счетной локальной базой в $Z \oslash (X,Y)$ будут множества $W_n \oslash (S_n, T_n)$, где W_n – счетная локальная база в Z, а S_n и T_n – фундаментальные последовательности компактов в X и Y.

Пример 6.11. *Если X и Y – пространства Фреше, а Z – пространство Браунера, то $Z \oslash (X,Y) = Z : (X,Y)$ – пространство Браунера.* Фундаментальной последовательностью компактов в $Z \oslash (X,Y)$ будут множества $K_n \oslash (U_n, V_n)$ где K_n – фундаментальная последовательность компактов в Z, а U_n и V_n – счетные локальные базы в X и Y. (Равенство $Z \oslash (X,Y) = Z : (X,Y)$ следует из примера 6.6 и теоремы 5.21.)

(c) Связь между пространствами операторов и форм

Из теоремы 5.21 следует

Теорема 6.12. *Если X, Y, Z – стереотипные пространства, то формула*

$$\beta(x,y) = \varphi(y)(x) \tag{6.1}$$

определяет изоморфизм стереотипных пространств

$$Z \oslash (X,Y) = (Z \oslash X) \oslash Y \tag{6.2}$$

Замечание 6.13. В частном случае, когда $Z = \mathbb{C}$ мы получаем

$$\mathbb{C} \oslash (X,Y) = X^\star \oslash Y \tag{6.3}$$

$$Y \oslash X = \mathbb{C} \oslash (Y^\star, X) \tag{6.4}$$

(d) Композиция $\beta \circ \alpha$ и дробь $\beta \oslash \alpha$

Композицию морфизмов $\alpha : X \to Y$ и $\beta : Y \to Z$ мы, как обычно, обозначаем символом $\beta \circ \alpha$.

Теорема 6.14. *Для любых стереотипных пространств X, Y, Z отображение композиции*

$$(\beta, \alpha) \in (Z \oslash Y) \times (Y \oslash X) \mapsto \beta \circ \alpha \in (Z \oslash X)$$

является непрерывной билинейной формой.

Доказательство. В силу теоремы 5.24, достаточно доказать непрерывность формы

$$(\beta, \alpha) \in (Z : Y) \times (Y : X) \mapsto \beta \circ \alpha \in (Z : X)$$

Пусть $\varphi_i \overset{Y:X}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$ и $\Psi \in \mathcal{S}(Z : Y)$. Тогда для всякого компакта $S \subseteq X$

$$\varphi_i(x) \underset{x \in S}{\overset{Y}{\longrightarrow}} 0 \quad (i \to \infty)$$

и, поскольку Ψ равностепенно непрерывно на Y (следствие 5.5),

$$(\psi \circ \varphi_i)(x) \underset{x \in S, \psi \in \Psi}{\overset{Z}{\longrightarrow}} 0 \quad (i \to \infty)$$

Значит

$$\psi \circ \varphi_i \underset{\psi \in \Psi}{\overset{Z:X}{\longrightarrow}} 0 \quad (i \to \infty)$$

Наоборот, если $\varPhi \in \mathcal{S}(Y : X)$ и $\psi_i \overset{Z:Y}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$, то для всякого компакта $S \subseteq X \quad \varPsi(S)$ будет вполне ограничено в Y (теорема 5.1) и поэтому

$$(\psi_i \circ \varphi)(x) \underset{x \in S, \varphi \in \varPhi}{\overset{Z}{\longrightarrow}} 0 \quad (i \to \infty)$$

Значит

$$\psi_i \circ \varphi \underset{\varphi \in \varPhi}{\overset{Z:X}{\longrightarrow}} 0 \quad (i \to \infty)$$

□

Определение. Пусть $\alpha : E \to F$ и $\beta : G \to H$ – морфизмы стереотипных пространств. Обозначим через $\beta \oslash \alpha$ отображение

$$(\beta \oslash \alpha) : (G \oslash F) \to (H \oslash E)$$

действующее по формуле

$$(\beta \oslash \alpha)(\psi) = \beta \circ \psi \circ \alpha$$

Формально $\beta \oslash \alpha$ не обязано совпадать с отображением $\beta : \alpha$ определенным формулой (5.1), поскольку $G \oslash F$ и $H \oslash E$ не обязательно совпадают с $G : F$ и $H : E$. Связь между $\beta \oslash \alpha$ и $\beta : \alpha$ очевидна:

$$\beta \oslash \alpha = (\beta : \alpha)^{\vartriangle} \tag{6.5}$$

Отсюда следует, что $\beta \oslash \alpha$ всегда является морфизмом (стереотипных пространств). Значит определена билинейная форма $(\beta, \alpha) \in (H \oslash G) \times (F \oslash E) \mapsto \beta \oslash \alpha \in (H \oslash E) \oslash (G \oslash F)$.

Теорема 6.15. *Для любых стереотипных пространств X, Y, Z билинейная форма*

$$(\beta, \alpha) \in (H \oslash G) \times (F \oslash E) \mapsto \beta \oslash \alpha \in (H \oslash E) \oslash (G \oslash F) \tag{6.6}$$

непрерывна.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{S}(F \oslash E)$ и $\beta_i \overset{H \oslash G}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$. Тогда для всякого $\varPhi \in \mathcal{S}(G \oslash F)$ получим $\varPhi \circ A \in \mathcal{S}(G \oslash E)$, поэтому в силу теоремы 6.14

$$(\beta_i \oslash \alpha)(\varphi) = \beta_i \circ \varphi \circ \alpha \underset{\varphi \in \varPhi, \alpha \in A}{\overset{H \oslash E}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty)$$

Аналогично, если $\alpha_i \overset{F \oslash E}{\longrightarrow} 0 \quad (i \to \infty)$ и $B \in \mathcal{S}(H \oslash G)$, то для всякого $\varPhi \in \mathcal{S}(G \oslash F)$ имеем $B \circ \varPhi \in \mathcal{S}(H \oslash F)$ поэтому в силу теоремы 6.14

$$(\beta \oslash \alpha_i)(\varphi) = \beta \circ \varphi \circ \alpha_i \underset{\varphi \in \varPhi, \beta \in B}{\overset{H \oslash E}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty)$$

В результате мы получаем, что непрерывна билинейная форма

$$(\beta, \alpha) \in (H \oslash G) \times (F \oslash E) \mapsto \beta \oslash \alpha \in (H \oslash E) : (G \oslash F)$$

и, по теореме 5.24, это означает, что непрерывна форма (6.6). □

Следующие две леммы понадобятся нам в § 7(e).

Лемма 6.16. *Если $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, то*

$$\beta^{-1}(B) \oslash \alpha(A) = (\beta \oslash \alpha)^{-1}(B \oslash A)$$

Доказательство. $\varphi \in \beta^{-1}(B) \oslash \alpha(A) \Leftrightarrow \varphi(\alpha(A)) \subseteq \beta^{-1}(B) \Leftrightarrow (\beta \circ \varphi \circ \alpha)(A) \subseteq B \Leftrightarrow (\beta \oslash \alpha)(\varphi) \in B \oslash A \Leftrightarrow \varphi \in (\beta \oslash \alpha)^{-1}(B \oslash A)$ □

Лемма 6.17. *Если $B \subseteq G$ и $A \subseteq F$, то*

$$(\beta \oslash \alpha)(B \oslash A) \subseteq \beta(B) \oslash \alpha^{-1}(A) \tag{6.7}$$

причем равенство не обязано выполняться даже для конечномерных пространств:

$$\exists A, B \qquad (\beta \oslash \alpha)(B \oslash A) \neq \beta(B) \oslash \alpha^{-1}(A) \tag{6.8}$$

Доказательство. Вложение (6.7) следует из цепочки импликаций $\varphi \in B \oslash A \Rightarrow \varphi(A) \subseteq B \Rightarrow (\beta \oslash \alpha)(\varphi)(\alpha^{-1}(A)) = (\beta \circ \varphi \circ \alpha)(\alpha^{-1}(A)) = \beta(\varphi(a)) \subseteq \beta(B)$. Докажем теперь (6.8). Пусть $Y = \mathbb{R}^3$ и $E = X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \subseteq Y$. Обозначим через $\alpha : X \subseteq Y$ естественное вложение и пусть $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leqslant 1\}$ – единичный куб. Тогда множество $B = \alpha^{-1}(A) = A \cap X$ – правильный шестиугольник. Положим $\beta = 1_E$ и покажем, что

$$(\beta \oslash \alpha)(B \oslash A) \neq \beta(B) \oslash \alpha^{-1}(A)$$

Действительно, с одной стороны, $1_E \in \beta(B) \oslash \alpha^{-1}(A)$, потому что $1_E(\alpha^{-1}(A)) = 1_E(B) = B = \beta(B)$. С другой же стороны, $1_E \notin (\beta \oslash \alpha)(B \oslash A)$, потому что если $1_E = (\beta \oslash \alpha)(\varphi) = \beta \circ \varphi \circ \alpha = \varphi \circ \alpha$, где $\varphi \in B \oslash A$, то φ должно быть проекцией Y на X и значит $\varphi(A) \nsubseteq B$ (как ни выбирай проекцию φ не получится, чтобы куб A точно превратился в шестиугольник $B \subseteq A$). □

§ 7 Тензорные произведения

(a) Проективное тензорное произведение $X \circledast Y$

Проективное (стереотипное) тензорное произведение $X \circledast Y$ стереотипных пространств X и Y определяется равенством

$$X \circledast Y := (X^\star \oslash Y)^\star \tag{7.1}$$

или эквивалентным, в силу формулы (6.3), равенством

$$X \circledast Y := (\mathbb{C} \oslash (X, Y))^\star \tag{7.2}$$

Если $x \in X$ и $y \in Y$, то элементарный тензор $x \circledast y \in X \circledast Y$ определяется равенством

$$(x \circledast y)(\varphi) := \varphi(y)(x) \tag{7.3}$$

(где $\varphi \in X^\star \oslash Y$, а $x \circledast y$ рассматривается как элемент $(X^\star \oslash Y)^\star$), или, что равносильно, равенством

$$(x \circledast y)(\beta) := \beta(x, y) \tag{7.4}$$

(где $\beta \in \mathbb{C}(X, Y)$, а $x \circledast y$ считается элементом $(\mathbb{C}(X, Y))^\star$).

Предложение 7.1. *Отображение $\iota : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \circledast y \in X \circledast Y$ является непрерывной билинейной формой.*

Доказательство. Пусть $x_i \xrightarrow{X} 0 \quad (i \to \infty)$ и $T \in \mathcal{S}(Y)$. Тогда для всякого $\varPhi \in \mathcal{S}(X^\star \oslash Y)$ мы по теореме 5.1 получим $\varPhi(T) \in \mathcal{S}(X^\star)$ откуда, в силу леммы 2.2 и теоремы 2.5, $\varPhi(T)$ равностепенно непрерывно на X, значит

$$(x_i \circledast y)(\varphi) = \varphi(y)(x_i) \underset{\varphi \in \varPhi, y \in T}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty)$$

то есть

$$x_i \circledast y \underset{y \in T}{\overset{(X^\star \oslash Y)^\star = X \circledast Y}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty) \tag{7.5}$$

Наоборот, если $y_i \xrightarrow{Y} 0 \quad (i \to \infty)$, то для всякого $\varPhi \in \mathcal{S}(X^\star \oslash Y)$ в силу следствия 5.5 получаем

$$\varphi(y_i) \underset{\varphi \in \varPhi}{\overset{X^\star}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty)$$

Значит для любого $S \in \mathcal{S}(X)$

$$(x \circledast y_i)(\varphi) = \varphi(y_i)(x) \underset{\varphi \in \varPhi, x \in S}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty)$$

Таким образом

$$x \circledast y_i \underset{x \in S}{\overset{(X^\star \oslash Y)^\star = X \circledast Y}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty) \tag{7.6}$$

Соотношения (7.5) и (7.6) вместе означают непрерывность формы $(x, y) \mapsto x \circledast y$. □

Предложение 7.2. *Алгебраическое тензорное произведение $X \otimes Y$ инъективно и плотно вкладывается в проективное стереотипное тензорное произведение $X \circledast Y$ по формуле*

$$x \otimes y \mapsto x \circledast y$$

Доказательство. Плотность $X \otimes Y$ в $X \circledast Y$ эквивалентна тривиальности аннулятора $(X \otimes Y)^{\perp}$ в $(X \circledast Y)^\star = X^\star \oslash Y$ а это очевидно: если $\varphi \in (X \otimes Y)^{\perp}$, то $\forall x, y \quad (x \circledast y)(\varphi) = \varphi(y)(x) = 0$ и значит $\varphi = 0$.

Докажем инъективность. Рассмотрим ненулевой тензор $a \in X \otimes Y$. Его всегда можно представить в виде конечной суммы

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i \circledast y_i$$

где $\{x_i\}$ линейно независимы. Выберем функционалы $f \in X^\star$ и $g \in Y^\star$ так, чтобы

$$f(x_i) = \begin{cases} 1, i = 1 \\ 0, i \neq 1 \end{cases} \quad , \quad g(y_1) = 1$$

Тогда, взяв морфизм $\varphi = g \odot f \in X^\star \oslash Y$, действующий по формуле

$$\varphi(y) = f(y)g$$

мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \circledast y_i(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(y_i)(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i) f(x_i) = g(y_1) f(x_1) = 1$$

То есть a переходит в ненулевой тензор при отображении $x \otimes y \mapsto x \circledast y$. □

Теорема 7.3 (универсальность проективного тензорного произведения). *Для любых стереотипных пространств X, Y, Z и всякой непрерывной билинейной формы $\beta : X \times Y \to Z$ найдется единственный морфизм стереотипных пространств $\widetilde{\beta} : X \circledast Y \to Z$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\beta"'] & & X \circledast Y \arrow[dl, "\widetilde{\beta}"] \\ & Z & \end{tikzcd} ,$$

где ι – билинейная форма, определенная в предложении 7.1. При этом, соответствие $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$ является изоморфизмом стереотипных пространств

$$Z \oslash (X, Y) = Z \oslash (X \circledast Y) \tag{7.7}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение действующее по формуле

$$\varphi(h) = h \circ \beta, \quad h \in Z^\star$$

Поскольку β – непрерывная форма, $\varphi(h)$ – также непрерывная форма, то есть $\varphi(h) \in \mathbb{C} : (X, Y)$. Проверим непрерывность отображения φ. Если $h_i \xrightarrow{Z^\star} 0 \quad (i \to \infty)$, то есть $\forall K \in \mathcal{S}(Z) \quad h_i(z) \underset{z \in K}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0$, то из $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall T \in \mathcal{S}(Y) \quad \beta(S, T) \in \mathcal{S}(Z)$ следует

$$\varphi(h_i)(x, y) = (h_i \circ \beta)(x, y) \underset{x \in S, y \in T}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0$$

то есть непрерывно отображение $\varphi : Z^\star \to \mathbb{C} : (X, Y)$. Поскольку $Z^\star$ псевдонасыщено, непрерывно и отображение $\varphi^\vartriangle = \varphi : Z^\star \to \mathbb{C} \oslash (X, Y) = [\mathbb{C} : (X, Y)]^\vartriangle$. Теперь отображение $\widetilde{\beta}$ можно определить формулой

$$(\widetilde{\beta} : X \circledast Y \to Z) = (\varphi^\star : (\mathbb{C} \oslash (X, Y))^\star \to Z^{\star\star})$$

Тогда получим $\forall (x, y) \in X \times Y \quad \forall h \in Z^\star$

$$\langle h, (\widetilde{\beta} \circ \iota)(x, y) \rangle = \langle h, \widetilde{\beta}(x \circledast y) \rangle = \langle h, \varphi^\star(x \circledast y) \rangle = \langle h, (x \circledast y) \circ \varphi \rangle =$$

$$\langle \varphi(h), (x \circledast y) \rangle = \langle h \circ \beta, (x \circledast y) \rangle = (h \circ \beta)(x, y) = \langle h, \beta(x, y) \rangle$$

То есть

$$\widetilde{\beta} \circ \iota = \beta$$

Единственность $\widetilde{\beta}$ следует из предложения 7.2.

Докажем теперь, что отображение $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$ является изоморфизмом. Рассмотрим сначала отображение $\Phi : Z \oslash (X, Y) \to [\mathbb{C} \oslash (X, Y)] \oslash Z^\star$, действуюшее по формуле

$$\Phi[\beta](h) = h \circ \beta$$

Пусть направленность форм $\beta_i \in Z \oslash (X, Y)$ стремится к нулю в $Z : (X, Y)$:

$$\beta_i \overset{Z:(X,Y)}{\longrightarrow} 0, \quad i \to \infty$$

Тогда по определению топологии в $Z : (X, Y)$, для любых компактов $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$

$$\beta_i(x, y) \underset{x \in S, y \in T}{\overset{Z}{\rightrightarrows}} 0, \quad i \to \infty$$

Поэтому для всякого компакта $H \subseteq Z^\star$

$$(h \circ \beta_i)(x, y) \underset{x \in S, y \in T, h \in H}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0, \quad i \to \infty$$

Значит, по определению топологии в $\mathbb{C} : (X, Y)$,

$$\Phi[\beta_i](h) = h \circ \beta_i \underset{h \in H}{\overset{\mathbb{C}:(X,Y)}{\rightrightarrows}} 0, \quad i \to \infty$$

Отсюда

$$\Phi[\beta_i] \overset{[\mathbb{C}:(X,Y)]:Z^\star}{\longrightarrow} 0, \quad i \to \infty$$

Мы доказали непрерывность отображения

$$\Phi : \{Z : (X, Y)\} \to \{[\mathbb{C} : (X, Y)] : Z^\star\}$$

В силу основной леммы 5.19, это автоматически означает непрерывность отображения

$$\Phi : Z \oslash (X, Y) = \{Z : (X, Y)\}^\vartriangle \to [\mathbb{C} : (X, Y)]^\vartriangle : Z^\star = [\mathbb{C} \oslash (X, Y)] : Z^\star$$

Поскольку, кроме того, $Z \oslash (X, Y)$ псевдонасыщено, мы получаем непрерывное отображение

$$\Phi : Z \oslash (X, Y) \to \{[\mathbb{C} \oslash (X, Y)] : Z^\star\}^\vartriangle = [\mathbb{C} \oslash (X, Y)] \oslash Z^\star$$

Теперь по теореме 6.2

$$[\mathbb{C} \oslash (X, Y)] \oslash Z^\star = Z \oslash [\mathbb{C} \oslash (X, Y)] = Z \oslash (X \circledast Y)$$

и мы получаем непрерывное отображение

$$\Phi : Z \oslash (X, Y) \to Z \oslash (X \circledast Y)$$

по построению совпадающее с $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$.

С другой стороны, имеется естественное отображение

$$\Psi : Z \oslash (X \circledast Y) \to Z \oslash (X, Y), \quad \Psi[\varphi](x, y) = \varphi(x \circledast y)$$

тоже непрерывное, потому что если

$$\varphi_i \overset{Z \oslash (X \circledast Y)}{\longrightarrow} 0, \quad i \to \infty$$

то для любых компактов $S \subseteq X$, $T \subseteq Y$

$$\Psi[\varphi_i](x, y) = \varphi_i(x \circledast y) \underset{x \in S, y \in T}{\overset{Z}{\rightrightarrows}} 0, \quad i \to \infty$$

и значит

$$\Psi[\varphi_i] \overset{Z:(X,Y)}{\rightrightarrows} 0, \quad i \to \infty$$

Мы получаем непрерывное отображение

$$\Psi : Z \oslash (X \circledast Y) \to Z : (X, Y),$$

а значит, и непрерывное отображение

$$\Psi : Z \oslash (X \circledast Y) \to Z \oslash (X, Y),$$

Остается проверить, что Φ и Ψ взаимно обратны:

$$\Psi \circ \Phi = 1 \qquad \Phi \circ \Psi = 1$$

□

(b) Инъективное тензорное произведение $X \odot Y$

Инъективное (стереотипное) тензорное произведение $X \odot Y$ стереотипных пространств X и Y определяется равенством

$$X \odot Y := Y \oslash X^\star \tag{7.8}$$

или эквивалентным, в силу формулы (6.4), равенством

$$X \odot Y := \mathbb{C} \oslash (X^\star, Y^\star) \tag{7.9}$$

Если $x \in X$ и $y \in Y$, то элементарный оператор $x \odot y \in X \odot Y$ определяется формулой

$$(x \odot y)(f) := f(x)y, \quad f \in X^\star \tag{7.10}$$

(если $x \odot y$ рассматривается как элемент $Y \oslash X^\star$) или эквивалентной формулой

$$(x \odot y)(f, g) := f(x)g(y), \quad f \in X^\star, g \in Y^\star \tag{7.11}$$

(если $x \odot y$ считается элементом $\mathbb{C} \oslash (X^\star, Y^\star)$).

Предложение 7.4. *Отображение $\iota : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \odot y \in X \odot Y$ является непрерывной билинейной формой.*

Доказательство. Пусть W – базисная окрестность нуля в $X \odot Y = Y \oslash X^\star$, то есть $W = V \oslash F$, где $V \in \mathcal{BU}(Y), F \in \mathcal{BS}(X^\star)$. Обозначим $U = {}^\circ F \in \mathcal{BU}(X)$. Тогда если $x \in U, y \in V$, то $\forall f \in F \quad |f(x)| \leqslant 1$ поэтому $\forall f \in F \quad x \odot y(f) = f(x)y \in V$ то есть $x \odot y(F) \subseteq V$ или $x \odot y \in V \oslash F = W$. Таким образом $\iota(U, V) = \{x \odot y, x \in U, y \in V\} \subseteq W$. Это означает, что непрерывна билинейная форма $\iota : X \times Y \to Y : X^\star$. По теореме 5.24, отсюда следует, что непрерывна билинейная форма $\iota : X \times Y \to (Y : X^\star)^\vartriangle = Y \oslash X^\star = X \odot Y$. □

Предложение 7.5. *Алгебраическое тензорное произведение $X \otimes Y$ инъективно (но необязательно плотно) вкладывается в инъективное стереотипное тензорное произведение $X \odot Y$ по формуле*

$$x \otimes y \mapsto x \odot y$$

Доказательство. То, что это отображение необязательно плотно, мы докажем в § 9(a) (замечание 9.7). Инъективность же доказывается как в предложении 7.2: пусть $a \in X \otimes Y$ и $f \in X^\star$ – такие как в 7.2, тогда $\left(\sum_{i=1}^n x_i \odot y_i\right)(f) = y_1 \neq 0$. То есть $a \neq 0$ переходит в ненулевой оператор при отображении $x \otimes y \mapsto x \circledast y$. □

(c) Тензорные произведения морфизмов, тождества и моноидальная структура в категории $\mathfrak{Ste}$

Пусть $\alpha : E \to F$ и $\beta : G \to H$ - морфизмы стереотипных пространств. Положим

$$\alpha \circledast \beta : E \circledast G \to F \circledast H \qquad \alpha \circledast \beta = (\alpha^\star \oslash \beta)^\star \tag{7.12}$$

$$\alpha \odot \beta : E \odot G \to F \odot H \qquad \alpha \odot \beta = \beta \oslash \alpha^\star \tag{7.13}$$

и заметим, что выполняются тождества

$$(\alpha \circledast \beta)(x \circledast y) = \alpha(x) \circledast \beta(y) \qquad x \in E, y \in G \tag{7.14}$$

$$(\alpha \odot \beta)(x \odot y) = \alpha(x) \odot \beta(y) \qquad x \in E, y \in G \tag{7.15}$$

Действительно, для всякого $\varphi \in H \oslash F^\star$

$(\alpha \circledast \beta)(x \circledast y)(\varphi) = [(\alpha^\star \oslash \beta)^\star(x \circledast y)](\varphi) = (x \circledast y)[(\alpha^\star \oslash \beta)(\varphi)] = x \circledast y[\alpha^\star \circ \varphi \circ \beta] = [\alpha^\star \circ \varphi \circ \beta](y)(x) = \varphi(\beta(y))(\alpha(x)) = [\alpha(x) \circledast \beta(y)](\varphi)$

а для всякого $\eta \in F^\star$

$[(\alpha \odot \beta)(x \odot y)](\eta) = [(\beta \oslash \alpha^\star)(x \odot y)](\eta) = [\beta \circ x \odot y \circ \alpha^\star](\eta) = \beta(x \odot y(\eta \circ \alpha)) = \beta(\eta(\alpha(x))y) = \eta(\alpha(x))\beta(y) = [\alpha(x) \odot \beta(y)](\eta)$

Теорема 7.6. *Операции $\circledast$ и $\odot$ являются ковариантными функторами из $\mathfrak{Ste} \times \mathfrak{Ste}$ в $\mathfrak{Ste}$.*

Отметим следующие тождетсва (естественные изоморфизмы функторов) в категории стереотипных пространств $\mathfrak{Ste}$:

$$(X \circledast Y)^\star \cong Y^\star \odot X^\star \qquad (X \odot Y)^\star \cong Y^\star \circledast X^\star \tag{7.16}$$

$$Z \oslash (X \circledast Y) \cong (Z \oslash X) \oslash Y \qquad (X \odot Y) \oslash Z \cong X \odot (Y \oslash Z) \tag{7.17}$$

$$\mathbb{C} \circledast X \cong X \cong X \circledast \mathbb{C} \qquad \mathbb{C} \odot X \cong X \cong X \odot \mathbb{C} \tag{7.18}$$

$$X \circledast Y \cong Y \circledast X \qquad X \odot Y \cong Y \odot X \tag{7.19}$$

$$(X \circledast Y) \circledast Z \cong X \circledast (Y \circledast Z) \qquad (X \odot Y) \odot Z \cong X \odot (Y \odot Z) \tag{7.20}$$

$$\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right) \circledast Y \cong \bigoplus_{i\in I}(X_i \circledast Y) \qquad \left(\prod_{i\in I} X_i\right) \odot Y \cong \prod_{i\in I}(X_i \odot Y) \tag{7.21}$$

Доказательство. Приведем некоторые указания. Первый изоморфизм в (7.17) следует теорем 7.3 и 6.12, а второй является его очевидным следствием.

В (7.19) нужно воспользоваться теоремой 6.2: $X \odot Y \cong Y \oslash X^\star \cong X \oslash Y^\star \cong Y \odot X \qquad X \circledast Y \cong [Y^\star \odot X^\star]^\star \cong [X^\star \odot Y^\star]^\star \cong Y \circledast X$

Второе тождество в (7.20) следует из (7.17) и (7.16) $(X \odot Y) \odot Z \cong Z \oslash (X \odot Y)^\star \cong Z \oslash (X^\star \circledast Y^\star) \cong (Z \oslash Y^\star) \oslash X^\star \cong (Y \odot Z) \oslash X^\star \cong X \odot (Y \odot Z)$ а из него уже следует первое: $(X \circledast Y) \circledast Z \cong [(X \circledast Y)^\star \odot Z^\star]^\star \cong [(X^\star \odot Y^\star) \odot Z^\star]^\star \cong [X^\star \odot (Y^\star \odot Z^\star)]^\star \cong X \circledast (Y^\star \odot Z^\star)^\star \cong X \circledast (Y \circledast Z)$ □

Из (7.18), (7.19) и (7.20) следует

Теорема 7.7. *Категория $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств является моноидальной категорией относительно операций проективного $\circledast$ и инъективного $\odot$ тензорного произведения, причем проективное тензорное произведение $\circledast$ задает на $\mathfrak{Ste}$ структуру замкнутой моноидальной категории с внутренним hom-функтором в виде дроби $\oslash$:*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) = Y \oslash X$$

(d) Преобразование Гротендика $@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y$

Теорема 7.8. *Существует единственный морфизм стереотипных пространств*

$$@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y$$

называемый преобразованием Гротендика, удовлетворяющий тождеству

$$@_{X,Y}(x \circledast y) = x \odot y$$

Доказательство. По предложению 7.4, билинейная форма $\iota : X \times Y \to X \odot Y$ непрерывна. Значит по теореме 7.3, ι единственным образом продолжается до линейного непрерывного отображения $@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y$. □

Теорема 7.9. *Преобразование Гротендика является естественным преобразованием функтора $\circledast$ в функтор $\odot$: для любых морфизмов стереотипных пространств $\alpha : X_1 \to X_2$ и $\beta : Y_1 \to Y_2$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X_1 \circledast Y_1 \arrow[r, "@"] \arrow[d, "\alpha\circledast\beta"'] & X_1 \odot Y_1 \arrow[d, "\alpha\odot\beta."] \\ X_2 \circledast Y_2 \arrow[r, "@"] & X_2 \odot Y_2 \end{tikzcd} \tag{7.22}$$

Доказательство. Пусть $x \in X_1, y \in Y_1$, тогда $[@ \circ (\alpha \circledast \beta)](x \circledast y) = @(\alpha(x) \circledast \beta(y)) = (\alpha(x) \odot \beta(y)) = (\alpha \odot \beta)(x \odot y) = (\alpha \odot \beta)[@(x \odot y)] = [(\alpha \odot \beta) \circ @](x \odot y)$ □

Можно заметить, что, в силу тождеств (7.16), сопряженное отображение к преобразованию Гротендика также переводит проективное произведение в инъективное:

$$@^\star_{X,Y} : Y^\star \circledast X^\star = (X \odot Y)^\star \to (X \circledast Y)^\star = Y^\star \odot X^\star$$

Оказывается, что $@^\star_{X,Y}$ также является преобразованием Гротендика:

Теорема 7.10. *Справедливо равенство*

$$(@_{X,Y})^\star = @_{Y^\star, X^\star} \tag{7.23}$$

Доказательство. Для доказательства нужно проверить, что $(@_{X,Y})^\star$ и $@_{Y^\star,X^\star}$ совпадают на элементарных тензорах $g \circledast f (g \in Y^\star, f \in X^\star)$. Действительно,

$$\langle @^\star(g \circledast f), x \circledast y\rangle = \langle (g \circledast f) \circ @, x \circledast y\rangle = \langle g \circledast f, @(x \circledast y)\rangle = \\ = \langle g \circledast f, x \odot y\rangle = f(x)g(y) = \langle g \odot f, x \circledast y\rangle = \langle @(g \circledast f), x \circledast y\rangle$$

□

Условимся символом $\mathcal{F}(X, Y)$ обозначать систему всех конечномерных операторов $\varphi : X \to Y$ то есть таких, которые представимы в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} f_i \odot y_i, \qquad f_i \in X^\star, y_i \in Y, n \in \mathbb{N}$$

Пусть кроме того $\mathcal{G}(X, Y)$ обозначает непосредственное подпространство в стереотипном пространстве $Y \oslash X$, порожденное $\mathcal{F}(X, Y)$ (то есть псевдонасыщение замыкания):

$$\mathcal{G}(X, Y) = \{\overline{\mathcal{F}(X, Y)}\}^\vartriangle \tag{7.24}$$

Теорема 7.11. *Для любых стереотипных пространств X и Y преобразование Гротендика $@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y$ имеет следующие ядро и образ (в категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств):*

$$\operatorname{Ker} @ = \mathcal{G}(Y, X^\star)^{\perp\,\vartriangle} \qquad \operatorname{Im} @ = \mathcal{G}(X^\star, Y) \tag{7.25}$$

Доказательство. Поскольку $X \otimes Y$ плотно в $X \circledast Y$ (предложение 7.2),

$$\operatorname{Im} @ = \overline{@(X \circledast Y)} = \overline{@(X \otimes Y)} = \overline{\mathcal{F}(X^\star, Y)} = \mathcal{G}(X^\star, Y)$$

Значит, если рассмотреть двойственное отображение (теорема 7.10),

$$\operatorname{Im} @^\star = \mathcal{G}(Y, X^\star)$$

Отсюда в силу (4.13)

$$\operatorname{Ker} @ = (\operatorname{Im} @^\star)^{\perp\,\vartriangle} = \mathcal{G}(Y, X^\star)^{\perp\,\vartriangle}$$

□

(e) Тензорные произведения множеств

Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$. Введем следующие обозначения

$$A \circledast B = (A^\circ \oslash B)^\circ \qquad (A \circledast B \subseteq X \circledast Y = (X^\star \oslash Y)^\star) \tag{7.26}$$

$$A \odot B = B \oslash A^\circ \qquad (A \odot B \subseteq X \odot Y = Y \oslash X^\star) \tag{7.27}$$

При этом $A \circledast B$ мы будем называть *проективным тензорным произведением*, а $A \odot B$ – *инъективным тензорным произведением множеств A и B*. Заметим, что

$$\overline{A} \circledast \overline{B} = A \circledast B = \overline{A \circledast B} \tag{7.28}$$

Кроме того справедливы тождества

$$(A \circledast B)^\circ = B^\circ \odot A^\circ \qquad (A \odot B)^\circ = B^\circ \circledast A^\circ \tag{7.29}$$

Действительно, $(A \circledast B)^\circ = (A^\circ \oslash B)^{\circ\circ} = A^\circ \oslash B = A^\circ \oslash (B^{\circ\circ}) = B^\circ \odot A^\circ$ и $(A \odot B)^\circ = (B \oslash A^\circ)^\circ = (B^{\circ\circ} \oslash A^\circ)^\circ = B^\circ \circledast A^\circ$.

Теорема 7.12. *Для любых множеств $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$ их стереотипное проективное тензорное произведение $A \circledast B$ совпадает с замкнутой выпуклой уравновешенной оболочкой множества элементов $\{a \circledast b; a \in A, b \in B\}$:*

$$A \circledast B = \overline{\operatorname{absconv}}\{a \circledast b; a \in A, b \in B\}$$

Доказательство. Действительно, $\{a \circledast b; a \in A, b \in B\}^\circ = \{\varphi \in X^\star \oslash Y : \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad |(a \circledast b)(\varphi)| \leqslant 1\} = \{\varphi \in X^\star \oslash Y : \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad |\varphi(b)(a)| \leqslant 1\} = \{\varphi \in X^\star \oslash Y : \forall b \in B \quad \varphi(b) \in A^\circ\} = \{\varphi \in X^\star \oslash Y : \varphi(B) \subseteq A^\circ\} = A^\circ \oslash B$. Поэтому $\overline{\operatorname{absconv}}\{a \circledast b; a \in A, b \in B\} = \{a \circledast b; a \in A, b \in B\}^{\circ\circ} = (A^\circ \oslash B)^\circ = A \circledast B$. $\square$

Предложение 7.13. *Для любых множеств $A \in \mathcal{B}(X)$ и $B \in \mathcal{B}(Y)$ справедливо вложение*

$$@(A \circledast B) \subseteq A \odot B \tag{7.30}$$

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $b \in B$. Тогда для всякого $f \in A^\circ$ мы получим $|f(a)| \leqslant 1$ и поэтому $(a \odot b)(f) = f(a)b \in \overline{\operatorname{absconv}}\, B = B$. Значит $a \odot b \in B \oslash A^\circ = A \odot B$. Отсюда следует, что $@\{a \circledast b; a \in A, b \in B\} = \{a \odot b; a \in A, b \in B\} \subseteq A \odot B$, поэтому $@(A \circledast B) = @(\overline{\operatorname{absconv}}\{a \circledast b; a \in A, b \in B\}) \subseteq A \odot B$. $\square$

Теорема 7.14. *Вложение* (7.30) *является строгим даже для конечномерных пространств*

$$\exists A, B \qquad @(A \circledast B) \neq A \odot B$$

Доказательство. Действительно, пусть $X = Y = \mathbb{C}^2$, $A = B = \{x \in \mathbb{C}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 \leqslant 1\}$. Рассмотрим $W = \{w \in \mathbb{C}^4 = X \circledast Y = X \odot Y : \quad \sum_{i,j=1}^2 |w_i^j|^2 \leqslant 1\}$ (единичный шар в смысле l_2). Нетрудно проверить, что $A \circledast B \subseteq W \subseteq A \odot B$, причем $A \circledast B \neq W \neq A \odot B$. $\square$

Теорема 7.15. *Для любых $A \subseteq F$ и $B \subseteq G$*

$$\overline{(\alpha \circledast \beta)(A \circledast B)} = \alpha(A) \circledast \beta(B) \tag{7.31}$$

Доказательство. $\overline{(\alpha \circledast \beta)(A \circledast B)} = \overline{(\alpha \circledast \beta)(\overline{\operatorname{absconv}}\{a \circledast b; a \in A, b \in B\}} = \overline{\operatorname{absconv}}\{(\alpha \circledast \beta)(a \circledast b); a \in A, b \in B\} = \overline{\operatorname{absconv}}\{\alpha(a) \circledast \beta(b); a \in A, b \in B\} = \alpha(A) \circledast \beta(B)$ $\square$

Предложение 7.16. *Всегда*

$$(\alpha \odot \beta)(A \odot B) \subseteq \alpha(A) \odot \beta(B) \tag{7.32}$$

но вложение не обязано быть равенством даже в конечномерном случае:

$$\exists A, B \qquad (\alpha \odot \beta)(A \odot B) \neq \alpha(A) \odot \beta(B) \tag{7.33}$$

Доказательство. Докажем сначала вложение. Пусть $A \subseteq E$, $B \subseteq G$ и $\varphi \in A \odot B = B \oslash A^\circ$, то есть $\varphi(A^\circ) \subseteq B$. Тогда

$$[(\alpha \odot \beta)(\varphi)](\alpha(A)^\circ) = [(\beta \oslash \alpha^\star)(\varphi)](\alpha(A)^\circ) = (\beta \circ \varphi \circ \alpha^\star)(\alpha(A)^\circ) = (\beta \circ \varphi \circ \alpha^\star)(\alpha^{-1}(A^\circ)) = \beta(\varphi(A^\circ)) \subseteq \beta(B)$$

то есть $(\alpha \odot \beta)(\varphi) \in \beta(B) \oslash \alpha(A)^\circ = \alpha(A) \odot \beta(B)$

Мы доказали (7.32). Покажем теперь, что это вложение является строгим. Рассмотрим контрпример из леммы 6.17 для которого выполняется (6.8). Тогда $(\alpha^\star \odot \beta)(A^\circ \odot B) = (\beta \oslash \alpha^{\star\star})(B \oslash A^{\circ\circ}) \neq \beta(B) \oslash \alpha^{-1}(A) = \alpha^{-1}(A)^\circ \odot \beta(B) = \overline{\alpha^{-1}(A)^\circ} \odot \beta(B) = \alpha^{-1}(A^\circ) \odot \beta(B)$ (последнее равенство выполняется поскольку в данном случае $\alpha^\star$ является вложением). Переобозначив $\alpha^\star$ на α и A° на A, мы получим (7.33) $\square$

(f) Тензорные произведения в категориях $\mathfrak{Ban}$, $\mathfrak{Smi}$, $\mathfrak{Fre}$, $\mathfrak{Bra}$

Теорема 7.17. *Если X и Y – пространства Фреше, то стереотипное проективное тензорное произведение $X \circledast Y$ совпадает с обычным проективным тензорным произведением локально выпуклых пространств $X\hat{\otimes}Y$ [40].*

Доказательство. Поскольку $\circledast$ и $\hat{\otimes}$ оба обладают свойством универсальности в категории $\mathfrak{Fre}$, существуют единственные морфизмы α и β, замыкающие диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \circledast Y \arrow[rr, dashed, "\alpha"] & & X \hat{\otimes} Y \\ & X \otimes Y \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} X \circledast Y & & X \hat{\otimes} Y \arrow[ll, dashed, "\beta"'] \\ & X \otimes Y \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Поскольку кроме того алгебраическое тензорное произведение $X \otimes Y$ плотно в $X \circledast Y$ и $X\hat{\otimes}Y$, должны быть коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \circledast Y \arrow[rr, equal] \arrow[ddr, dashed, "\alpha"'] & & X \circledast Y \\ & X \otimes Y \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \\ & X \hat{\otimes} Y \arrow[uur, dashed, "\beta"'] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} & X \circledast Y \arrow[ddr, dashed, "\alpha"] & \\ & X \otimes Y \arrow[u] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \hat{\otimes} Y \arrow[uur, dashed, "\beta"] \arrow[rr, equal] & & X \hat{\otimes} Y \end{tikzcd} .$$

означающие, что α и β – изоморфизмы. □

Следствие 7.18. *Если X и Y – пространства Фреше, то*

$$\forall K \in \mathcal{S}(X \circledast Y) \quad \exists S \in \mathcal{S}(X) \quad \exists T \in \mathcal{S}(Y) \quad K \subseteq S \circledast T$$

Доказательство. (это отмечается, например, в учебнике Робертсонов [2], стр.197). □

Следствие 7.19. *Если X – пространство Фреше, а Y – пространство Браунера, то пространство $Y : X$ стереотипно (то есть $Y : X = Y \oslash X$) и является пространством Браунера.*

Доказательство. Заметим, что

$$Y^\star \circledast X = (Y \oslash X)^\star = (Y : X)^{\vartriangle\star} = (Y : X)^{\star\triangledown} \supseteq (Y : X)^\star$$

Пусть $B \in \mathcal{BD}(Y : X)$, тогда $B^\circ \in \mathcal{BS}((Y : X)^\star)$ и значит $B^\circ \in \mathcal{BS}(Y^\star \circledast X)$. В силу следствия 7.18, $\exists G \in \mathcal{BS}(Y^\star) \quad \exists S \in \mathcal{BS}(X) \quad B^\circ \subseteq G \circledast S$. Обозначим $V = G^\circ \in \mathcal{BU}(Y)$. Тогда $B^\circ \subseteq V^\circ \circledast S = (V \oslash S)^\circ$. Поскольку $B \in \mathcal{BD}(Y : X)$, отсюда следует $V \oslash S \subseteq B$, то есть B содержит окрестность нуля $V \oslash S$. Таким образом, $B \in \mathcal{BD}(Y : X)$. □

Автоматически получается

Следствие 7.20. *Если X – пространство Банаха, а Y – пространство Смит, то пространство $Y : X$ стереотипно (то есть $Y : X = Y \oslash X$) и является пространством Смит.*

Теорема 7.21. *Если X и Y – пространства Фреше, причем хотя бы одно из них обладает (классической) аппроксимацией, то инъективное тензорное произведение $X \odot Y$ совпадает с (классическим) инъективным тензорным произведением локально-выпуклых пространств $X\check{\otimes}Y$ [40]*

Доказательство. Рассмотрим вложение алгебраического тензорного произведения $X \otimes Y$ в $X \odot Y$:

$$X \otimes Y \subseteq X \odot Y = Y \oslash X^\star$$

и покажем сначала, что $X \otimes Y$ плотно в $X \odot Y = Y \oslash X^\star$.

Для этого заметим, что, в силу примера 6.5, $Y : X^\star$ автоматически псевдонасыщено и поэтому $Y : X^\star = Y \oslash X^\star$. Пусть $\varphi \in Y : X^\star = Y \oslash X^\star$, то есть $\varphi : X^\star \to Y$ – линейный непрерывный оператор. Зафиксируем компакт $F \subseteq X^\star$. Множество $K = \varphi(F)$ будет компактом в Y. Поэтому, если Y обладает свойством классической аппроксимации, найдется направленность конечномерных операторов $\psi_\nu : Y \to Y$, аппроксимирующих единичный оператор на компакте K:

$$\psi_\nu(y) \underset{y\in K,\nu\to\infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} y$$

Отсюда следует, что

$$(\psi_\nu \circ \varphi)(f) \underset{f\in F,\nu\to\infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \varphi(f)$$

Поскольку F – произвольный компакт, мы получаем, что φ аппроксимируется конечномерными операторами (то есть элементами пространства $X \otimes Y$) в пространстве $Y : X^\star = Y \oslash X^\star = X \odot Y$.

Итак, $X \otimes Y$ плотно в $X \odot Y$. Теперь нам достаточно убедиться, что топология, индуцируемая на $X \otimes Y$ объемлющим пространством $X \odot Y$ есть инъективная топология в смысле [40] (или ε-топология по [41]). Действительно, поскольку $X \odot Y = Y \oslash X^\star = Y : X^\star$, топология в $X \odot Y = Y \oslash X^\star$ задается окрестностями нуля $V \oslash (U^\circ), \quad U \in \mathcal{BU}(X), V \in \mathcal{BU}(Y)$, или, что то же самое, полунормами

$$|\varphi|_{U,V} = \sup_{f\in U^\circ, g\in V^\circ} |g(\varphi(f))|.$$

Значение такой полунормы на элементе $z \in X \otimes Y$ описывается формулой

$$|z|_{U,V} = \sup_{f\in U^\circ, g\in V^\circ} |g(z(f))| = \sup_{f\in U^\circ, g\in V^\circ} |z(f \otimes g)|$$

Но это как раз описание инъективной топологии на $X \otimes Y$ [40] (или ε-топологии по [41]). $\square$

Из примеров 6.3 – 6.6 следуют

Теорема 7.22. *Если X и Y – пространства Фреше, то $X \circledast Y$ и $X \odot Y$ – пространства Фреше.*

Теорема 7.23. *Если X и Y – пространства Браунера, то $X \circledast Y$ и $X \odot Y$ – пространства Браунера.*

Теорема 7.24. *Если X и Y – пространства Банаха, то $X \circledast Y$ и $X \odot Y$ – пространства Банаха.*

Теорема 7.25. *Если X и Y – пространства Смит, то $X \circledast Y$ и $X \odot Y$ – пространства Смит.*

(g) Действие функторов $\oslash, \circledast, \odot$ на пространства $\mathbb{C}^I$ и $\mathbb{C}_I$

Для всякого стереотипного пространства X и любого множества индексов I обозначим символом X^I прямое произведение, а символом X_I – прямую сумму (в категории $\mathfrak{Ste}$ или, что равносильно, в категории $\mathcal{LCS}$) $\operatorname{card} I$ экземпляров пространства X. Ясно, что

$$(X^I)^\star = (X^\star)_I, \qquad (X_I)^\star = (X^\star)^I \tag{7.34}$$

Рассмотрим пространства $\mathbb{C}^I$ и $\mathbb{C}_I$ (свойства которых с точностью до замены $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$ изучались автором в [42]). Справедливо следующее

Предложение 7.26. *Для всякого стереотипного пространства X и любого множества индексов I справедливы равенства*

$$X \oslash \mathbb{C}_I = X : \mathbb{C}_I = X^I, \qquad \mathbb{C}^I \oslash X = \mathbb{C}^I : X = (X^\star)^I \tag{7.35}$$

$$\mathbb{C}_I \circledast X = X_I = X \circledast \mathbb{C}_I \qquad \mathbb{C}^I \odot X = X^I = X \odot \mathbb{C}^I \tag{7.36}$$

из которых, в частности, следует

$$\mathbb{C}_I \circledast \mathbb{C}_J = \mathbb{C}_I \odot \mathbb{C}_J = \mathbb{C}_{I\times J} \qquad \mathbb{C}^I \circledast \mathbb{C}^J = \mathbb{C}^I \odot \mathbb{C}^J = \mathbb{C}^{I\times J} \tag{7.37}$$

Доказательство. Равенство $X : \mathbb{C}_I = X^I$ очевидно. Из него следует, что $X : \mathbb{C}_I$ псевдонасыщено, и поэтому $X \oslash \mathbb{C}_I = X : \mathbb{C}_I$. Аналогично, из $\mathbb{C}^I : X = (X^\star)^I$ следует псевдонасыщенность $\mathbb{C}^I : X$, и значит $\mathbb{C}^I \oslash X = \mathbb{C}^I : X$. Таким образом, доказаны равенства (7.35). Теперь уже получаем

$$\mathbb{C}_I \circledast X = (\mathbb{C}_I^\star \oslash X)^\star = (\mathbb{C}^I \oslash X)^\star = (X^{\star I})^\star = X_I, \quad \mathbb{C}^I \odot X = X \oslash (\mathbb{C}^{I\star}) = X \oslash \mathbb{C}_I = X^I.$$

$\square$

Теорема 7.27. *В общем случае справедливы неравенства*

$$X \oslash \mathbb{C}^I \neq X_I \qquad \mathbb{C}_I \oslash X \neq (X^\star)_I \qquad \mathbb{C}^I \circledast X \neq X^I \qquad \mathbb{C}_I \odot X \neq X_I \tag{7.38}$$

Доказательство. Заметим вначале, что

$$(\mathbb{C}_I)^I \neq (\mathbb{C}^I)_I, \qquad (\operatorname{card} I = \infty) \tag{7.39}$$

Действительно, $(\mathbb{C}_I)^I$ можно представить как пространство бесконечных матриц (x_i^j) с финитными строками,

$$\forall i \in I \quad \operatorname{card}\{j \in I : \quad x_i^j \neq 0\} < \infty$$

а $(\mathbb{C}^I)_I$ в этом представлении будет подпространством, состоящим из матриц с конечным числом ненулевых столбцов

$$\operatorname{card}\{j \in I : \quad \exists i \in I \quad x_i^j \neq 0\} < \infty$$

Теперь для $X = \mathbb{C}^I$ получаем $X \oslash \mathbb{C}^I = \mathbb{C}^I \oslash X = (7.35) = (\mathbb{C}_I)^I \neq (\mathbb{C}^I)_I = X_I$. Аналогично доказываются другие неравенства в (7.37). □

§ 8 Интегрирование со значениями в стереотипных пространствах

(a) Интегрирование мер на паракомпактном локально компактном пространстве

Напомним, что топологическое пространство M называется *σ-компактным*, если оно является объединением счетной системы компактов:

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

(S_n – компакты в M). Для локально-компактных пространств M это условие равносильно *свойству Линделефа*: из всякого открытого покрытия пространства M можно выбрать счетное подпокрытие (см. [37, 3.8.C(b)]). Поэтому если M *линделефово* (то есть обладает свойством Линделёфа) и локально компактно, то пространство $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций $u : M \to \mathbb{C}$ будет пространством Фреше относительно топологии равномерной сходимости на компактах $S \subseteq M$.

Рассмотрим несколько более общий класс топологических пространств. Пусть M – паракомпактное локально-компактное топологическое пространство. Всякое такое пространство разложимо в прямую сумму

$$M = \coprod_{i\in I} M_i$$

линделёфовых локально-компаткных пространств M_i ([37, теорема 5.1.27]). Поэтому пространство $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций $u : M \to \mathbb{C}$ (с топологией равномерной сходимости на компактах $S \subseteq M$) будет стереотипным пространством, как прямое произведение пространств Фреше:

$$\mathcal{C}(M) = \prod_{i\in I} \mathcal{C}(M_i)$$

Сопряженное пространство

$$\mathcal{C}^\star(M) = \{\mathcal{C}(M)\}^\star$$

состоит из мер Радона с компактным носителем на M.

Теорема 8.1. *Для всякого непрерывного отображения $\xi : M \to X$ в (произвольное) стереотипное пространство X существует единственный морфизм стереотипных пространств $\Xi : \mathcal{C}^\star(M) \to X$, удовлетворяющий тождеству*

$$\Xi(\delta_s) = \xi(s), \qquad s \in M \tag{8.1}$$

то есть, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X & \\ M \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, "\delta"'] & & \mathcal{C}^\star(M) \arrow[ul, "\Xi"'] \end{tikzcd}, \tag{8.2}$$

в которой δ – вложение M в $\mathcal{C}^\star(M)$ в качестве δ-функций:

$$\delta_s(u) = u(s), \qquad u \in \mathcal{C}(M), s \in M$$

Определение. Морфизм Ξ в диаграмме (8.2) называется *интегралом по мере $\alpha \in \mathcal{C}^\star(M)$ от функции ξ со значениями в пространстве X* и обозначается

$$\Xi(\alpha) = \int_M^X \xi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) \qquad (\alpha \in \mathcal{C}^\star(M))$$

Такое обозначение удобно для краткой записи формул типа (8.9) которые понадобятся нам ниже.

Для доказательства нам понадобится две леммы.

Лемма 8.2. *Система δ-функций $\{\delta_a; a \in M\}$ полна в $\mathcal{C}^\star(M)$:*

$$\overline{\operatorname{span}}\{\delta_a; a \in M\} = \mathcal{C}^\star(M)$$

Доказательство. Поскольку δ-функции разделяют злементы $\mathcal{C}(M)$

$$\forall a \in M \quad \delta_a(u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

получаем

$$\{\delta_a; a \in M\}^\perp = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \overline{\operatorname{span}}\{\delta_a; a \in M\} = \{\delta_a; a \in M\}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{C}^\star(M)$$

□

Лемма 8.3. *Для всякого стереотипного пространства X и любого отображения $\xi : M \to X$ следующие условия эквивалентны*

(i) ξ – непрерывное отображение;

(ii) $\forall f \in X^\star \quad f \circ \xi \in \mathcal{C}(M)$, причем отображение $f \in X^\star \mapsto f \circ \xi \in \mathcal{C}(M)$ непрерывно.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$ Пусть $\xi : M \to X$ непрерывно. Тогда для всякого $f \in X^\star$ композиция $f \circ \xi$ будет непрерывна на M то есть $f \circ \xi \in \mathcal{C}(M)$. Пусть $f_i \overset{X^\star}{\to} 0$, то есть $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad f_i(x) \underset{x\in S}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0$. Тогда для всякого компакта $K \subseteq M$ получим

$$(f_i \circ \xi)(s) = f_i(\xi(s)) \underset{s\in K}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0,$$

поскольку $\xi(K)$ – компакт. Значит

$$f_i \circ \xi \overset{\mathcal{C}(M)}{\longrightarrow} 0,$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Наоборот, пусть выполнено (ii) и $s_i \overset{M}{\to} s$. Тогда для всякого $F \in \mathcal{S}(X^\star)$ в силу непрерывности отображения $f \mapsto f \circ \xi$ получаем, что $F \circ \xi \in \mathcal{S}(\mathcal{C}(M))$ Значит $F \circ \xi$ должно быть равностепенно непрерывно на всякой компактной окрестности точки $s \in M$, откуда

$$f(\xi(s_i)) = (f \circ \xi)(s_i) \underset{f\in F}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} f(\xi(s)),$$

Поскольку это верно для всякого $F \in \mathcal{S}(X^\star)$, получаем $\xi(s_i) \overset{X = X^{\star\star}}{\longrightarrow} \xi(s)$. □

Доказательство. Доказательство теоремы 8.1. По лемме 8.3, для всякого функционала $f \in X^\star$ композиция $f \circ \xi$ лежит в пространстве $\mathcal{C}(M)$, причем отображение $f \in X^\star \mapsto f \circ \xi \in \mathcal{C}(M)$ непрерывно. Обозначим его символом ψ:

$$\psi : X^\star \to \mathcal{C}(M) \quad \Big| \quad \psi(f) = f \circ \xi \tag{8.3}$$

Рассмотрим сопряженное отображение

$$\psi^\star : \mathcal{C}^\star(M) \to X^{\star\star} \quad \Big| \quad \psi^\star = \alpha \circ \psi \tag{8.4}$$

и определим Ξ как композицию $\psi^\star$ и стандартного изоморфизма $i_X^{-1} : X^{\star\star} \to X$:

$$\Xi = i_X^{-1} \circ \psi^\star : \mathcal{C}^\star(M) \to X$$

Тогда для любых $f \in X^\star, \alpha \in \mathcal{C}^\star(M)$ получим

$$f\left(\Xi(\alpha)\right) = f\left(i_X^{-1}\left(\psi^\star(\alpha)\right)\right) = \left(f \circ i_X^{-1}\right)\left(\psi^\star(\alpha)\right) = (2.3) = i_{X^\star}(f)\left(\psi^\star(\alpha)\right) = \psi^\star(\alpha)(f) =$$

$$= (8.4) = (\alpha \circ \psi)(f) = \alpha(\psi(f)) = (8.3) = \alpha(f \circ \xi)$$

Таким образом, выполняется тождество

$$f(\Xi(\alpha)) = \alpha(f \circ \xi), \qquad f \in X^\star, \alpha \in \mathcal{C}^\star(M) \tag{8.5}$$

Далее получаем логическую цепочку, в которой первый шаг оправдывается тем, что δ-функции $\{\delta_a; a \in M\}$ полны в $\mathcal{C}^\star(M)$ (лемма 8.2):

$$f(\Xi(\alpha)) = \alpha(f \circ \xi), \qquad f \in X^\star, \alpha \in \mathcal{C}^\star(M)$$

$$\Updownarrow$$

$$f(\Xi(\delta_a)) = \delta_a(f \circ \xi) = (f \circ \xi)(a) = f(\xi(a)), \qquad f \in X^\star, a \in M$$

$$\Updownarrow$$

$$\Xi(\delta_a) = \xi(a), \qquad a \in M$$

$$\Updownarrow$$

$$\Xi \circ \delta = \xi$$

Остается заметить, что единственность морфизма Ξ также следует из того, что δ-функции полны в $\mathcal{C}^\star(M)$. $\square$

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

1°. *Интеграл по δ-функции:*

$$\int_M^X \xi(s)\, \mathrm{d}\,\delta_a(s) = \xi(a), \qquad a \in M \tag{8.6}$$

2°. *Интеграл со значениями в $\mathbb{C}$:*

$$\int_M^{\mathbb{C}} u(s)\, \mathrm{d}\,\alpha(s) = \alpha(u), \qquad u \in \mathcal{C}(M) \tag{8.7}$$

3°. *Перестановочность интеграла с морфизмами:* для всякого морфизма стереотипных пространств $\varphi : X \to Y$

$$\varphi\left(\int_M^X \xi(s)\, \mathrm{d}\,\alpha(s)\right) = \int_M^Y \varphi(\xi(s))\, \mathrm{d}\,\alpha(s) \tag{8.8}$$

4°. *Перестановочность интегралов между собой:*

$$\int_N^{\mathbb{C}} \left(\int_M^{\mathbb{C}} w(s,t)\, \mathrm{d}\,\alpha(s)\right) \mathrm{d}\,\beta(t) = \int_M^{\mathbb{C}} \left(\int_N^{\mathbb{C}} w(s,t)\, \mathrm{d}\,\beta(t)\right) \mathrm{d}\,\alpha(s), \qquad w \in \mathcal{C}(M \times N) \tag{8.9}$$

Доказательство. 1. Формула (8.6) есть по-другому переписанная формула (8.1).

2. Формула (8.7) следует из единственности морфизма Ξ в диаграмме (8.2): при фиксированном $\xi = u \in \mathcal{C}(M)$ отображение $i_{\mathcal{C}(M)}(u) : \mathcal{C}^\star(M) \to \mathbb{C} \;\Big|\; i_{\mathcal{C}(M)}(u)(\alpha) = \alpha(u)$ будет удовлетворять условию

$$i_{\mathcal{C}(M)}(u) \circ \delta = u$$

и поэтому должно совпадать с Ξ:

$$\int_M^{\mathbb{C}} u(s)\, \mathrm{d}\,\alpha(s) = \Xi(\alpha) = i_{\mathcal{C}(M)}(u)(\alpha) = \alpha(u)$$

3. Рассмотрим диаграмму (8.2) и положим $\upsilon = \varphi \circ \xi$, $\Upsilon = \varphi \circ \Xi$. Тогда мы получим

$$\Upsilon(\delta_a) = \varphi(\Xi(\delta_a)) = \varphi(\xi(a)) = \upsilon(a)$$

то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y & \\ M \arrow[ur, "\upsilon"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{C}^\star(M) \arrow[ul, "\Upsilon"'] \end{tikzcd}.$$

По теореме 8.1 это означает, что отображение $\varUpsilon$ является интегралом от функции υ (в силу единственности интеграла):

$$\varUpsilon(\alpha) = \int_M^Y \upsilon(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)$$

Значит,

$$\varphi\left(\int_M^X \xi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)\right) = \varphi\left(\varXi(\alpha)\right) = \varUpsilon(\alpha) = \int_M^Y \upsilon(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) = \int_M^Y \varphi\left(\xi(s)\right)\mathrm{d}\,\alpha(s)$$

4. Зафиксируем $\alpha \in \mathcal{C}^\star(M), \beta \in \mathcal{C}^\star(N), w \in \mathcal{C}(M\times N)$ и обозначим

$$\xi : M \to \mathcal{C}(N) \quad \Big| \quad \xi(s)(t) = w(s,t), \quad v = \int_M^{\mathcal{C}(N)} \xi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)$$

Тогда

$$v(t) = \int_M^{\mathbb{C}} w(s,t)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) \tag{8.10}$$

и поэтому

$$\int_N^{\mathbb{C}}\left(\int_M^{\mathbb{C}} w(s,t)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)\right)\mathrm{d}\,\beta(t) = (8.10) = \int_N^{\mathbb{C}} v(t)\,\mathrm{d}\,\beta(t) = (8.7) = \beta(v) = \beta\left(\int_M^{\mathcal{C}(N)} \xi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)\right) =$$
$$= (8.8) = \int_M^{\mathbb{C}} \beta\left(\xi(s)\right)\mathrm{d}\,\alpha(s) = \int_M^{\mathbb{C}}\left(\int_N^{\mathbb{C}} \xi(s)(t)\,\mathrm{d}\,\beta(t)\right)\mathrm{d}\,\alpha(s) = \int_M^{\mathbb{C}}\left(\int_N^{\mathbb{C}} w(s,t)\,\mathrm{d}\,\beta(t)\right)\mathrm{d}\,\alpha(s)$$

$\square$

Обозначение. Для любых функций $u \in \mathcal{C}(M), v \in \mathcal{C}(N)$ символом $u \otimes v$ обозначается функция $u\otimes v \in \mathcal{C}(M\times N)$, определенная формулой: $\quad \forall (s,t) \in M\times N$

$$(u\otimes v)(s,t) = u(s)\cdot v(t) \tag{8.11}$$

Для любых двух мер $\alpha \in \mathcal{C}^\star(M), \beta \in \mathcal{C}^\star(N)$ символом $\alpha\otimes\beta$ обозначается мера $\alpha\otimes\beta \in \mathcal{C}^\star(M\times N)$ определенная формулой: $\quad \forall w \in \mathcal{C}(M\times N)$

$$(\alpha\otimes\beta)(w) = \int_N^{\mathbb{C}}\left(\int_M^{\mathbb{C}} w(s,t)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)\right)\mathrm{d}\,\beta(t) = \int_M^{\mathbb{C}}\left(\int_N^{\mathbb{C}} w(s,t)\,\mathrm{d}\,\beta(t)\right)\mathrm{d}\,\alpha(s) \tag{8.12}$$

Очевидно, тензорное произведение δ-функций будет δ-функцией:

$$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)} \tag{8.13}$$

Кроме того, $\alpha\otimes\beta$ и $u\otimes v$ действуют друг на друга по формуле

$$(\alpha\otimes\beta)(u\otimes v) = \alpha(u)\cdot\beta(v) \tag{8.14}$$

Теорема 8.4. *Для любых двух паракомпактных локально компактных топологических пространств M и N*

(a) существует единственный изоморфизм стереотипных пространств

$$\varPhi : \mathcal{C}(M\times N) \to \mathcal{C}(M)\odot\mathcal{C}(N), \tag{8.15}$$

удовлетворяющий тождеству

$$\varPhi(u\otimes v) = u\odot v, \qquad u\in\mathcal{C}(M), v\in\mathcal{C}(N) \tag{8.16}$$

(b) *существует единственный изоморфизм стереотипных пространств*

$$\Psi : \mathcal{C}^\star(M \times N) \to \mathcal{C}^\star(M) \circledast \mathcal{C}^\star(N), \tag{8.17}$$

удовлетворяющий тождеству

$$\Psi(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circledast \beta, \qquad \alpha \in \mathcal{C}^\star(M), \beta \in \mathcal{C}^\star(N) \tag{8.18}$$

(c) *эти морфизмы* Φ, Ψ *связаны формулой*

$$\Psi = (\Phi^\star)^{-1} \tag{8.19}$$

Замечание 8.5. При этом $\mathcal{C}(M) \circledast \mathcal{C}(N)$ отображается в $\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(N)$ через преобразование Гротендика $@ : \mathcal{C}(M) \circledast \mathcal{C}(N) \to \mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(N)$ однако это отображение не является изоморфизмом: $\mathcal{C}(M) \circledast \mathcal{C}(N) \neq \mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(N)$.

Доказательство теоремы 8.4 использует следующие две леммы.

Лемма 8.6. *Пусть* $S \subseteq M$ *– компакт в* M, *и* $D(S)$ *обозначает окрестность нуля в* $\mathcal{C}(M)$ *состоящую из функций, значения которых на компакте* S *не превосходят по модулю единицы*

$$D(S) = \{u \in \mathcal{C}(M) : \quad \sup_{s \in S} |u(s)| \leqslant 1\} \tag{8.20}$$

а $E(S)$ *ее поляру в* $\mathcal{C}^\star(M)$

$$E(S) = D(S)^\circ = \{\alpha \in \mathcal{C}^\star(M) : \quad \sup_{u \in D(S)} |\alpha(u)| \leqslant 1\} \tag{8.21}$$

Тогда

$$\forall f \in \{\mathcal{C}^\star(M)\}^\star \qquad \sup_{\alpha \in E(S)} |f(\alpha)| = \sup_{a \in S} |f(\delta_a)| \tag{8.22}$$

Доказательство. Ясно, что $D(S)$ будет обратной полярой системы δ-функций $\{\delta_s; s \in S\} \subset \mathcal{C}^\star(M)\}$:

$$D(S) = {}^\circ\{\delta_s; s \in S\}$$

Поэтому поляра $E(S) = D(S)^\circ$ будет замкнутой выпуклой уравновешенной оболочкой системы $\{\delta_s; s \in S\}$

$$E(S) = D(S)^\circ = ({}^\circ\{\delta_s; s \in S\})^\circ = \overline{\operatorname{absconv}}\{\delta_s; s \in S\}$$

Отсюда

$$\sup_{\alpha \in E(S)} |f(\alpha)| = \sup_{\alpha \in \overline{\operatorname{absconv}}\{\delta_s; s \in S\}} |f(\alpha)| = \sup_{s \in S} |f(\delta_a)|$$

□

Лемма 8.7. *Пространство непрерывных билинейных форм* $\mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$ *стереотипно, поэтому*

$$\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(N) = \mathbb{C} \oslash (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N)) = \mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$$

Доказательство. По теореме 5.21,

$$\mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N)) = (\mathbb{C} : \mathcal{C}^\star(M)) : \mathcal{C}^\star(N) = \mathcal{C}(M) : \mathcal{C}^\star(N)$$

Представим M и N в виде прямой суммы σ-компактных паространств:

$$M = \coprod_{i \in I} M_i, \quad N = \coprod_{j \in J} N_j$$

Тогда

$$\mathcal{C}(M) = \prod_{i \in I} \mathcal{C}(M_i), \quad \mathcal{C}(N) = \prod_{j \in J} \mathcal{C}(N_j)$$

Поэтому

$$\mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N)) = \mathcal{C}(M) : \mathcal{C}^\star(N) = \left(\prod_{i \in I} \mathcal{C}(M_i)\right) : \left(\prod_{j \in J} \mathcal{C}(N_j)\right)^\star =$$

$$= \left(\prod_{i \in I} \mathcal{C}(M_i)\right) : \left(\bigoplus_{j \in J} \mathcal{C}^\star(N_j)\right) = \prod_{i \in I, j \in J} (\mathcal{C}(M_i) : \mathcal{C}^\star(N_j))$$

Поскольку, в силу примера 6.5, пространства $\mathcal{C}(M_i) : \mathcal{C}^\star(N_j)$ являются пространствами Фреше, их прямое произведение должно быть стереотипно. □

Лемма 8.8. *Топология пространства*

$$\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(N) = \mathbb{C} \oslash (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N)) = \mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$$

задается полунормами

$$|h|_{S,T} = \sup_{s\in S, t\in T} |h(\delta_s, \delta_t)|, \tag{8.23}$$

где $h \in \mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$, $S \subseteq M$ *и* $T \subseteq N$ *– компакты в* M *и* N.

Доказательство. Множества $D(S)$, определенные формулой (8.20), помноженные на ненулевые скаляры

$$\lambda \cdot D(S), \qquad \lambda \neq 0, S \subseteq M$$

образуют локальную базу в пространстве $\mathcal{C}(M)$. Значит, их поляры, помноженные на ненулевые скаляры,

$$\mu \cdot E(S), \qquad \mu \neq 0, S \subseteq M$$

образуют фундаментальную систему компактов в $\mathcal{C}^\star(M)$ (то есть любой компакт из $\mathcal{C}^\star(M)$ обязательно содержится в множестве вида $\mu \cdot E(S)$).

Аналогично, множества

$$\nu \cdot E(T), \qquad \nu \neq 0, T \subseteq N$$

образуют фундаментальную систему компактов в $\mathcal{C}^\star(N)$. Отсюда следует, что множества вида

$$\mu \cdot (E(S) \times E(T)), \qquad \mu \neq 0, S \subseteq M, T \subseteq N$$

образуют фундаментальную систему компактов в $\mathcal{C}^\star(M) \times \mathcal{C}^\star(N)$.

Поэтому топологию пространства $\mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$ можно считать топологией равномерной сходимости на компактах вида $\mu \cdot (E(S) \times E(T))$, то есть топологией, порожденной полунормами

$$|h|_{S,T} = \sup_{\alpha\in E(S), \beta\in E(T)} |h(\alpha, \beta)|$$

Из леммы 8.6 следует, что

$$|h|_{S,T} = \sup_{\alpha\in E(S), \beta\in E(T)} |h(\alpha, \beta)| = (8.22) = \sup_{s\in S, t\in T} |h(\delta_s, \delta_t)| \tag{8.24}$$

Действительно, поскольку функция $|h|$ непрерывна на компакте $E(S) \times E(T)$, она достигает максимума в какой-то точке $(\alpha_M, \beta_M) \in E(S) \times E(T)$:

$$\max_{\alpha\in E(S), \beta\in E(T)} |h(\alpha, \beta)| = |h(\alpha_M, \beta_M)|$$

Если зафиксировать α_M и рассмотреть функционал $\beta \mapsto h(\alpha_M, \beta)$, то по формуле (8.22) получим:

$$|h(\alpha_M, \beta_M)| = \max_{\beta\in E(T)} |h(\alpha_M, \beta)| = \sup_{t\in T} |h(\alpha_M, \delta_t)| = |h(\alpha_M, \delta_{t_M})|$$

для некоторого $t_M \in T$. Точно также, если зафиксировать $t_M \in T$ и рассмотреть функционал $\alpha \mapsto h(\alpha, \delta_{t_M})$, то опять по формуле (8.22) получим:

$$|h(\alpha_M, \delta_{t_M})| = \max_{\alpha\in E(S)} |h(\alpha, \delta_{t_M})| = |h(\delta_{s_M}, \delta_{t_M})|$$

для некоторого $s_M \in S$. Вместе это дает (8.24):

$$|h|_{S,T} = \max_{\alpha\in E(S), \beta\in E(T)} |h(\alpha, \beta)| = |h(\alpha_M, \beta_M)| = |h(\alpha_M, \delta_{t_M})| = |h(\delta_{s_M}, \delta_{t_M})| = \max_{s\in S, t\in T} |h(\delta_s, \delta_t)|$$

Остается заметить, что по лемме 8.7,

$$\mathbb{C} \oslash (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N)) = \mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N)),$$

и поэтому топология в $\mathbb{C} \oslash (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$ совпадает с топологией в $\mathbb{C} : (\mathcal{C}^\star(M), \mathcal{C}^\star(N))$. $\square$

Доказательство. Доказательство теоремы 8.4. Определим $\varPhi$ формулой

$$\varPhi(w)(\alpha,\beta)=\alpha\otimes\beta(w)$$

(где $\alpha\otimes\beta$ определено формулой (8.12)). Проверим его инъективность:

$$w\ne 0 \quad\Rightarrow\quad \exists a\in M, b\in N \quad w(a,b)\ne 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \varPhi(w)(\delta_a,\delta_b)=\delta_a\otimes\delta_b(w)=\delta_{(a,b)}(w)=w(a,b)\ne 0 \quad\Rightarrow\quad \varPhi(w)\ne 0$$

Теперь сюръективность. Если $h\in\mathbb{C}\oslash(\mathcal{C}^\star(M),\mathcal{C}^\star(N))$, то положив

$$w(s,t)=h(\delta_s,\delta_t),\qquad s\in N, t\in N$$

мы получим, что, поскольку вложения $\delta: M\to\mathcal{C}^\star(M)$ и $\delta: N\to\mathcal{C}^\star(N)$ непрерывны, а $h:\mathcal{C}^\star(M)\times\mathcal{C}^\star(N)\to\mathbb{C}$ – непрерывная билинейная форма, функция $w: M\times N\to\mathbb{C}$ должна быть непрерывна на каждом компакте вида $S\times T$. Отсюда следует, что w непрерывна на всем пространстве $M\times N$. Покажем, что $\varPhi(w)=h$, то есть что

$$\varPhi(w)(\alpha,\beta)=h(\alpha,\beta)$$

Поскольку δ-функции полны в $\mathcal{C}^\star(M)$ и $\mathcal{C}^\star(N)$, это равенство достаточно проверить для δ-функций. Действительно,

$$\varPhi(w)(\delta_a,\delta_b)=\delta_a\otimes\delta_b(w)=\delta_{(a,b)}(w)=w(a,b)=h(\delta_a,\delta_b)$$

Мы поняли, что отображение $\varPhi:\mathcal{C}(M\times N)\to\mathbb{C}:(\mathcal{C}^\star(M),\mathcal{C}^\star(N))=\mathcal{C}(M)\odot\mathcal{C}(N)$ биективно. Чтобы убедиться, что оно является гомеоморфизмом, нужно воспользоваться леммой 8.8: полунормы, порождающие топологию в $\mathbb{C}:(\mathcal{C}^\star(M),\mathcal{C}^\star(N))$ при отображении $\varPhi$ превращаются в полунормы, порождающие топологию в $\mathcal{C}(M\times N)$:

$$|\varPhi(w)|_{S,T}=\sup_{s\in S,t\in T}|\varPhi(w)(\delta_s,\delta_t)|=\sup_{s\in S,t\in T}|w(s,t)|$$

Формула (8.16) следует из (8.14):

$$\varPhi(u\otimes v)(\alpha,\beta)=(\alpha\otimes\beta)(u\otimes v)=(8.14)=\alpha(u)\cdot\beta(v)=(u\odot v)(\alpha,\beta)$$

Единственность морфизма $\varPhi$, удовлетворяющего (8.16), следует из того, что функции $u\otimes v$ плотны в $\mathcal{C}(M\times N)$.

Мы доказали существование морфизма $\varPhi$ с нужными свойствами. После этого морфизм $\varPsi$ определяется по формуле (8.19), и легко проверяется, что он также обладает нужными свойствами. □

Следствие 8.9. *Билинейные формы*

$$(u,v)\in\mathcal{C}(M)\times\mathcal{C}(N)\quad\mapsto\quad u\otimes v\in\mathcal{C}(M\times N)$$
$$(\alpha,\beta)\in\mathcal{C}^\star(M)\times\mathcal{C}^\star(N)\quad\mapsto\quad \alpha\otimes\beta\in\mathcal{C}^\star(M\times N)$$

непрерывны.

Доказательство. Эти формы являются композицией форм

$$(u,v)\in\mathcal{C}(M)\times\mathcal{C}(N)\quad\mapsto\quad u\otimes v\in\mathcal{C}(M)\odot\mathcal{C}(N)$$
$$(\alpha,\beta)\in\mathcal{C}^\star(M)\times\mathcal{C}^\star(N)\quad\mapsto\quad \alpha\otimes\beta\in\mathcal{C}^\star(M)\circledast\mathcal{C}^\star(N)$$

(непрерывных в силу предложений 7.1 и 7.4) и морфизмов $\varPhi^{-1}:\mathcal{C}(M)\odot\mathcal{C}(N)\to\mathcal{C}(M\times N)$, $\varPsi^{-1}:\mathcal{C}^\star(M)\circledast\mathcal{C}^\star(N)\to\mathcal{C}^\star(M\times N)$, □

(b) Интегрирование распределений на гладком многообразии

Пусть M – гладкое многообразие (в обычном смысле, [43]). Пространство $\mathcal{E}(M)=\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{C})$ гладких функций $u: M\to\mathbb{C}$ с обычной топологией (равномерной сходимости на компактах по каждой производной) является стереотипным пространством (например, потому что оно полно и бочечно). Сопряженное пространство

$$\mathcal{E}^\star(M)=\{\mathcal{E}(M)\}^\star$$

состоит из распределений с компактным носителем на M.

Определение. Назовем отображение $\xi : M \to X$ в стереотипное пространство X *гладким*, если для всякого линейного непрерывного функционала $f : X \to \mathbb{C}$ композиция $f \circ \xi : M \to \mathbb{C}$ является гладкой функцией, причем отображение $f \in X^\star \mapsto f \circ \xi \in \mathcal{E}(M)$ непрерывно.

Аналогично теореме 8.1 доказывается

Теорема 8.10. *Для всякого гладкого отображения $\xi : M \to X$ в (произвольное) стереотипное пространство X существует единственный морфизм стереотипных пространств $\Xi : \mathcal{E}^\star(M) \to X$, удовлетворяющий тождеству*

$$\Xi(\delta_s) = \xi(s), \qquad s \in M \tag{8.25}$$

то есть, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X & \\ M \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{E}^\star(M) \arrow[ul, "\Xi"'] \end{tikzcd}, \tag{8.26}$$

в которой δ – вложение M в $\mathcal{E}^\star(M)$ в качестве δ-функций:

$$\delta_s(u) = u(s), \qquad u \in \mathcal{C}(M), s \in M$$

Определение. Морфизм Ξ в диаграмме (8.26) называется *интегралом по распределению $\alpha \in \mathcal{E}^\star(M)$ со значениями в пространстве X* и обозначается

$$\Xi(\alpha) = \int_M^X \xi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) \qquad (\alpha \in \mathcal{E}^\star(M))$$

Как и интегралы по мере, интегралы по распределению обладают свойствами $1^\circ - 4^\circ$, отмечавшимися в § 8(a).

Обозначение. Для любых функций $u \in \mathcal{E}(M), v \in \mathcal{E}(N)$ символом $u \otimes v$ обозначается функция $u \otimes v \in \mathcal{E}(M \times N)$, определенная формулой: $\quad \forall (s,t) \in M \times N$

$$(u \otimes v)(s,t) = u(s) \cdot v(t)$$

Для любых двух распределений $\alpha \in \mathcal{E}^\star(M), \beta \in \mathcal{E}^\star(N)$ символом $\alpha \otimes \beta$ обозначается распределение $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{E}^\star(M \times N)$ определенное формулой: $\quad \forall w \in \mathcal{E}(M \times N)$

$$(\alpha \otimes \beta)(w) = \int_N \left(\int_M w(s,t)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) \right) \mathrm{d}\,\beta(t) = \int_M \left(\int_N w(s,t)\,\mathrm{d}\,\beta(t) \right) \mathrm{d}\,\alpha(s)$$

Теорема 8.11. *Для любых двух гладких многообразий M и N*

(a) *существует единственный изоморфизм стереотипных пространств*

$$\varPhi : \mathcal{E}(M \times N) \to \mathcal{E}(M) \odot \mathcal{E}(N) \cong \mathcal{E}(M) \circledast \mathcal{E}(N),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\varPhi(u \otimes v) = u \odot v, \qquad u \in \mathcal{E}(M), v \in \mathcal{E}(N)$$

(b) *существует единственный изоморфизм стереотипных пространств*

$$\varPsi : \mathcal{E}^\star(M \times N) \to \mathcal{E}^\star(M) \circledast \mathcal{E}^\star(N) \cong \mathcal{E}^\star(M) \odot \mathcal{E}^\star(N),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\varPsi(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circledast \beta, \qquad \alpha \in \mathcal{E}^\star(M), \beta \in \mathcal{E}^\star(N)$$

(c) *эти морфизмы $\varPhi, \varPsi$ связаны формулой*

$$\varPsi = (\varPhi^\star)^{-1}$$

Доказательство. Здесь изоморфизм $\mathcal{E}(M) \odot \mathcal{E}(N) \cong \mathcal{E}(M \times N)$ доказывается как в теореме 8.4, а изоморфизм $\mathcal{E}(M) \circledast \mathcal{E}(N) \cong \mathcal{E}(M \times N)$ – классический факт [34]. □

Следствие 8.12. *Билинейные формы*

$$(u, v) \in \mathcal{E}(M) \times \mathcal{E}(N) \quad \mapsto \quad u \otimes v \in \mathcal{E}(M \times N)$$
$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}^\star(M) \times \mathcal{E}^\star(N) \quad \mapsto \quad \alpha \otimes \beta \in \mathcal{E}^\star(M \times N)$$

непрерывны.

(c) Интегрирование голоморфных потоков на многообразии Штейна

Пусть M – многообразие Штейна [44], то есть комплексно-аналитическое многообразие, у которого, в частности, пространство $\mathcal{O}(M)$ всюду определенных голоморфных функций $u : M \to \mathbb{C}$ разделяет точки M. Пространство $\mathcal{O}(M)$ (с топологией равномерной сходимости на компактах) является стереотипным пространством (потому что оно полно и бочечно).

Элементы сопряженного пространства

$$\mathcal{O}^\star(M) = \{\mathcal{O}(M)\}^\star$$

называются голоморфными потоками на M.

Определение. Назовем отображение $\xi : M \to X$ в стереотипное пространство X *голоморфным*, если для всякого линейного непрерывного функционала $f : X \to \mathbb{C}$ композиция $f \circ \xi : M \to \mathbb{C}$ является голоморфной функцией, причем отображение $f \in X^\star \mapsto f \circ \xi \in \mathcal{O}(M)$ непрерывно.

Аналогично теореме 8.1 доказывается

Теорема 8.13. *Для всякого голоморфного отображения $\xi : M \to X$ в (произвольное) стереотипное пространство X существует единственный морфизм стереотипных пространств $\Xi : \mathcal{O}^\star(M) \to X$, удовлетворяющий тождеству*

$$\Xi(\delta_s) = \xi(s), \qquad s \in M \tag{8.27}$$

то есть, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X & \\ M \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{O}^\star(M) \arrow[ul, "\Xi"'] \end{tikzcd}, \tag{8.28}$$

в которой δ – вложение M в $\mathcal{O}^\star(M)$ в качестве δ-функций:

$$\delta_s(u) = u(s), \qquad u \in \mathcal{C}(M), s \in M$$

Определение. Морфизм Ξ в диаграмме (8.28) называется *интегралом по потоку $\alpha \in \mathcal{O}^\star(M)$ со значениями в пространстве X* и обозначается

$$\Xi(\alpha) = \int_M^X \xi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) \qquad (\alpha \in \mathcal{O}^\star(M))$$

Как и интегралы по мере и по распределению, интегралы по голоморфному потоку обладают свойствами $1^\circ - 4^\circ$, отмечавшимися в §8(a).

Обозначение. Для любых функций $u \in \mathcal{O}(M), v \in \mathcal{O}(N)$ символом $u \otimes v$ обозначается функция $u \otimes v \in \mathcal{O}(M \times N)$, определенная формулой: $\forall (s,t) \in M \times N$

$$(u \otimes v)(s,t) = u(s) \cdot v(t)$$

Для любых двух потоков $\alpha \in \mathcal{O}^\star(M), \beta \in \mathcal{O}^\star(N)$ символом $\alpha \otimes \beta$ обозначается поток $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{O}^\star(M \times N)$ определенный формулой: $\forall w \in \mathcal{O}(M \times N)$

$$(\alpha \otimes \beta)(w) = \int_N \left(\int_M w(s,t)\,\mathrm{d}\,\alpha(s) \right) \mathrm{d}\,\beta(t) = \int_M \left(\int_N w(s,t)\,\mathrm{d}\,\beta(t) \right) \mathrm{d}\,\alpha(s)$$

Теорема 8.14. *Для любых двух многообразий Штейна M и N*

(a) существует единственный изоморфизм стереотипных пространств

$$\varPhi : \mathcal{O}(M \times N) \to \mathcal{O}(M) \odot \mathcal{O}(N) \cong \mathcal{O}(M) \circledast \mathcal{O}(N),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\varPhi(u \otimes v) = u \odot v, \qquad u \in \mathcal{O}(M), v \in \mathcal{O}(N)$$

(b) *существует единственный изоморфизм стереотипных пространств*

$$\Psi : \mathcal{O}^\star(M \times N) \to \mathcal{O}^\star(M) \circledast \mathcal{O}^\star(N) \cong \mathcal{O}^\star(M) \odot \mathcal{O}^\star(N),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\Psi(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circledast \beta, \qquad \alpha \in \mathcal{O}^\star(M), \beta \in \mathcal{O}^\star(N)$$

(c) *эти морфизмы Φ, Ψ связаны формулой*

$$\Psi = (\Phi^\star)^{-1}$$

Доказательство. Здесь изоморфизм $\mathcal{O}(M) \odot \mathcal{O}(N) \cong \mathcal{O}(M \times N)$ доказывается как в теореме 8.4, а изоморфизм $\mathcal{O}(M) \circledast \mathcal{O}(N) \cong \mathcal{O}(M \times N)$ – классический факт [34]. □

Следствие 8.15. *Билинейные формы*

$$(u, v) \in \mathcal{O}(M) \times \mathcal{O}(N) \quad \mapsto \quad u \otimes v \in \mathcal{O}(M \times N)$$

$$(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}^\star(M) \times \mathcal{O}^\star(N) \quad \mapsto \quad \alpha \otimes \beta \in \mathcal{O}^\star(M \times N)$$

непрерывны.

(d) Интегрирование регулярных потоков на аффинном алгебраическом многообразии

Пусть M – аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{C}$, то есть множество нулей некоторой системы многочленов на $\mathbb{C}^n$ [45]. Обозначим через $\mathcal{R}(M)$ пространство регулярных функций $u : M \to \mathbb{C}$, то есть функций, продолжающихся до многочлена на $\mathbb{C}^n$, или, что эквивалентно, функций $u : M \to \mathbb{C}$, локально на M представимых в виде отношения двух многочленов. Наделим пространство регулярных функций $\mathcal{R}(M)$ *сильнейшей локально-выпуклой топологией.* Тогда, как топологическое векторное пространство, $\mathcal{R}(M)$ будет прямой суммой счетного числа экземпляров поля $\mathbb{C}$: $\mathcal{R}(M) = \mathbb{C}_{\mathbb{N}}$, поэтому $\mathcal{R}(M)$ является стереотипным пространством.

Элементы сопряженного пространства

$$\mathcal{R}^\star(M) = \{\mathcal{R}(M)\}^\star$$

называются регулярными потоками на M.

Определение. Назовем отображение $\xi : M \to X$ в стереотипное пространство X *регулярным*, если для всякого линейного непрерывного функционала $f : X \to \mathbb{C}$ композиция $f \circ \xi : M \to \mathbb{C}$ является регулярной функцией, причем отображение $f \in X^\star \mapsto f \circ \xi \in \mathcal{R}(M)$ непрерывно.

Аналогично теореме 8.1 доказывается

Теорема 8.16. *Для всякого регулярного отображения $\xi : M \to X$ в (произвольное) стереотипное пространство X существует единственный морфизм стереотипных пространств $\Xi : \mathcal{R}^\star(M) \to X$, удовлетворяющий тождеству*

$$\Xi(\delta_s) = \xi(s), \qquad s \in M \tag{8.29}$$

то есть, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & X & \\ M \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{R}^\star(M) \arrow[ul, "\Xi"'] \end{tikzcd} , \tag{8.30}$$

в которой δ – вложение M в $\mathcal{R}^\star(M)$ в качестве δ-функций:

$$\delta_s(u) = u(s), \qquad u \in \mathcal{C}(M), s \in M$$

Определение. Морфизм Ξ в диаграмме (8.30) называется *интегралом по потоку $\alpha \in \mathcal{R}^\star(M)$ со значениями в пространстве X* и обозначается

$$\Xi(\alpha) = \int_M^X \xi(s) \,\mathrm{d}\, \alpha(s) \qquad (\alpha \in \mathcal{R}^\star(M))$$

Вместе с интегралами по мере, по распределению и по голоморфному потоку, интегралы по регулярному потоку потоку обладают свойствами $1^\circ - 4^\circ$, отмечавшимися в § 8(a).

Обозначение. Для любых функций $u \in \mathcal{R}(M), v \in \mathcal{R}(N)$ символом $u \otimes v$ обозначается функция $u \otimes v \in \mathcal{R}(M \times N)$, определенная формулой: $\quad \forall (s,t) \in M \times N$

$$(u \otimes v)(s,t) = u(s) \cdot v(t)$$

Для любых двух потоков $\alpha \in \mathcal{R}^\star(M), \beta \in \mathcal{R}^\star(N)$ символом $\alpha \otimes \beta$ обозначается поток $\alpha \otimes \beta \in \mathcal{R}^\star(M \times N)$ определенный формулой: $\quad \forall w \in \mathcal{R}(M \times N)$

$$(\alpha \otimes \beta)(w) = \int_N \left(\int_M w(s,t) \,\mathrm{d}\, \alpha(s) \right) \mathrm{d}\, \beta(t) = \int_M \left(\int_N w(s,t) \,\mathrm{d}\, \beta(t) \right) \mathrm{d}\, \alpha(s)$$

Теорема 8.17. *Для любых двух аффинных алгебраических многообразий M и N*

(a) *существует единственный изоморфизм стереотипных пространств*

$$\varPhi : \mathcal{R}(M \times N) \to \mathcal{R}(M) \odot \mathcal{R}(N) \cong \mathcal{R}(M) \circledast \mathcal{R}(N),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\varPhi(u \otimes v) = u \odot v, \qquad u \in \mathcal{R}(M), v \in \mathcal{R}(N)$$

(b) *существует единственный изоморфизм стереотипных пространств*

$$\varPsi : \mathcal{R}^\star(M \times N) \to \mathcal{R}^\star(M) \circledast \mathcal{R}^\star(N) \cong \mathcal{R}^\star(M) \odot \mathcal{R}^\star(N),$$

удовлетворяющий тождеству

$$\varPsi(\alpha \otimes \beta) = \alpha \circledast \beta, \qquad \alpha \in \mathcal{R}^\star(M), \beta \in \mathcal{R}^\star(N)$$

(c) *эти морфизмы $\varPhi, \varPsi$ связаны формулой*

$$\varPsi = (\varPhi^\star)^{-1}$$

Доказательство. Здесь изоморфизм $\mathcal{R}(M) \odot \mathcal{R}(N) \cong \mathcal{R}(M \times N)$ доказывается как в теореме 8.4, а изоморфизм $\mathcal{R}(M) \circledast \mathcal{R}(N) \cong \mathcal{R}(M \times N)$ следует из (7.37). $\square$

Следствие 8.18. *Билинейные формы*

$$(u,v) \in \mathcal{R}(M) \times \mathcal{R}(N) \quad \mapsto \quad u \otimes v \in \mathcal{R}(M \times N)$$

$$(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}^\star(M) \times \mathcal{R}^\star(N) \quad \mapsto \quad \alpha \otimes \beta \in \mathcal{R}^\star(M \times N)$$

непрерывны.

§ 9 Стереотипная аппроксимация

(a) Пространство операторов $\mathcal{L}(X)$

Для всякого стереотипного пространства X символом $\mathcal{L}(X)$ мы обозначаем внутреннее пространство эндоморфизмов X (*пространство операторов* на X), а символом $\mathcal{L}^\star(X)$ – его сопряженное пространство:

$$\mathcal{L}(X) := X \oslash X, \qquad \mathcal{L}^\star(X) := \{X \oslash X\}^\star \tag{9.1}$$

Пространство $\mathcal{L}(X)$ состоит из линейных непрерывных операторов $\alpha : X \to X$ и наделено топологией, являющейся псевдонасыщением топологии равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах (=компактах) в X. Из определений $\circledast$ и $\odot$ имеем,

$$\mathcal{L}(X) = X^\star \odot X, \qquad \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X. \tag{9.2}$$

Из теоремы 6.2 следует

Теорема 9.1. *Отображение сопряжения $\alpha \mapsto \alpha^\star$ устанавливает изоморфизм стереотипных пространств*

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X^\star)$$

Кроме того, из теорем 6.14 и 6.15 следует

Теорема 9.2. *Для любого стереотипного пространства X отображение композиции*

$$(\beta, \alpha) \in \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \quad \longmapsto \quad \beta \circ \alpha \in \mathcal{L}(X)$$

и дробь

$$(\beta, \alpha) \in \mathcal{L}(Y) \times \mathcal{L}(X) \quad \longmapsto \quad \beta \oslash \alpha \in \mathcal{L}(Y \oslash X)$$

являются непрерывными билинейными формами.

В соответствии с определениями § 7(a) и § 7(b), для любых $x \in X$ и $f \in X^\star$ мы определяем *одномерный оператор* $f \odot x \in X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$ и *одномерный тензор* $f \circledast x \in X^\star \circledast X = \mathcal{L}^\star(X)$

$$f \circledast x(\alpha) = f(\alpha(x)), \qquad f \odot x\,(y) = f(y) \cdot x \qquad (\alpha \in \mathcal{L}(X),\, y \in X) \tag{9.3}$$

Очевидны тождества $(f, g \in X^\star, x, y \in X, \alpha, \beta \in \mathcal{L}(X))$:

$$\alpha \cdot (f \circledast x) \cdot \beta = (f \circ \beta) \circledast \alpha(x) \tag{9.4}$$

$$\alpha \circ (f \odot x) \circ \beta = (f \circ \beta) \odot \alpha(x) \tag{9.5}$$

$$(f \odot x) \cdot (g \circledast y) = f(y) \cdot g \circledast x = (f \circledast x) \cdot (g \odot y) \tag{9.6}$$

$$(f \odot x) \circ (g \odot y) = f(y) \cdot g \odot x \tag{9.7}$$

$$f \circledast x\,(g \odot y) = f(y) \cdot g(x) = g \circledast y\,(f \odot x) \tag{9.8}$$

Приведем некоторые примеры.

Пример 9.3. В силу предложения 7.26, для любого множества индексов I топология пространств операторов $\mathcal{L}(\mathbb{C}^I)$ и $\mathcal{L}(\mathbb{C}_I)$ есть топология равномерной сходимости на компактах, причем эти пространства изоморфны $(\mathbb{C}_I)^I$:

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^I) = \mathbb{C}^I : \mathbb{C}^I = (\mathbb{C}_I)^I = \mathbb{C}_I : \mathbb{C}_I = \mathcal{L}(\mathbb{C}_I)$$

Пример 9.4. *Если X не является монтелевским пространством, то $\mathcal{L}(X)$ не является бочечным, и не обладает свойством Гейне-Бореля.* Это следует из того, что стереотипное пространство X всегда вкладывается как дополняемое подпространство в $\mathcal{L}(X)$. Действительно, если зафиксировать $x_0 \in X$ и $f_0 \in X^\star$ так, чтобы $f_0(x_0) = 1$, то отображения

$$\sigma : X \to \mathcal{L}(X), \quad \sigma(x) = f_0 \odot x \qquad \pi : \mathcal{L}(X) \to X, \quad \pi(\varphi) = \varphi(x_0)$$

будут связаны равенством

$$\pi \circ \sigma = 1_X$$

Отсюда мы получаем, что если $\mathcal{L}(X)$ – бочечное пространство, то X – тоже бочечное (как фактор-пространство $\mathcal{L}(X)$). С другой стороны, $\mathcal{L}(X^\star) = \mathcal{L}(X)$ – тоже бочечное, поэтому $X^\star$ бочечно (как фактор-пространство $\mathcal{L}(X^\star)$). По теореме 4.12, это означает, что X обладает свойством Гейне-Бореля. Таким образом, X является бочечным и обладает свойством Гейне-Бореля, то есть (теорема 4.12) является монтелевским. Тот же результат получился бы, если бы $\mathcal{L}(X)$ обладало свойством Гейне-Бореля.

В частности, мы получаем, что *для бесконечномерного банахова пространства (или пространства Фреше) X пространство операторов $\mathcal{L}(X)$ не будет ни банаховым пространством, ни пространством Фреше, ни, бочечным пространством, ни пространством Смит, ни пространством Браунера, ни пространством Гейне-Бореля.*

(b) Стереотипная аппроксимация и проблема однозначности следа

Условимся говорить, что стереотипное пространство X обладает *стереотипной аппроксимацией*, если единичный оператор 1_X приближается конечномерными в пространстве $\mathcal{L}(X) = X \oslash X$. Это означает, что конечномерные операторы $\mathcal{F}(X)$ плотны в $\mathcal{L}(X)$, то есть выполняется равенство

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{G}(X) = \overline{\mathcal{F}(X)}$$

где $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(X,X), \mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X,X)$. Из теоремы 9.2 следует

Теорема 9.5. *X обладает стереотипной аппроксимацией $\Leftrightarrow$ $X^\star$ обладает стереотипной аппроксимацией.*

Из формул (9.2) следует, что между $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}^\star(X)$ имеется естественное преобразование Гротендика:

$$@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X) \qquad @_X(f \circledast x) = f \odot x, \quad f \in X^\star, x \in X \tag{9.9}$$

Свойства этого отображения напрямую связаны со свойством стереотипной аппроксимации:

Теорема 9.6. *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны:*

(i) X обладает стереотипной аппроксимацией;

(ii) преобразование Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$ является мономорфизмом (в категории $\mathfrak{Ste}$);

(iii) преобразование Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$ является эпиморфизмом (в категории $\mathfrak{Ste}$);

(iv) для всякого стереотипного пространства Y преобразование Гротендика $@ : Y \circledast X \to Y \odot X$ является мономорфизмом (в категории $\mathfrak{Ste}$);

(v) для всякого стереотипного пространства Y преобразование Гротендика $@ : Y \circledast X \to Y \odot X$ является эпиморфизмом (в категории $\mathfrak{Ste}$).

Доказательство. По теореме 7.10 преобразование Гротендика $@_X$ имеет следующие ядро и образ

$$\operatorname{Ker} @_X = \mathcal{G}(X)^{\perp\vartriangle} \qquad \operatorname{Im} @_X = \mathcal{G}(X)$$

Отсюда следует эквивалентность условий $(i), (ii), (iii)$:

$$(i) \Leftrightarrow \mathcal{G}(X) = \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \operatorname{Im} @_X = \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow (iii)$$

$$(i) \Leftrightarrow \mathcal{G}(X) = \mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \mathcal{G}(X)^{\perp\vartriangle} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} @_X = 0 \Leftrightarrow (ii)$$

Далее, если X обладает аппроксимацией, то в силу теоремы 9.5 $X^\star$ тоже обладает аппроксимацией, поэтому

$$\exists \varkappa_i \in \mathcal{F}(X^\star, X^\star) \quad \varkappa_i \overset{X^\star \oslash X^\star}{\longrightarrow} 1_{X^\star} \quad (i \to \infty)$$

Значит (теорема 6.15) $\forall \varphi \in Y \oslash X^\star = X \odot Y \quad \exists \varphi_i = \varphi \circ \varkappa_i \in \mathcal{F}(X^\star, Y) \quad \varphi_i \overset{Y \oslash X^\star}{\longrightarrow} \varphi \quad (i \to \infty)$ Таким образом $\varphi \in \overline{\mathcal{F}(X^\star, Y)} = \mathcal{G}(X^\star, Y) = \operatorname{Im} @$.

Мы доказали систему импликаций $(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$, $(i) \Rightarrow (v)$. Остается добавить к ней очевидные импликации $(v) \Rightarrow (iv)$ и $(v) \Rightarrow (iii)$ и теорема будет доказана. $\square$

Замечание 9.7. Понятно, что стереотипная аппроксимация влечет за собой обычную аппроксимацию. Отсюда следует, что существуют пространства без стереотипной аппроксимации. По теореме 9.6 для них преобразование Гротендика $@_X : X^\star \circledast X \to X^\star \odot X$ не будет эпиморфизмом и это, в частности, означает, что алгебраическое тензорное произведение $X^\star \otimes X$ не будет плотно в инъективном тензорном произведении $X^\star \odot X$. Таким образом, доказано недостающее звено предложения 7.5.

Определим теперь на проективном тензорном произведении $X^\star \circledast X = \mathcal{L}^\star(X)$ *функционал свертки* формулой

$$\operatorname{cont} : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathbb{C}, \qquad \operatorname{cont}(\alpha) = \alpha(1_X) \tag{9.10}$$

Поскольку на элементарных тензорах он, очевидно, действует по формуле

$$\operatorname{cont}(f \circledast x) = f(x),$$

этот функционал будет (единственным по теореме 7.3) непрерывным продолжением на $X^\star \circledast X$ билинейной формы $(f,x) \mapsto f(x)$ (что и оправдывает наше определение).

Условимся говорить, что *в X корректно определен след*, если ядро $\operatorname{Ker} @_X$ преобразования Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X)$ содержится в ядре $\operatorname{Ker}(\operatorname{cont})$ функционала свертки $\operatorname{cont} : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathbb{C}$:

$$\operatorname{Ker} @_X \subseteq \operatorname{Ker}(\operatorname{cont})$$

Ясно, что в этом случае свертка, рассматриваемая как функционал на конечномерных операторах, однозначно продолжается до *функционала следа* $\operatorname{tr} : @_X(X^\star \circledast X) \to \mathbb{C}$

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}(@_X u) = \operatorname{cont}(u) \tag{9.11}$$

на всех операторах $\varphi = @_X u$, являющихся образами тензоров u из $X^\star \circledast X$ при преобразовании Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) = X^\star \circledast X \to X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$.

Теорема 9.8. *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны:*

(i) X обладает стереотипной аппроксимацией;

(ii) в X корректно определен след.

Доказательство. Действительно, по теореме 7.10, $\operatorname{Ker} @_X \subseteq \operatorname{Ker}(\operatorname{cont}) \Leftrightarrow \mathcal{G}(X)^\perp \subseteq \{1_X\}^\perp \Leftrightarrow \{1_X\} \subseteq \mathcal{G}(X) \Leftrightarrow X$ обладает стереотиной аппроксимацией. □

Нам остается заметить, что след tr, если он корректно определен, связан с преобразованием Гротендика $@_X$ формулой

$$u(\alpha) = \operatorname{tr}(@_X u \circ \alpha) = \operatorname{tr}(\alpha \circ @_X u), \qquad \alpha \in \mathcal{L}(X), u \in \mathcal{L}^\star(X) \tag{9.12}$$

Это достаточно проверить для $u = f \circledast x$: $\operatorname{tr}(@_X u \circ \alpha) = \operatorname{tr}(f \odot x \circ \alpha) = \operatorname{tr}((f \circ \alpha) \odot x) = \operatorname{cont}((f \circ \alpha) \circledast x) = f(\alpha(x)) = (f \circledast x)(\alpha) = u(\alpha)$. И аналогично, $\operatorname{tr}(\alpha \circ @_X u) = u(\alpha)$.

(c) Сохранение стереотипной аппроксимации тензорными произведениями

Теорема 9.9. *Пусть X и Y – стереотипные пространства со свойством стереотипной аппроксимации. Тогда пространства $Y \oslash X, X \circledast Y, X \odot Y$ также обладают свойством стереотипной аппроксимации.*

Для доказательства нам понадобится

Лемма 9.10. *Если $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ и $\beta \in \mathcal{L}(Y)$ – конечномерные операторы, то дробь $\beta \oslash \alpha \in \mathcal{L}(Y \oslash X)$ – тоже конечномерный оператор.*

Доказательство. Надо убедиться, что при фиксированных α и β операторы вида $(\beta \oslash \alpha)(\varphi) = \beta \circ \varphi \circ \alpha, \varphi \in Y \oslash X$ образуют конечномерное подпространство в $\mathcal{L}(Y \oslash X)$. Представим α и β в виде конечных сумм одномерных операторов

$$\alpha = \sum_{i=1}^n f_i \odot x_i \qquad \beta = \sum_{j=1}^k g_j \odot y_j \qquad x_i \in X, f_i \in X^\star, y_j \in Y, g_j \in Y^\star$$

Тогда $(\beta \oslash \alpha)(\varphi) = \beta \circ \varphi \circ \alpha = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n g_j(\varphi(x_i)) f_i \odot y_j$ Когда φ пробегает $Y \oslash X$, каждый множитель $g_j(\varphi(x_i))$ пробегает $\mathbb{C}$, значит $(\beta \oslash \alpha)(\varphi)$ пробегает конечномерное подпространство в $Y \oslash X$ натянутое на вектора $f_i \odot y_j$. □

Доказательство. Докажем теперь теорему 9.9. Если X и Y – пространства со свойством стереотипной аппроксимации, то можно подобрать направленности конечномерных операторов α_i и β_j такие, что

$$\alpha_i \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{L}(X)}{\longrightarrow}} 1_X, \qquad \beta_j \underset{j\to\infty}{\overset{\mathcal{L}(Y)}{\longrightarrow}} 1_Y$$

По теореме 6.15, дробь $(\alpha, \beta) \in \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(Y) \longmapsto \beta \oslash \alpha \in \mathcal{L}(Y \oslash X)$ является непрерывной билинейной формой, и, следовательно, она раздельно непрерывна. Отсюда

$$\beta_j \oslash \alpha_i \underset{j\to\infty}{\overset{\mathcal{L}(Y\oslash X)}{\longrightarrow}} 1_Y \oslash \alpha_i \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{L}(Y\oslash X)}{\longrightarrow}} 1_Y \oslash 1_X = 1_{Y \oslash X}$$

причем $\beta_j \oslash \alpha_i$ – конечномерные операторы в $\mathcal{L}(Y \oslash X)$, по лемме 9.10. Таким образом, единичный оператор $1_{Y \oslash X}$ аппрокимируется в $\mathcal{L}(Y \oslash X)$ конечномерными. Следовательно, $Y \oslash X$ обладает стереотипной аппроксимацией.

Мы доказали, что стереотипная аппроксимация сохраняется операцией $\oslash$. Отсюда уже по теореме 9.5 следует что она сохраняется операциями $\circledast$ и $\odot$. □

Замечание 9.11. В силу важности теоремы 9.9, мы полагаем, будет полезно объяснить, почему тем же методом нельзя доказать что классическая аппроксимация наследуется в категории банаховых пространств банаховыми пространствами $B(X)$ ограниченных операторов. Если бы это было так (то есть, если бы она наследовалась), мы получили бы, что банахово пространство $B(H)$ операторов на (бесконечномерном) гильбертовом пространстве H также обладает свойством классической аппроксимации, что противоречило бы результату Шанковского [33] (в соответствии с которым $B(H)$ не обладает свойством аппроксимации).

Объяснение заключается в том, что в случае $B(H)$ аналог теоремы 6.15 перестает быть верным. Действительно, чтобы использовать наш метод, мы сначала должны были бы доказать, что следующая билинейная форма раздельно непрерывна:

$$(\beta,\alpha)\in(H:H)\times(H:H)\mapsto\beta:\alpha\in B(H):B(H) \tag{9.13}$$

(здесь $\beta:\alpha$ и $H:H$ – обозначения, введенные в § 5). Но это не так: если взять, например, направленность β_j операторов конечного ранга, аппроксимирующую 1_H в $H:H$,

$$\beta_j \underset{j\to\infty}{\overset{H:H}{\longrightarrow}} 1_H$$

и положить $\alpha=1_H$, то условие

$$\beta_j:\alpha=\beta_j:1_H \underset{j\to\infty}{\overset{B(H):B(H)}{\longrightarrow}} 1_H:1_H=1_{B(H)}$$

означало бы, что

$$(\beta_j:\alpha)(\varphi)=(\beta_j:1_H)(\varphi)=\beta_j\circ\varphi \underset{\varphi\in\Phi}{\overset{B(H):B(H)}{\rightrightarrows}} \varphi$$

для любого компактного множества $\Phi\in B(H)$. В частности, для $\Phi=\{1_H\}$ мы получили бы

$$\beta_j\circ 1_H=\beta_j \underset{\varphi\in\Phi}{\overset{B(H)}{\longrightarrow}} 1_H,$$

то есть, 1_H аппроксимируется (по норме) в $B(H)$ операторами конечного ранга. Разумеется, такое возможно только если 1_H – компактный оператор, то есть, если H конечномерно.

Это противоречие говорит о том, что билинейная форма (9.13) не может быть раздельно непрерывна, и это показывает, что теорема 9.9 не противоречит результату Шанковского [33].

Теорема 9.12. *Стереотипная аппроксимация наследуется прямыми произведениями и прямыми суммами.*

Доказательство. Доказательство достаточно провести для прямых сумм. Пусть $X=\oplus_{\alpha\in A}X^\alpha$ и для всякого $\alpha\in A$ имеется направленность конечномерных операторов $p^\alpha_{\nu^\alpha}\longrightarrow 1_{X^\alpha}$. Пусть M – конечное подмножество в A, $X^M=\oplus_{\alpha\in M}X^\alpha$ и $\pi^M:X\to X^M$ – соответствующая проекция, а $\sigma^M:X^M\to X$ – вложение. Тогда $\sigma^M\circ\pi^M$ – вполне ограниченное семейство в $X:X$, а, поскольку с другой стороны, $\sigma^M\circ\pi^M \underset{M\to A}{\overset{X:X}{\longrightarrow}} 1_X$, мы получаем, что $\sigma^M\circ\pi^M \underset{M\to A}{\overset{X\oslash X}{\longrightarrow}} 1_X$. Следовательно, $\sigma^M\circ\oplus_{\alpha\in M}p^\alpha_{\nu^\alpha}\circ\pi^M \underset{\nu^\alpha\to\infty}{\overset{X\oslash X}{\longrightarrow}} \sigma^M\circ 1\circ\pi^M \underset{M\to A}{\overset{X\oslash X}{\longrightarrow}} 1_X$. □

(d) Аппроксимация, как категорное условие в $(\mathfrak{Ste},\circledast)$ и $(\mathfrak{Ste},\odot)$

Свойство стереотипной аппроксимации может быть описано в терминах свойств моноидальных категорий $(\mathfrak{Ste},\circledast)$ и $(\mathfrak{Ste},\odot)$. Отметим сначала следующие очевидные факты.

Теорема 9.13. *Пусть $\varphi:A\to B$ – морфизм стереотипных пространств. Тогда*

(a) если $\varphi:A\to B$ – мономорфизм, то для всякого стереотипного пространства X

- *морфизм $(\varphi\oslash 1_X):(A\oslash X)\to(B\oslash X)$ является мономорфизмом (в $\mathfrak{Ste}$);*
- *морфизм $(\varphi\odot 1_X):(A\odot X)\to(B\odot X)$ является мономорфизмом (в $\mathfrak{Ste}$);*

(b) если $\varphi:A\to B$ – эпиморфизм, то для всякого стереотипного пространства X

- *морфизм $(1_X\oslash\varphi):(X\oslash B)\to(X\oslash A)$ является мономорфизмом (в $\mathfrak{Ste}$);*

– *морфизм* $(\varphi \circledast 1_X) : (A \circledast X) \to (B \circledast X)$ *является эпиморфизмом (в* $\mathfrak{Ste}$*).*

Двойственные утверждения, как оказывается, напрямую связаны со свойством аппроксимации.

Теорема 9.14 (критерий проективности)**.** *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны*

(i) X обладает свойством стереотипной аппроксимации;

(ii) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ морфизм $\varphi \oslash 1_X : (A \oslash X) \to (B \oslash X)$ также является эпиморфизмом;

(iii) для всякого биморфизма $\varphi : A \to B$ морфизм $\varphi \oslash 1_X : (A \oslash X) \to (B \oslash X)$ также является биморфизмом.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть X обладает стереотипной аппроксимацией, а $\varphi : A \to B$ – эпиморфизм. Возьмем произвольный морфизм $\beta : X \to B$ Из свойства аппроксимации для X следует что $\beta : X \to B$ приближается конечномерными операторами $\beta_i : X \to B$

$$\beta_i \overset{B\oslash X}{\longrightarrow} \beta \quad (i \to \infty)$$

Из эпиморфности $\varphi : A \to B$ следует, что каждый $\beta_i : X \to B$ приближается конечномерными операторами вида $\varphi \circ \alpha_i^j$

$$\varphi \circ \alpha_i^j \overset{B\oslash X}{\longrightarrow} \beta \quad (j \to \infty)$$

Таким образом, каждый $\beta \in B \oslash X$ приближается операторами вида $(\varphi \oslash 1_X)(\alpha_i^j)$:

$$\beta = \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} \varphi \circ \alpha_i^j = \lim_{i\to\infty} \lim_{j\to\infty} (\varphi \oslash 1_X)(\alpha_i^j)$$

Значит $\varphi \oslash 1_X : (A \oslash X) \to (B \oslash X)$ – эпиморфизм.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Если $\varphi : A \to B$ – биморфизм, то мономорфность $\varphi \oslash 1_X : (A \oslash X) \to (B \oslash X)$ очевидна, а эпиморфность гарантируется условием (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$ Пусть выполнено (iii). Рассмотрим на X сильнейшую локально-выпуклую топологию ω. Она превращает X в локально-выпуклую прямую сумму некоторого семейства экземпляров $\mathbb{C}$: $X_\omega = \mathbb{C}_I$. Поскольку ω мажорирует исходную топологию τ, определен биморфизм $\varphi : X_\omega \to X$. По условию (iii), $\varphi \oslash 1_X : (X_\omega \oslash X) \to (X \oslash X)$ также будет биморфизмом. Поэтому, в частности, тождественное отображение $\beta = 1_X : X \to X$ должно приближаться отображениями вида $\varphi \circ \alpha_i$:

$$\varphi \circ \alpha_i \overset{X\oslash X}{\longrightarrow} 1_X, \quad (\alpha_i : X \to X_\omega = \mathbb{C}_I)$$

Но $X_\omega = \mathbb{C}_I$ обладает базисом, поэтому каждое α_i приближается конечномерными операторами α_i^j

$$\alpha_i^j \overset{X\oslash X}{\longrightarrow} \alpha_i \quad (\alpha_i^j \in \mathcal{F}(X, X_\omega))$$

Таким образом,

$$1_X = \lim_{i\to\infty} \varphi \circ \alpha_i = \lim_{i\to\infty} \lim_{i\to\infty} \varphi \circ \alpha_i^j$$

то есть 1_X приближается конечномерными операторами. $\square$

Лемма 9.15. *Пусть $\varphi : A \to B$ – морфизм стереотипных пространств. Тогда для всякого стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны:*

(i) $(1_X \oslash \varphi) : (X \oslash B) \to (X \oslash A)$ является эпиморфизмом;

(ii) $(\varphi^\star \oslash 1_X^\star) : (B^\star \oslash X^\star) \to (A^\star \oslash X^\star)$ является эпиморфизмом.

Доказательство. $(i) \Leftrightarrow \forall \alpha \in X \oslash A \quad \exists \beta_i \in X \oslash B \quad (1_X \oslash \varphi)(\beta_i) = \beta_i \circ \varphi \longrightarrow \alpha \Leftrightarrow \forall \alpha^\star \in A^\star \oslash X^\star \quad \exists \beta_i^\star \in B^\star \oslash X^\star \quad (\varphi^\star \oslash 1_{X^\star})(\beta_i^\star) = \varphi^\star \circ \beta_i^\star = (\beta_i \circ \varphi)^\star \longrightarrow \alpha^\star \Leftrightarrow (ii)$. $\square$

Теорема 9.16 (критерий инъективности)**.** *Для стереотипного пространства X следующие условия эквивалентны*

(i) X обладает свойством стереотипной аппроксимации;

(ii) для всякого мономорфизма $\varphi : A \to B$ *морфизм* $(1_X \oslash \varphi) : (X \oslash B) \to (X \oslash A)$ *является эпиморфизмом;*

(iii) для всякого биморфизма $\varphi : A \to B$ *морфизм* $(1_X \oslash \varphi) : (X \oslash B) \to (X \oslash A)$ *является биморфизмом.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть X обладает аппроксимацией и $\varphi : A \to B$ – мономорфизм. Тогда $X^\star$ тоже обладает аппроксимацией, а $\varphi^\star : B^\star \to A^\star$ – эпиморфизм. По теореме 9.13 это означает, что $(\varphi^\star \oslash 1^\star_X) : (B^\star \oslash X^\star) \to (A^\star \oslash X^\star)$ – эпиморфизм, а отсюда по лемме 9.15 $(1_X \oslash \varphi) : (X \oslash B) \to (X \oslash A)$ – тоже эпиморфизм.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Если $\varphi : A \to B$ – биморфизм, то мономорфность $(1_X \oslash \varphi) : (X \oslash B) \to (X \oslash A)$ очевидна, а эпиморфность гарантируется условием (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Если для всякого биморфизма $\varphi : A \to B$ морфизм $1_X \oslash \varphi$ также является биморфизмом, то по лемме 9.15 $\varphi^\star \oslash 1^\star_X$ – тоже биморфизм, а это значит, что для любого биморфизма $\psi : B^\star \to A^\star$ отображение $\psi \oslash 1_{X^\star}$ является биморфизмом. По теореме 9.14 это означает, что $X^\star$ обладает стереотипной аппроксимацией, и значит X обладает стереотипной аппроксимацией. □

Теорема 9.17 (критерий плоскости)**.** *Для стереотипного пространства* X *следующие условия эквивалентны*

(i) X *обладает свойством стереотипной аппроксимации;*

(ii) для всякого мономорфизма $\varphi : A \to B$ *морфизм* $\varphi \circledast 1_X : A \circledast X \to B \circledast X$ *является мономорфизмом;*

(iii) для всякого биморфизма $\varphi : A \to B$ *морфизм* $\varphi \circledast 1_X : A \circledast X \to B \circledast X$ *является биморфизмом.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть X обладает аппроксимацией и $\varphi : A \to B$ – мономорфизм. Тогда $\varphi^\star$ – эпиморфизм и по теореме 9.14 $\varphi^\star \oslash 1_X$ – эпиморфизм. Значит $\varphi \circledast 1_X = (\varphi^\star \oslash 1_X)^\star$ – мономорфизм.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Пусть $\varphi : A \to B$ – биморфизм. Тогда мономорфность $\varphi^\star \oslash 1_X$ очевидна, значит очевидна эпиморфность $\varphi \circledast 1_X = (\varphi^\star \oslash 1_X)^\star$ Мономорфность же $\varphi \circledast 1_X$ гарантируется условием (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. В силу формулы $\varphi \circledast 1_X = (\varphi^\star \oslash 1_X)^\star$ получаем, что если $\varphi \circledast 1_X$ является биморфизмом всегда, когда φ – биморфизм, то в этом случае $\varphi^\star \oslash 1_X$ – тоже биморфизм, а значит по теореме 9.14 X обладает аппроксимацией. □

Теорема 9.18 (критерий коплоскости)**.** *Для стереотипного пространства* X *следующие условия эквивалентны*

(i) X *обладает свойством стереотипной аппроксимации;*

(ii) для всякого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ *морфизм* $\varphi \odot 1_X : A \odot X \to B \odot X$ *является эпиморфизмом;*

(iii) для всякого биморфизма $\varphi : A \to B$ *морфизм* $\varphi \odot 1_X : A \odot X \to B \odot X$ *является биморфизмом.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть X обладает аппроксимацией, и $\varphi : A \to B$ – эпиморфизм. Тогда $X^\star$ тоже обладает аппроксимацией и по теореме 9.16 $1_{X^\star} \oslash \varphi = \varphi \odot 1_X$ является эпиморфизмом.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Если $\varphi : A \to B$ – биморфизм, то мономорфность $1_{X^\star} \oslash \varphi = \varphi \odot 1_X$ очевидна, а эпиморфность гарантируется условием (ii).

$(iii) \Rightarrow (i)$. Если $1_{X^\star} \oslash \varphi = \varphi \odot 1_X$ является биморфизмом всегда, когда φ – биморфизм, то по теореме 9.16 $X^\star$ обладает аппроксимацией. Значит X тоже обладает аппроксимацией. □

(e) Пространства с базисом

Пусть I – произвольное множество индексов, и 2_I – система всех его конечных подмножеств: $F \in 2_I \Leftrightarrow F \subseteq I \ \& \ \operatorname{card} F < \infty$. Определим на 2_I частичный порядок теоретико-множественным включением $F \subseteq G$. Назовем *правилом суммирования* на множестве индексов I произвольную конфинальную подсистему $\mathcal{I} \subseteq 2_I : \quad \forall F \in 2_I \quad \exists G \in \mathcal{I} \quad F \subseteq G$. Семейство $\{x_i; i \in I\}$ элементов ЛВП X условимся называть *суммируемым по правилу* $\mathcal{I}$, если существует элемент $x \in X$ такой, что

$$\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists G \in \mathcal{I} \quad \forall H \in \mathcal{I} \quad G \subseteq H \Rightarrow \sum_{i \in H} x_i - x \in U$$

При этом x будет называться *суммой семейства* $\{x_i; i \in I\}$ *по правилу суммирования* $\mathcal{I}$ и обозначаться

$$x = \sum_{i \in I} x_i \quad (\mathcal{I})$$

Правило суммирования $\mathcal{I}$ называется *замкнутым*, если оно замкнуто относительно объединения: $\forall G, H \in \mathcal{I} \quad G \cup H \in \mathcal{I}$.

Предложение 9.19. *Если семейство $\{x_i; i \in I\}$ суммируется в ЛВП X по замкнутому правилу $\mathcal{I}$, то его частичные суммы $\{\sum_{i\in G} x_i; G \in \mathcal{I}\}$ образуют вполне ограниченное множество в X.*

Доказательство. Если $\sum_{i\in I} x_i \quad (\mathcal{I})$ сходится, то по критерию Коши $\forall U \in \mathcal{U}(X) \quad \exists G \in \mathcal{I} \quad \forall H \in \mathcal{I} \quad G \subseteq H \Rightarrow \sum_{i\in H\setminus G} x_i \in U$. Зафиксируем $U \in \mathcal{U}(X)$ и соответствующее $G \in \mathcal{I}$. Для произвольного $F \subseteq G$ (необязательно $F \in \mathcal{I}$) обозначим $y_F = \sum_{i\in F} x_i$. Тогда $\{y_F; F \subseteq G\}$ – конечное множество в X. Покажем, что оно является U-сетью для векторов $z_M = \sum_{i\in M} x_i \quad (M \in \mathcal{I})$. Действительно, возьмем произвольное $M \in \mathcal{I}$ и обозначим $H = M \cup G$ $(H \in \mathcal{I})$. Тогда, если взять $F = M \cap G \subseteq G$, то

$$z_M - y_F = \sum_{i\in M} x_i - \sum_{i\in F} x_i = (F \subseteq M) = \sum_{i\in M\setminus F} x_i = (M\setminus F = H\setminus G) = \sum_{i\in H\setminus G} x_i \in U$$

Итак, мы получили, что $\forall M \in \mathcal{I} \quad \exists F \subseteq G \quad z_M - y_F \in U$. □

Определение. Семейство пар $\{(e_i, e_i'); i \in I\}, e_i \in X, e_i' \in X^\star$ называется *базисом* стереотипного пространства X (относительно правила суммирования $\mathcal{I}$), если оно удовлетворяет условиям

$$\langle e_i, e_j' \rangle = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \qquad \text{(биортогональность)}, \qquad \sum_{i\in I} e_i' \odot e_i = 1_X \quad (\mathcal{I}) \quad \text{(разложение единицы)}$$

где ряд сходится в $\mathcal{L}(X)$.

При подходящем выборе правила суммирования $\mathcal{I}$, наше определение становится эквивалентным классическим определениям базиса. Например, если $I = \mathbb{N}$ а $\mathcal{I}$ состоит из множеств вида $G = \{1, ..., n\},\ n \in \mathbb{N}$, то для бочечных пространств понятия базиса относительно $\mathcal{I}$ совпадает с понятием базиса Шаудера [3]. Если же $I = \mathbb{N}$ и $\mathcal{I} = 2_I$, то мы получаем определение безусловного базиса [3]. Примерами пространств с несчетными базисами (относительно $\mathcal{I} = 2_I$) являются несепарабельные гильбертовы пространства, а также $\mathbb{C}^I$ и $\mathbb{C}_I$.

Предложение 9.20. *Если пространство X бочечно, а правило суммирования $\mathcal{I}$ замкнуто, то любая биортогональная система $\{(e_i, e_i'); i \in I\}, e_i \in X, e_i' \in X^\star$ со свойством*

$$\forall x \in X \quad \sum_{i\in I} e_i'(x) \cdot e_i = x \quad (\mathcal{I}) \tag{9.14}$$

является базисом в X относительно правила суммирования $\mathcal{I}$.

Доказательство. Рассмотрим операторы проектирования $P_H = \sum_{i\in H} e_i' \odot e_i,\ H \in \mathcal{I}$. Из (9.5) и предложения 9.19 следует, что для всякого $x \in X$ множество $\{P_H(x); H \in \mathcal{I}\}$ вполне ограничено. Значит, по теореме Банаха-Штейнгауза, $\{P_H; H \in \mathcal{I}\}$ равностепенно непрерывно на X. Следовательно (теорема 5.1), $\{P_H; H \in \mathcal{I}\}$ вполне ограничено в $(X : X$ и) в $\mathcal{L}(X) = (X : X)^\vartriangle$. Теперь нам достаточно показать, что $P_H \xrightarrow{X:X} 1_X$. Пусть $K \in \mathcal{S}(X)$ и $U \in \mathcal{BU}(X)$. Выберем $V \in \mathcal{BU}(X)$ так, чтобы $V \subseteq U$ & $\bigcup_{H\in\mathcal{I}} P_H(V) \subseteq U$. Тогда если $A \subseteq K$ есть V-сеть для K (т.е. $K \subseteq V + A$), то выбрав $G \in \mathcal{I} : \quad \forall H \in \mathcal{I} \quad G \subseteq H \Rightarrow \forall a \in A \quad P_H(a) - a \subseteq U$, мы получим что если $x \in K$ то можно выбрать $a \in A : x - a \in V$ и тогда $\forall H \quad P_H(x) - P_H(a) \in U$, откуда $P_H(x) - x = P_H(x) - P_H(a) + P_H(a) - a + a - x \in U + U - V \subseteq 3U$. Это как раз и означает, что P_H стремится к 1_X равномерно на K. □

Ясно, что *если в пространстве X существует базис, то X обладает свойством аппроксимации.*

Теорема 9.21. *X обладает базисом $\Leftrightarrow$ $X^\star$ обладает базисом*

Заметим, что если $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ – правила суммирования на I и J, то система $\mathcal{I}\times\mathcal{J} = \{M\times N;\ M \in \mathcal{I},\ N \in \mathcal{J}\}$ будет правилом суммирования на $I \times J$. [7]

Теорема 9.22. *Если стереотипные пространства X и Y обладают базисами относительно замкнутых правил суммирования $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$, то пространства $Y \oslash X, X \circledast Y, X \odot Y$ обладают базисами относительно $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$.*

Доказательство. Доказательство достаточно провести для $Y \oslash X$. Пусть $\{(a_i, a_i'); i \in I\}$ – базис в X, $\{(b_j, b_j');\ j \in J\}$ – базис в Y. Покажем, что система $(a_i' \odot b_j, a_i \circledast b_j'),\ i \in I, j \in J$ является базисом в $Y \oslash X$.

[7] Неясно, будет ли $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ замкнутым правилом суммирования если правила $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}$ замкнуты.

Ее биортогональность проверяется элементарно:

$$\langle a_i' \odot b_j, a_k \circledast b_l' \rangle = a_i'(a_k) b_j(b_l') = \begin{cases} 0, (i,j) \neq (k,l) \\ 1, (i,j) = (k,l) \end{cases}$$

Докажем, что эта система образует разложение единицы. Рассмотрим операторы проектирования

$$p_M = \sum_{i \in M} a_i' \odot a_i \quad (M \in \mathcal{I}) \qquad q_N = \sum_{j \in N} b_i' \odot b_i \quad (N \in \mathcal{J})$$

Имеем

$$p_M \overset{\mathcal{L}(X)}{\longrightarrow} 1_X \quad (M \to I) \qquad q_n \overset{\mathcal{L}(Y)}{\longrightarrow} 1_Y \quad (N \to J)$$

причем из сходимости рядов $\sum a_i' \odot a_i, \sum b_j' \odot b_j$, в силу 9.18, следует что их частичные суммы (то есть p_M и q_N) вполне ограничены в $\mathcal{L}(X)$ и $\mathcal{L}(Y)$. По теореме 6.15 это означает, что

$$q_N \oslash p_M \overset{\mathcal{L}(Y \oslash X)}{\longrightarrow} 1_Y \oslash 1_X = 1_{Y \oslash X} \quad ((N,M) \to (J,I)) \tag{9.15}$$

При этом

$$(q_N \oslash p_M)(\varphi)(x) = \left(\left[\sum_{j \in N} b_j' \odot b_j \right] \circ \varphi \circ \left[\sum_{i \in M} a_i' \odot a_i \right] \right)(x) = \left(\sum_{j \in N} b_j' \odot b_j \circ \varphi \right) \left(\sum_{i \in M} a_i'(x) a_i \right) =$$

$$= \left(\sum_{j \in N} b_j' \odot b_j \right) \left(\sum_{i \in M} a_i'(x) \cdot \varphi(a_i) \right) = \sum_{j \in N} \sum_{i \in M} b_j' \Big(\varphi(a_i) \Big) \cdot a_i'(x) \cdot b_j = \sum_{j \in N} \sum_{i \in M} (b_j' \circledast a_i)(\varphi) \cdot (a_i' \odot b_j)(x) =$$

$$= \sum_{j \in N} \sum_{i \in M} \Big[(b_j' \circledast a_i)(\varphi) \cdot (a_i' \odot b_j) \Big](x) = \sum_{j \in N} \sum_{i \in M} \Big[(b_j' \circledast a_i) \odot (a_i' \odot b_j) \Big](\varphi)(x)$$

и значит,

$$q_N \oslash p_M = \sum_{j \in N} \sum_{i \in M} (b_j' \circledast a_i) \odot (a_i' \odot b_j)$$

то есть $q_N \oslash p_M$ является частичной суммой ряда $(b_j' \circledast a_i) \odot (a_i' \odot b_j)$. Из (9.15) следует, что этот ряд сходится, причем $\sum_{(i,j) \in I \times J} (a_i \odot b_j') \odot (a_i' \circledast b_j) = 1_{Y \oslash X}$. $\square$

Следствие 9.23. *Если X – стереотипное пространство с базисом относительно замкнутого правила суммирования (например, гильбертово), то $\mathcal{L}(X)$ – тоже стереотипное пространство с базисом.*

Теорема 9.24. *Свойство иметь базис относительно замкнутого правила суммирования наследуется прямыми произведениями и прямыми суммами.*

Доказательство. Пусть $X = \oplus_{\alpha \in A} X^\alpha$ и каждое пространство X^α обладает базисом относительно замкнутого правила суммирования $\mathcal{I}^\alpha \subseteq 2_{I^\alpha}$. Обозначим через $\{P_F^\alpha;\ F \in \mathcal{I}^\alpha\}$ соответствующие конечномерные проекции. Пусть, как и в теореме 9.12, для всякого $M \in 2_A$ $\quad X^M = \oplus_{\alpha \in M} X^\alpha$ и $\pi^M : X \to X^M$, $\sigma^M : X^M \to X$ – естественные проекция и вложение. Тогда система операторов

$$\sigma^M \circ \oplus_{\alpha \in M} P_{F^\alpha}^\alpha \circ \pi^\alpha$$

будет, во-первых, вполне ограничена в $X : X$ и, во-вторых, равномерно на компактах стремиться к 1_X Значит $\sigma^M \circ \oplus_{\alpha \in M} P_{F^\alpha}^\alpha \circ \pi^\alpha \underset{F^\alpha \to I^\alpha,\ M \to I}{\overset{X \oslash X}{\longrightarrow}} 1_X$. При этом базис в X индексируется дизъюнктным объединением $I = \bigcup_{\alpha \in A} I^\alpha$, а правило суммирования (очевидно, замкнутое) состоит из конечных объединений: $F \in \mathcal{I} \Leftrightarrow F = \bigcup_{k=1}^n F^{\alpha_k}, F^{\alpha_k} \in \mathcal{I}^{\alpha_k}$. $\square$

§ 10 Стереотипные алгебры

Описанная во введении общая конструкция 3* позволяет определить понятие стереотипной алгебры двумя способами – как моноид в категории $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$ и как моноид в категории $(\mathfrak{Ste}, \odot)$. В первом случае мы получаем объект, который естественно назвать проективной стереотипной алгеброй, а во втором случае – инъективной стереотипной алгеброй.

(a) Проективные стереотипные алгебры

Стереотипное пространство A над $\mathbb{C}$ мы называем *проективной стереотипной алгеброй* (или просто *проективной алгеброй* [8]) если A является моноидом в категории $(\mathfrak{Ste},\circledast)$ то есть если заданы морфизмы стереотипных пространств

$$\mu : A \odot A \to A \qquad \varepsilon : \mathbb{C} \to A$$

для которых будут коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \circledast (A \circledast A) \arrow[d, "1\circledast\mu"'] & \cong & (A \circledast A) \circledast A \arrow[d, "\mu\circledast 1"] \\
A \circledast A \arrow[r, "\mu"] & A & A \circledast A \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \circledast A \arrow[dr, "\varepsilon\circledast 1"'] & \cong & A \arrow[d, phantom] & \cong & A \circledast \mathbb{C} \arrow[dll, "1\circledast\varepsilon"] \\
 & & A \circledast A \arrow[u, "\mu"'] & &
\end{tikzcd}.$$

По теореме 7.3, это эквивалентно тому, что на A задана структура ассоциативной алгебры над $\mathbb{C}$ с единицей, причем операция умножения является непрерывной билинейной формой в смысле определения § 5(f), то есть удовлетворяет условию

$$\forall K \in \mathcal{K}(A) \quad \forall a_i \xrightarrow{A} 0 \quad (i \to \infty) \quad a_i \cdot b \underset{b\in K}{\overset{A}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty) \quad \& \quad b \cdot a_i \underset{b\in K}{\overset{A}{\rightrightarrows}} 0 \quad (i \to \infty)$$

В этом случае умножение в A непрерывно пропускается через стереотипное проективное тензорное произведение: существует морфизм $\mu : A \circledast A \to A$ такой что

$$\mu(x \circledast y) = x \cdot y \qquad (x, y \in A),$$

то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \times A \arrow[r, "(x,y)\mapsto x\circledast y"] \arrow[dr, "(x,y)\mapsto x\cdot y"'] & A \circledast A \arrow[d, dashed, "\mu"] \\
 & A
\end{tikzcd}.$$

Примеры проективных алгебр.

Пример 10.1. *Алгебры Фреше.* Для пространства Фреше A свойство быть стереотипной алгеброй эквивалентно совместной непрерывности операции умножения в силу теоремы 7.17. Поэтому *любая алгебра Фреше с единицей будет стереотипной алгеброй.*

Пример 10.2. *Алгебра операторов* $\mathcal{L}(X)$. Из теоремы 9.2 следует, что для всякого стереотипного пространства X соответствующее пространство $\mathcal{L}(X)$ линейных непрерывных операторов $\varphi : X \to X$ (определенное в § 9(a)) является стереотипной алгеброй относительно операции композиции $\varphi \circ \psi$.

Важная серия примеров – *функциональные алгебры.*

Пример 10.3. *Алгебра непрерывных функций $\mathcal{C}(M)$ на паракомпактном локально компактном пространстве M.* Вспомним конструкцию § 8(a): пространство $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на паракомпактном локально компактном пространстве M наделяется топологией равномерной сходимости на компактах в M, превращаясь в стереотипное пространство. С другой стороны, $\mathcal{C}(M)$, очевидно, является алгеброй относительно поточечного умножения

$$(u \cdot v)(t) = u(t) \cdot v(t)$$

Без труда проверяется, что это непрерывная билинейная форма, поэтому $\mathcal{C}(M)$ является проективной стереотипной алгебры.

Пример 10.4. *Алгебра гладких функций $\mathcal{E}(M)$ на гладком многообразии M* (с обычной топологией равномерной сходимости по каждой производной на компактах) является проективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

Пример 10.5. *Алгебра голоморфных функций $\mathcal{O}(M)$ на многообразии Штейна M* (с топологией равномерной сходимости на компактах в M) является проективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

---

[8] Учитывая, что, определяемые ниже инъективные стереотипные алгебры автоматически являются проективными, мы иногда используем термин *стереотипная алгебра* применительно к проективными стереотипным алгебрам.

Пример 10.6. *Алгебра регулярных функций $\mathcal{R}(M)$ на аффинном алгебраическом многообразии M* (с сильнейшей локально выпуклой топологией) является проективной стереотипной алгеброй (с поточечным умножением).

Еще одна серия примеров – *групповые алгебры.*

Пример 10.7. *Алгебра мер $\mathcal{C}^\star(G)$ на локально компактной группе G.* Как известно, всякая локально компактная группа G паракомпактна ([48, 2.8.13]), поэтому пространство $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций на G (с топологией равномерной сходимости на компактах в G) и сопряженное пространство финитных мер $\mathcal{C}^\star(G)$ можно рассматривать как частный случай общей конструкции § 8(a).

Свертка мер $\alpha,\beta\in\mathcal{C}^\star(G)$ определяется формулой

$$\alpha*\beta(u)=(\alpha\otimes\beta)(w)\Big|_{w(s,t)=u(s\cdot t)}=\int_G\left(\int_G u(s\cdot t)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)\right)\mathrm{d}\,\beta(t)=\int_G\left(\int_G u(s\cdot t)\,\mathrm{d}\,\beta(t)\right)\mathrm{d}\,\alpha(s)\qquad(10.1)$$

Ассоциативность этой операции следует из свойства 4° § 8(a), а непрерывность – из следствия 8.9: $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha*\beta$ есть композиция непрерывной формы $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\otimes\beta$ и отображения $\gamma\mapsto\gamma(w)\Big|_{w(s,t)=u(s\cdot t)}$ непрерывного, как сопряженное к непрерывному отображению $u\mapsto w(s,t)=u(s\cdot t)$.

Таким образом, *пространство мер $\mathcal{C}^\star(G)$ на локально компактной группе G является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки мер $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha*\beta$ (с единицей δ_{1_G}).*

Заметим, что из определения свертки формулой (10.1) следует, что свертка δ-функций является δ-функцией:

$$\delta_a*\delta_b=\delta_{a\cdot b}\qquad(10.2)$$

Пример 10.8. *Алгебра распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ на группе Ли G.* Пусть G – вещественная группа Ли [39, 45]. Рассмотрим пространство $\mathcal{E}^\star(G)$ финитных распределений на G (определенное в § 8(b)).

Свертка распределений $\alpha,\beta\in\mathcal{E}^\star(G)$ определяется формулой (10.1), и аналогично примеру 10.7 доказывается, что *пространство распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ на группе Ли G является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки распределений $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha*\beta$ (с единицей δ_{1_G}).*

Пример 10.9. *Алгебра голоморфных потоков $\mathcal{O}^\star(G)$ на группе Штейна G.* Пусть G – *группа Штейна*, то есть комплексная группа Ли [49], являющаяся многообразием Штейна [44]. Рассмотрим пространство $\mathcal{O}^\star(G)$ голоморфных потоков на G (определенное в § 8(c)).

Свертка голоморфных потоков $\alpha,\beta\in\mathcal{O}^\star(G)$ определяется формулой (10.1), и аналогично примеру 10.7 доказывается, что *пространство голоморфных потоков $\mathcal{O}^\star(G)$ на группе Штейна G является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки потоков $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha*\beta$ (с единицей δ_{1_G}).*

Пример 10.10. *Алгебра регулярных потоков $\mathcal{R}^\star(G)$ на аффинной алгебраической группе G.* Напомним некоторые факты из теории алгебраических групп [45]. Полная линейная группа $GL(n,\mathbb{C})$ является главным открытым множеством в векторном пространстве $L(n,\mathbb{C})$, поэтому ее можно представить как замкнутое по Зарисскому подмножество в некотором аффинном пространстве $\mathbb{C}^m$. Это значит, что $GL(n,\mathbb{C})$ является аффинным алгебраическим многообразием. Его регулярные функции имеют вид

$$u(g)=P(g)/D(g)^k\qquad(10.3)$$

где $D(g)$ – определитель матрицы $g\in L(n,\mathbb{C})$, k лежит в $\mathbb{N}$, а $P(g)$ – многочлен на $L(n,\mathbb{C})$) [45].

Пусть теперь G – аффинная алгебраическая группа, то есть замкнутая по Зарисскому подгруппа в $GL(n,\mathbb{C})$ [45], или, говоря иначе, множество общих нулей некоторой системы функций $u:GL(n,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ вида (10.3), замкнутое относительно групповой операции в $GL(n,\mathbb{C})$. Поскольку G – замкнутое подмножество в $GL(n,\mathbb{C})$, это также будет аффинное многообразие.

Поэтому пространство $\mathcal{R}(G)$ регулярных функций на G является частным случаем общей конструкции, рассматривавшейся нами в § 8(d). В данном случае $\mathcal{R}(G)$ состоит из функций $v:G\to\mathbb{C}$ продолжаемых до функций $u:GL(n,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ вида (10.3). Сопряженное пространство $\mathcal{R}^\star(G)$ состоит из линейных (и автоматически непрерывных) функционалов $f:\mathcal{R}(G)\to\mathbb{C}$, называемых *регулярными потоками* на G.

Свертка регулярных потоков $\alpha,\beta\in\mathcal{R}^\star(G)$ определяется формулой (10.1), и аналогично примеру 10.7 доказывается, что *пространство регулярных потоков $\mathcal{R}^\star(G)$ на аффинной алгебраической группе G является проективной стереотипной алгеброй относительно операции свертки потоков $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha*\beta$ (с единицей δ_{1_G}).*

Формулы в групповых алгебрах. Операцию свертки в групповых алгебрах $\mathcal{C}^\star(G), \mathcal{E}^\star(G), \mathcal{O}^\star(G), \mathcal{R}^\star(G)$, определенную нами формулой (10.1), можно задать и по-другому, не используя понятие интеграла (то есть результаты §8). Мы приведем здесь соответствующие формулы, которые будут полезны нам также в дальнейшем (например, в § 14(b)).

Прежде всего, для функций $u \in \mathcal{C}(G)$ и мер $\alpha \in \mathcal{C}^\star(G)$ обозначим через $\widetilde{u}$ и $\widetilde{\alpha}$ их *антиподы*

$$\widetilde{u}(t) = u(t^{-1}), \qquad \widetilde{\alpha}(u) = \alpha(\widetilde{u}) \tag{10.4}$$

а через $a \cdot u, u \cdot a$ и $a \cdot \alpha, \alpha \cdot a$ – *сдвиги*:

$$(a \cdot u)(t) = u(t \cdot a), \qquad (u \cdot a)(t) = u(a \cdot t) \tag{10.5}$$

$$(a \cdot \alpha)(u) = \alpha(u \cdot a), \qquad (\alpha \cdot a)(u) = \alpha(a \cdot u) \tag{10.6}$$

Очевидно, будут справедливы тождества

$$\widetilde{a \cdot u} = \widetilde{u} \cdot a^{-1}, \qquad \widetilde{u \cdot a} = a^{-1} \cdot \widetilde{u} \tag{10.7}$$

$$\widetilde{a \cdot \alpha} = \widetilde{\alpha} \cdot a^{-1}, \qquad \widetilde{\alpha \cdot a} = a^{-1} \cdot \widetilde{\alpha} \tag{10.8}$$

$$\widetilde{\delta_a} = \delta_{a^{-1}}, \qquad a \cdot \delta_b = \delta_{a \cdot b}, \quad \delta_b \cdot a = \delta_{b \cdot a} \tag{10.9}$$

Затем определяется свертка функции с мерой

$$\alpha * u(t) = \alpha\left(\widetilde{t \cdot u}\right), \qquad u * \alpha(t) = \alpha\left(\widetilde{u \cdot t}\right) \tag{10.10}$$

и последовательно доказываются тождества

$$\delta_a * u = u \cdot a^{-1}, \qquad u * \delta_a = a^{-1} \cdot u \tag{10.11}$$

$$\widetilde{\alpha * u} = \widetilde{u} * \widetilde{\alpha}, \qquad \widetilde{u * \alpha} = \widetilde{\alpha} * \widetilde{u} \tag{10.12}$$

$$\alpha(\beta * u) = \beta(\alpha * \widetilde{u}), \qquad \alpha(u * \beta) = \beta(\widetilde{u} * \alpha) \tag{10.13}$$

Из них следует цепочка тождеств

$$\alpha\left(u * \widetilde{\beta}\right) = \alpha\left(\widetilde{\beta * \widetilde{u}}\right) = \widetilde{\alpha}\left(\beta * \widetilde{u}\right) = \beta\left(\widetilde{\alpha} * u\right) \tag{10.14}$$

которая и объявляется *сверткой мер*:

$$\alpha * \beta(u) = \alpha\left(u * \widetilde{\beta}\right) = \alpha\left(\widetilde{\beta * \widetilde{u}}\right) = \widetilde{\alpha}\left(\beta * \widetilde{u}\right) = \beta\left(\widetilde{\alpha} * u\right) \tag{10.15}$$

Без труда проверяется, что $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha * \beta$ есть непрерывная билинейная форма из $\mathcal{C}(G) \times \mathcal{C}(G)$ в $\mathcal{C}(G)$. Кроме того, справедливы тождества

$$\delta_a * \beta = a \cdot \beta, \qquad \beta * \delta_a = \beta \cdot a, \tag{10.16}$$

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a \cdot b} \tag{10.17}$$

$$\widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\beta} * \widetilde{\alpha} \tag{10.18}$$

Отсюда уже следует, что свертка, определенная формулой (10.15) совпадает со сверткой, определенной формулой (10.1) (потому что обе они непрерывны и совпадают на δ-функциях в силу тождеств (10.17) и (10.2)).

Представления групповых алгебр. Опишем упомянутую во Введении биекцию между представлениями групп и алгебр для стандартных классов топологических групп.

Непрерывным представлением локально-компактной группы G в стереотипной алгебре A назовем всякое непрерывное отображение $\pi : G \to A$ со свойствами

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \qquad \pi(1_G) = 1_A$$

Гладким представлением группы Ли G в стереотипной алгебре A назовем всякое гладкое (в смысле § 8(b)) отображение $\pi : G \to A$ со свойствами

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \qquad \pi(1_G) = 1_A$$

(заметим, что по этому определению, вложение $G \to \mathcal{C}^\star(G)$ не будет гладким представлением).

Голоморфным представлением группы Штейна G в стереотипной алгебре A назовем всякое голоморфное (в смысле § 8(c)) отображение $\pi : G \to A$ со свойствами

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \qquad \pi(1_G) = 1_A$$

Регулярным представлением аффинной алгебраической группы G в стереотипной алгебре A назовем всякое регулярное (в смысле § 8(d)) отображение $\pi : G \to A$ со свойствами

$$\pi(s \cdot t) = \pi(s) \cdot \pi(t), \qquad \pi(1_G) = 1_A$$

(заметим, что по этому определению, вложение $G \to \mathcal{O}^\star(G)$ не будет регулярным представлением).

Теорема 10.11. *Для всякой локально-компактной группы (соответственно, вещественной группы Ли, группы Штейна, аффинной алгебраической группы) G структура проективной стереотипной алгебры на пространстве $\mathcal{C}^\star(G)$ финитных мер (соответственно, на пространстве $\mathcal{E}^\star(G)$ финитных распределений, на пространстве $\mathcal{O}^\star(G)$ голоморфных потоков, на пространстве $\mathcal{R}^\star(G)$ регулярных потоков), определенная в пункте § 10(a), является единственной, для которой вложение с помощью δ-функций*

$$\delta : G \to \mathcal{C}^\star(G) \quad (\delta : G \to \mathcal{E}^\star(G), \quad \delta : G \to \mathcal{O}^\star(G), \quad \delta : G \to \mathcal{R}^\star(G))$$

есть непрерывное представление группы G в $\mathcal{C}^\star(G)$ (соответственно, гладкое представление группы G в $\mathcal{E}^\star(G)$, голоморфное представление группы G в $\mathcal{O}^\star(G)$, регулярное представление группы G в $\mathcal{R}^\star(G)$).

Теорема 10.12. *Для всякой проективной стереотипной алгебры A диаграммы*

$$\begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{E}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{O}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & A & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{R}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

(в которых δ – вложения в качестве дельта-функций) устанавливают биекции между

- *непрерывными представлениями произвольной локально-компактной группы G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{C}^\star(G) \to A$;*
- *гладкими представлениями произвольной вещественной группы Ли G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{E}^\star(G) \to A$;*
- *голоморфными представлениями произвольной группы Штейна G в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{O}^\star(G) \to A$;*
- *регулярными представлениями произвольной аффинной алгебраической группы G над $\mathbb{C}$ в алгебре A и морфизмами проективных стереотипных алгебр $\varphi : \mathcal{R}^\star(G) \to A$.*

Доказательство. Морфизм φ определяется формулой

$$\varphi(\alpha) = \int_G^A \pi(s)\,\mathrm{d}\,\alpha(s)$$

Тогда

$$\varphi(\delta_s) = \pi(s), \qquad s \in G$$

откуда

$$\varphi(\delta_a * \delta_b) = (10.2) = \varphi(\delta_{a \cdot b}) = \pi(a \cdot b) = \pi(a) \cdot \pi(b) = \varphi(\delta_a) \cdot \varphi(\delta_b)$$

и, по непрерывности, получаем

$$\varphi(\alpha * \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$$

□

Категория проективных алгебр $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$. Класс $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$ всех проективных стереотипных алгебр над $\mathbb{C}$ образует категорию с линейными непрерывными мультипликативными сохраняющими единицу отображениями $\varphi : A \to B$ в качестве морфизмов. Как и в чисто алгебраической ситуации, категория (стереотипных) алгебр $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$, мало похожа на категорию (стереотипных) пространств $\mathfrak{Ste}$ (например потому, что она не аддитивна). Отметим, что в $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$ имеется интегральный объект – алгебра многочленов от одного переменного [9] $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ (наделенная сильнейшей локально-выпуклой топологией), обладающая тем свойством, что для любых неодинаковых параллельных морфизмов $\varphi \neq \psi : A \to B$ найдется морфизм $\iota : \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to A$ такой, что соответствующие композиции также не будут одинаковы: $\varphi \circ \iota \neq \psi \circ \iota$.

С помощью $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ нетрудно доказать, что морфизм $\varphi : A \to B$ проективных стереотипных алгебр тогда и только тогда будет мономорфизмом, когда φ – инъективное отображение (то есть мономорфизм стереотипных пространств).

С другой стороны, можно заметить, что эпиморфизм $\varphi : A \to B$ проективных стереотипных алгебр вовсе не обязательно должен иметь плотный образ в B (то есть не обязан быть эпиморфизмом стереотипных пространств) – контрпримером может служить вложение алгебры многочленов $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ в алгебру рациональных функций на $\mathbb{C}$.

Теорема 10.13. *Пусть A – стереотипная алгебра и B – подалгебра в A, являющаяся одновременно замкнутым подпространством в ЛВП A. Тогда псевдонасыщение $B^{\vartriangle}$ является стереотипной алгеброй (и называется непосредственной подалгеброй в A).*

Доказательство. Умножение $\mu : A \times A \to A$ является непрерывной билинейной формой, поэтому ограничение $\mu|_B : B \times B \to B$ также непрерывно. Следовательно по теореме 5.24 псевдонасыщение $(\mu|_B)^{\vartriangle} : B^{\vartriangle} \times B^{\vartriangle} \to B^{\vartriangle}$ будет непрерывно, а это как раз и означает, что $B^{\vartriangle}$ – стереотипная алгебра. □

Теорема 10.14. *Пусть A – стереотипная алгебра и I – идеал в A, являющийся одновременно замкнутым подпространством в ЛВП A. Тогда псевдопополнение $(A/I)^{\triangledown}$ является стереотипной алгеброй (и называется непосредственной фактор-алгеброй алгебры A по идеалу I).*

(Доказательство этого утверждения мы приведем в § 11(c).)

Наконец, $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$ обладает естественным тензорным произведением:

Теорема 10.15. *Стереотипное проективное тензорное произведение $A \circledast B$ стереотипных алгебр A и B обладает единственной структурой проективной стереотипной алгебры с операцией умножения, удовлетворяющей тождеству*

$$(a_1 \circledast b_1) \cdot (a_2 \circledast b_2) = (a_1 \cdot a_2) \circledast (b_1 \cdot b_2)$$

Доказательство. Умножения в A и B задают морфизмы стереотипных пространств $\alpha : A \circledast A \to A, \beta : B \circledast B \to B$. Поэтому (по формуле (7.12)) определен морфизм $(A \circledast A) \circledast (B \circledast B) \to A \circledast B$, эквивалентный в силу (7.19) морфизму $(A \circledast B) \circledast (A \circledast B) \to A \circledast B$. Аксиомы стереотипной алгебры проверяются элементарно. □

(b) Инъективные стереотипные алгебры

Стереотипное пространство A над $\mathbb{C}$ мы называем *инъективной стереотипной алгеброй* если A является моноидом в категории $(\mathfrak{Ste}, \odot)$ то есть если заданы морфизмы стереотипных пространств

$$\mu : A \odot A \to A \qquad \varepsilon : \mathbb{C} \to A$$

для которых будут коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
A \odot (A \odot A) \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[d, "1\odot\mu"'] & & (A \odot A) \odot A \arrow[d, "\mu\odot 1"] \\
A \odot A \arrow[r, "\mu"] & A & A \odot A \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}
\qquad \text{и} \qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \odot A \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "\varepsilon\odot 1"'] & A & A \odot \mathbb{C} \arrow[l, phantom, "\cong"] \arrow[dl, "1\odot\varepsilon"] \\
& A \odot A \arrow[u, "\mu"] &
\end{tikzcd} .$$

Из предложения 7.5 следует, что в таком случае A должно быть ассоциативной алгеброй с единицей в обычном смысле, а из теоремы 7.8 – что A является проективной стереотипной алгеброй:

Теорема 10.16. *Всякая инъективная стереотипная алгебра A является проективной стереотипной алгеброй.*

[9]Здесь используется обозначение примера 10.10.

Если A – стереотипнное пространство, на котором определено ассоциаотивное умножение $a \cdot b$, то понять, будет ли это умножение порождать структуру проективной алгебры на A довольно просто: нужно лишь выяснить, будет ли билинейная форма $(a, b) \mapsto a \cdot b$ непрерывной. Для инъективных алгебр такого критерия нет, но отчасти его заменяет следующая

Лемма 10.17. *Пусть A – стереотипное пространство, наделенное структурой алгебры с единицей над $\mathbb{C}$, причем*

– *$A \otimes A \otimes A$ плотно в $A \odot A \odot A$, и*

– *умножение в A непрерывно пропускается через стереотипное инъективное тензорное произведение: существует морфизм $\mu : A \odot A \to A$ такой что*

$$\mu(x \odot y) = x \cdot y \qquad (x, y \in A),$$

то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "(x,y)\mapsto x\odot y"] \arrow[dr, "(x,y)\mapsto x\cdot y"'] & A \odot A \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}.$$

Тогда A – инъективная алгебра.

Доказательство. Здесь нужно убедиться в коммутативности левой диаграммы из определения инъективной алгебры. Поскольку $A \otimes A \otimes A$ плотно в $A \odot A \odot A$, это достаточно проверить на элементарных тензорах. Возьмем $x, y, z \in A$, тогда для тензора $x \odot y \odot z$ наша диаграмма превратится в серию преобразований:

– с одной стороны,

$$x \odot (y \odot z) \quad \mapsto \quad x \odot (y \cdot z) \quad \mapsto \quad x \cdot (y \cdot z)$$

– а , с другой,

$$(x \odot y) \odot z \quad \mapsto \quad (x \cdot y) \odot z \quad \mapsto \quad (x \cdot y) \cdot z$$

□

Примеры инъективных алгебр. Такими примерами будут функциональные алгебры, рассматривавшиеся нами в § 10(a).

Пример 10.18. *Алгебра непрерывных функций $\mathcal{C}(M)$ на паракомпактном локально компактном пространстве M* обладает единственной структурой инъективной стереотипной алгебры, порожденной на $\mathcal{C}(M)$ поточечным умножением. Действительно, по теореме 8.4, инъективное тензорное произведение $\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M)$ естественно отождествляется с пространством непрерывных функций на декартовом квадрате $M \times M$:

$$\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M \times M)$$

При таком отождествлении билинейная форма

$$(u, v) \in \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \quad \mapsto \quad u \odot v \in \mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M)$$

превратится в билинейную форму

$$(u, v) \in \mathcal{C}(M) \times \mathcal{C}(M) \quad \mapsto \quad u \otimes v \in \mathcal{C}(M \times M)$$

($u \otimes v$ определено формулой (8.11)). Рассмотрев теперь морфизм

$$\mu : \mathcal{C}(M \times M) \to \mathcal{C}(M) \quad \Big| \quad \mu(w)(t) = w(t, t),$$

мы получим $\mu(u \otimes v)(t) = (u \otimes v)(t, t) = u(t) \cdot v(t)$, то есть

$$\mu(u \otimes v) = u \cdot v$$

Это означает, что поточечное умножение $(u, v) \mapsto u \cdot v$ в $\mathcal{C}(M)$ продолжается до морфизма $\mu : \mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M) \cong \mathcal{C}(M \times M) \to \mathcal{C}(M)$. С другой стороны, по теореме 8.4, $\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(M \times M \times M)$, поэтому $\mathcal{C}(M) \otimes \mathcal{C}(M) \otimes \mathcal{C}(M)$ плотно в $\mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M) \odot \mathcal{C}(M)$. Значит, по лемме 10.17, $\mathcal{C}(M)$ будет инъективной стереотипной алгеброй.

Пример 10.19. *Алгебра гладких функций $\mathcal{E}(M)$ на гладком многообразии M* обладает единственной структурой инъективной стереотипной алгебры, порожденной на $\mathcal{E}(M)$ поточечным умножением. Это следует из тождества $\mathcal{E}(M) \odot \mathcal{E}(M) \cong \mathcal{E}(M) \circledast \mathcal{E}(M)$ (теорема 8.11), и того что $\mathcal{E}(M)$ – проективная алгебра.

Пример 10.20. *Алгебра голоморфных функций $\mathcal{O}(M)$ на многообразии Штейна M* обладает единственной структурой инъективной стереотипной алгебры, порожденной на $\mathcal{O}(M)$ поточечным умножением. Это следует из тождества $\mathcal{O}(M) \odot \mathcal{O}(M) \cong \mathcal{O}(M) \circledast \mathcal{O}(M)$ (теорема 8.14), и того что $\mathcal{O}(M)$ – проективная алгебра.

Пример 10.21. *Алгебра регулярных функций $\mathcal{R}(M)$ на аффинном алгебраическом многообразии M* обладает единственной структурой инъективной стереотипной алгебры, порожденной на $\mathcal{R}(M)$ поточечным умножением. Это следует из тождества $\mathcal{R}(M) \odot \mathcal{R}(M) \cong \mathcal{R}(M) \circledast \mathcal{R}(M)$ (теорема 8.17), и того что $\mathcal{R}(M)$ – проективная алгебра.

Категория инъективных алгебр $\mathfrak{Ste}^{\odot}$. Инъективные стереотипные алгебры образуют категорию $\mathfrak{Ste}^{\odot}$, морфизмами в которой служат линейные непрерывные отображения $\varphi : A \to B$, обеспечивающие коммутативность диаграмм

$$
\begin{tikzcd}
A \odot A \arrow[r, "\varphi \odot \varphi"] \arrow[d, "\mu"'] & B \odot B \arrow[d, "\nu"] \\
A \arrow[r, "\varphi"] & B
\end{tikzcd}
\qquad \text{и} \qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\
& \mathbb{C} \arrow[ul, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\eta"'] &
\end{tikzcd}
,
$$

(где μ, ε и ν, η – структурные морфизмы у A и B). Свойства этой категории мы подробно рассматривать не будем, отметив только, что как и $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$, категория $\mathfrak{Ste}^{\odot}$ обладает естественным тензорным произведением:

Теорема 10.22. *Если A и B – инъективные стереотипные алгебры со структурными морфизмами (μ, ε) и (ν, η), то инъективное тензорное произведение $A \odot B$ является инъективной стереотипной алгеброй со структурными морфизмами $(\mu \odot \nu, \varepsilon \odot \eta)$.*

(c) Стереотипные алгебры Хопфа

Проективной стереотипной алгеброй Хопфа мы называем алгебру Хопфа в моноидальной категории $\mathfrak{Ste}^{\circledast}$ (стандартное категорное определение можно найти, например, в монографии [46]). Аналогично определяется *инъективная стереотипная алгебра Хопфа*. Из тождеств (7.16) следует

Теорема 10.23. *A – проективная стереотипная алгебра Хопфа $\Leftrightarrow$ $A^\star$ – инъективная стереотипная алгебра Хопфа.*

Результаты §8 дают следующие примеры стереотипных алгебр Хопфа.

Пример 10.24. Для всякой локально-компактной группы G

(i) пространство непрерывных функций $\mathcal{C}(G)$ является инъективной стереотипной алгеброй Хопфа с операциями [10]

$$
\begin{aligned}
\mu : \mathcal{C}(G \times G) \to \mathcal{C}(G), &\qquad \mu(w)(t) = w(t,t) \quad \textit{умножение} \\
\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathcal{C}(G), &\qquad \varepsilon(\lambda)(t) = \lambda \quad \textit{единица} \\
\varkappa : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G \times G), &\qquad \varkappa(u)(s,t) = u(s \cdot t) \textit{коумножение} \\
\iota : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}, &\qquad \iota(u) = u(1_G) \quad \textit{коединица} \\
\sigma : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G), &\qquad \sigma(u)(t) = u(t^{-1}) \quad \textit{антипод}
\end{aligned}
$$

(ii) пространство финитных мер Радона $\mathcal{C}^\star(G)$ является проективной стереотипной алгеброй Хопфа с двойственными операциями [11]

$$
\mu^\star : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{C}^\star(G \times G), \qquad \mu^\star(\alpha)(w) = \int_G w(t,t)\, \mathrm{d}\, \alpha(t) \textit{коумножение}
$$

[10] Здесь пространство $\mathcal{C}(G \times G)$ мы отождествляем с пространством $\mathcal{C}(G) \odot \mathcal{C}(G)$ по теореме 8.4.

[11] Здесь пространство $\mathcal{C}^\star(G \times G)$ мы отождествляем с пространством $\mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G)$ по теореме 8.4.

$$\varepsilon^\star : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathbb{C}, \qquad \varepsilon^\star(\alpha) = \int_G 1 \,\mathrm{d}\,\alpha(t) \textit{коединица}$$
$$\varkappa^\star : \mathcal{C}^\star(G \times G) \to \mathcal{C}^\star(G), \qquad \varkappa^\star(\gamma) = \int_{G\times G} u(s\cdot t)\,\mathrm{d}\,\gamma(s,t) \textit{умножение}$$
$$\iota^\star : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^\star(G), \qquad \iota^\star(\lambda) = \lambda \cdot \delta_{1_G} \textit{единица}$$
$$\sigma^\star : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{C}^\star(G), \qquad \sigma^\star(\alpha) = \alpha \circ \sigma \textit{антипод}$$

Пример 10.25. Для всякой группы Ли G

(i) пространство гладких функций $\mathcal{E}(G)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй Хопфа с операциями, определенными аналогично 10.22 (i).

(ii) пространство финитных распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ является проективной и инъективной стереотипной алгеброй Хопфа с двойственными операциями (определенными аналогично примеру 10.24(ii)).

Пример 10.26. Для всякой группы Штейна G,

(i) пространство голоморфных функций $\mathcal{O}(G)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй Хопфа с операциями, определенными аналогично примеру 10.24 (i).

(ii) пространство голоморфных потоков $\mathcal{O}^\star(G)$ является проективной и инъективной стереотипной алгеброй Хопфа с двойственными операциями (определенными аналогично примеру 10.24 (ii)).

Пример 10.27. Для всякой аффинной алгебраической группы G

(i) пространство регулярных функций $\mathcal{R}(G)$ является инъективной и проективной стереотипной алгеброй Хопфа с операциями, определенными аналогично примеру 10.24 (i).

(ii) пространство регулярных потоков $\mathcal{R}^\star(G)$ является проективной и инъективной стереотипной алгеброй Хопфа с двойственными операциями (определенными аналогично примеру 10.24 (ii)).

Инвариантные средние на стереотипных алгебрах Хопфа. *Инвариантным средним на инъективной стереотипной алгебре Хопфа A* называется линейный непрерывный функционал $I : A \to \mathbb{C}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

(i) $\alpha * I = I * \alpha = \alpha(1_A) \cdot I, \quad \alpha \in A^\star$,

(ii) $I(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$,

где $\alpha * I$ – умножение в сопряженной алгебре Хопфа $A^\star$, $1_A, 1_{\mathbb{C}}$ – единицы в A и $\mathbb{C}$.

Аналогично определяется *инвариантное среднее на проективной стереотипной алгебре Хопфа A*. Это будет функционал $I \in A^\star$ удовлетворяющий условиям:

(i) $u \cdot I = I \cdot u = u(1_A) \cdot I, \quad u \in A^\star$,

(ii) $I(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$,

где $u \cdot I$ – умножение в сопряженной алгебре Хопфа $A^\star$, $1_A, 1_{\mathbb{C}}$ – единицы в A и $\mathbb{C}$.

Теорема 10.28. *Инвариантное среднее на алгебре Хопфа единственно (если оно существует).*

Доказательство. Пусть H и I – инвариантные средние на инъективной алгебре Хопфа A. Тогда

$$I = H(1) \cdot I = H * I = H \cdot I(1) = H$$

Случай проективной алгебры рассматривается аналогично. □

Теорема 10.29. *Пусть A – инъективная алгебра Хопфа, и антиподы $u \mapsto \widetilde{u}$ и $\alpha \mapsto \widetilde{\alpha}$ в A и $A^\star$ удовлетворяют тождествам*

$$\widetilde{1_A} = 1_A, \quad \widetilde{\alpha * \beta} = \widetilde{\beta} * \widetilde{\alpha}$$

Тогда если I – инвариантное среднее на A, то

$$\widetilde{I} = I$$

Доказательство. Нужно проверить, что $\widetilde{I}$ тоже является инвариантным средним, и поэтому должен совпадать с I:

$$\alpha * \widetilde{I} = \widetilde{I * \widetilde{\alpha}} = \widetilde{\widetilde{\alpha}(1) \cdot I} = \widetilde{\alpha(\widetilde{1}) \cdot I} = \widetilde{\alpha(1) \cdot I} = \alpha(1) \cdot \widetilde{I}$$

Аналогично, $\widetilde{I} * \alpha = \alpha(1_A) \cdot \widetilde{I}$, и $\widetilde{I}(1_A) = I(\widetilde{1_A}) = I(1_A) = 1$. □

Пример 10.30. Алгебра $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций на локально компактной группе G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G компактна. В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{C}(G)$ будет интеграл по нормированной мере Хаара $\chi \in \mathcal{C}^\star(G)$:

$$I(u) = \int_G u(s)\,\mathrm{d}\,\chi(s), \quad \chi(G) = 1$$

Двойственным образом, алгебра $\mathcal{C}^\star(G)$ мер на G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G дискретна. В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{C}^\star(G)$ будет функция

$$I(s) = \begin{cases} 1, & s = 1_G \\ 0, & s \neq 1_G \end{cases}$$

Доказательство. 1. Для алгебры $\mathcal{C}(G)$ условие (i) должно выполняться, в частности, при $\alpha = \delta_a$:

$$\forall a \in G \quad a \cdot I = (10.16) = \delta_a * I = I$$

то есть, функционал $I : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$ должен быть левоинвариантной мерой, или, другими словами, мерой Хаара χ на G:

$$I = \chi$$

Условие (ii) при этом означает, что

$$\chi(G) = 1$$

То есть, группа G должна быть компактна. Наоборот, если G компактна, то ее мера Хаара χ является и лево- и рпаво-инвариантной, поскольку G будет унимодлулярной, как любая компактная группа – [48]. Значит, χ будет инвариантным средним в нашем смысле.

2. Для алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ тождество (i) означает, что носитель функции I должен быть сосредоточен в одной точке 1_G:

$$\operatorname{supp} I \subseteq \{1_G\}$$

Поэтому группа G должна быть дискретна. Условие же (ii) означает, что

$$I(1_G) = 1$$

□

Пример 10.31. Алгебра $\mathcal{E}(G)$ гладких функций на вещественной группе Ли G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G компактна. В этом случае инвариантным средним будет интеграл по нормированной мере Хаара $\chi \in \mathcal{E}^\star(G)$:

$$I(u) = \int_G u(s)\,\mathrm{d}\,\chi(s), \quad \chi(G) = 1$$

Двойственным образом, алгебра $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений на G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G дискретна (=нульмерна). В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{E}^\star(G)$ будет функция

$$I(s) = \begin{cases} 1, & s = 1_G \\ 0, & s \neq 1_G \end{cases}$$

Пример 10.32. Алгебра $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на группе Штейна G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G редуктивна, то есть является комплексификацией некоторой вещественной компактной группы Ли K. В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{O}(G)$ будет интеграл по нормированной мере Хаара χ на K:

$$I(u) = \int_K u(s)\,\mathrm{d}\,\chi(s), \quad \chi(K) = 1$$

Двойственным образом, алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ голоморфных потоков на G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G дискретна (=нульмерна). В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{O}^\star(G)$ будет функция

$$I(s)=\begin{cases}1, & s=1_G\\ 0, & s\neq 1_G\end{cases}$$

Пример 10.33. Алгебра $\mathcal{R}(G)$ регулярных функций на аффинной алгебраической группе G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G редуктивна, то есть является комплексификацией некоторой вещественной компактной группы Ли K. В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{R}(G)$ будет интеграл по нормированной мере Хаара χ на K:

$$I(u)=\int_K u(s)\,\mathrm{d}\,\chi(s),\quad \chi(K)=1 \tag{10.19}$$

Двойственным образом, алгебра $\mathcal{R}^\star(G)$ регулярных потоков на G тогда и только тогда обладает инвариантным средним, когда группа G дискретна (=нульмерна). В этом случае инвариантным средним на $\mathcal{R}^\star(G)$ будет функция

$$I(s)=\begin{cases}1, & s=1_G\\ 0, & s\neq 1_G\end{cases}$$

В последних двух примерах условие существования инвариантного среднего – редуктивность группы G – нуждается в доказательстве. Мы приведем его для алгебраических групп, но перед этим заметим, что если I – инвариантное среднее на какой-нибудь алгебре функций на группе, например на $\mathcal{R}(G)$, то интеграл по функционалу I (в смысле § 8(d)) должен удовлетворять тождествам

$$\int_G \xi(a\cdot t)\,\mathrm{d}\,I(t)=\int_G \xi(t)\,\mathrm{d}\,I(t), \tag{10.20}$$

$$\int_G \xi(t\cdot a)\,\mathrm{d}\,I(t)=\int_G \xi(t)\,\mathrm{d}\,I(t), \tag{10.21}$$

$$\int_G C\,\mathrm{d}\,I(t)=C, \tag{10.22}$$

(в последнем тождестве имеется в виду интеграл от постоянной функции). Тождества (10.20) и (10.21) следуют из (i), а (10.22) – из (ii). Кроме того, по теореме 10.29, должно выполняться

$$\int_G \xi(t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t)=\int_G \xi(t)\,\mathrm{d}\,I(t), \tag{10.23}$$

Тождества (10.20), (10.21) и (10.23) удобно иногда представлять себе как результат замены переменной в интеграле, с последующим применением формальных тождеств

$$\mathrm{d}\,I(a\cdot t)=\mathrm{d}\,I(t) \tag{10.24}$$

$$\mathrm{d}\,I(t\cdot a)=\mathrm{d}\,I(t) \tag{10.25}$$

$$\mathrm{d}\,I(t^{-1})=\mathrm{d}\,I(t) \tag{10.26}$$

Например, тождество (10.20) можно при таком подходе считать следствием тождества (10.24):

$$\int_G \xi(a\cdot t)\,\mathrm{d}\,I(t)=\left|\begin{matrix}a\cdot t=s, \quad t=a^{-1}\cdot s\\ \mathrm{d}\,I(a^{-1}\cdot s)=\mathrm{d}\,I(s)\end{matrix}\right|=\int_G \xi(s)\,\mathrm{d}\,I(s)$$

Доказательство. Докажем теперь, что существование инвариантного среднего на алгебре регулярных функций $\mathcal{R}(G)$ эквивалентно редуктивности группы G. В прямую сторону утверждение очевидно: если G редуктивна, то формула (10.19) определяет функционал $I:\mathcal{R}^\star(G)\to\mathbb{C}$, инвариантный относительно сдвигов на элементы $g\in K$. Поскольку K плотна по Зарисскому в G, I должен быть инвариантен относительно сдвигов на элементы $g\in G$.

Объясним теперь, почему существование инвариантного среднего на $\mathcal{R}(G)$ влечет редуктивность группы G. Один из критериев редуктивности группы – ее *полная приводимость* [45] – формулируется так: если G действует на конечномерном пространстве X, то всякое G-инвариантное подпространство $Y\subseteq X$ обладает G-инвариантным дополнением $Z\subseteq X$:

$$X=Y+Z,\quad Y\cap Z=0$$

Пусть теперь G регулярно действует на конечномерном пространстве X, [12], и Y – какое-нибудь G-инвариантное подпространство в X. Рассмотрим произвольную $\mathbb{C}$-проекцию

$$p : X \to Y \quad \Big| \quad \forall y \in Y \quad p(y) = y$$

и положим

$$\overline{p}(x) = \int_G t^{-1} \cdot p(t \cdot x) \, \mathrm{d}\, I(t)$$

(где умножение $\cdot$ есть действие G на X). Тогда $\overline{p} : X \to Y$ будет проекцией, потому что $\forall y \in Y$

$$\overline{p}(y) = \int_G t^{-1} \cdot p(t \cdot y) \, \mathrm{d}\, I(t) = \int_G t^{-1} \cdot t \cdot y \, \mathrm{d}\, I(t) = \int_G y \, \mathrm{d}\, I(t) = y$$

и G-морфизмом, потому что

$$\overline{p}(a \cdot x) = \int_G t^{-1} \cdot p(t \cdot a \cdot x) \, \mathrm{d}\, I(t) = \begin{vmatrix} t \cdot a = s, \quad t = s \cdot a^{-1} \\ t^{-1} = a \cdot s^{-1} \\ \mathrm{d}\, I(s \cdot a^{-1}) = \mathrm{d}\, I(s) \end{vmatrix} = \int_G a \cdot s^{-1} \cdot p(s \cdot x) \, \mathrm{d}\, I(s) =$$
$$= (8.8) = a \cdot \int_G s^{-1} \cdot p(s \cdot x) \, \mathrm{d}\, I(s) = a \cdot \overline{p}(x)$$

□

Замечание 10.34. Еще одно полезное соображение, доказывается с помощью интегрирования по группе: для групповой алгебры A следующие условия эквивалентны

(a) A обладает левоинвариантным средним, то есть функционалом $L \in A^\star$ со свойствами

  (i) $\alpha * L = \alpha(1_A) \cdot L, \quad \alpha \in A^\star$,

  (ii) $L(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$,

(b) A обладает правоинвариантным средним, то есть функционалом $R \in A^\star$ со свойствами

  (i) $R * \alpha = \alpha(1_A) \cdot R, \quad \alpha \in A^\star$,

  (ii) $R(1_A) = 1_{\mathbb{C}}$,

(c) A обладает и “двусторонне” инвариантным средним I.

Доказательство. Если существует левоинвариантное среднее L, то сначала можно определить правоинвариантное среднее R по формуле

$$R = \widetilde{L}$$

после чего формула

$$I(u) = \int_G \int_G u(s \cdot t) \, \mathrm{d}\, L(s) \, \mathrm{d}\, R(t)$$

будет определять “двусторонне” инвариантное среднее I, потому что из тождеств

$$\mathrm{d}\, L(a \cdot s) = \mathrm{d}\, L(s), \quad \mathrm{d}\, R(t \cdot a) = \mathrm{d}\, R(t)$$

следует

$$I(a \cdot u \cdot b) = \int_G \int_G [a \cdot u \cdot b](s \cdot t) \, \mathrm{d}\, L(s) \, \mathrm{d}\, R(t) = \int_G \int_G u(b \cdot s \cdot t \cdot a) \, \mathrm{d}\, L(s) \, \mathrm{d}\, R(t) =$$
$$= \begin{vmatrix} b \cdot s = \sigma, \quad s = b^{-1} \cdot \sigma \\ t \cdot a = \tau, \quad t = \tau \cdot a^{-1} \end{vmatrix} =$$
$$= \int_G \int_G u(\sigma \cdot \tau) \, \mathrm{d}\, L(b^{-1} \cdot \sigma) \, \mathrm{d}\, R(\tau \cdot a^{-1}) = \int_G \int_G u(\sigma \cdot \tau) \, \mathrm{d}\, L(\sigma) \, \mathrm{d}\, R(\tau) = I(u)$$

□

[12] То есть дано регулярное представление $\mathcal{R}^\star(G) \to \mathcal{L}(X)$ в смысле определения пункта § 10(a).

§ 11 Стереотипные модули

Пусть всюду в этом параграфе A обозначает проективную стереотипную алгебру. Мы рассмотрим здесь стереотипные A-модули, определенные во введении общей конструкцией 4*.

(a) Теорема о представлении

Стереотипное пространство X над $\mathbb{C}$ с заданной на нем структурой левого (или правого) A-модуля называется *стереотипным A-модулем*, если операция умножения на элементы A является непрерывной билинейной формой в смысле определения § 5(f). Иными словами, X – левый (правый) стереотипный A-модуль, если

$$\forall K \in \mathcal{S}(A) \quad \forall x_i \overset{X}{\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \quad a \cdot x_i \underset{a\in K}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0 \quad (x_i \cdot a \underset{a\in K}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0)$$

и

$$\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \forall a_i \overset{A}{\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}} 0 \quad a_i \cdot x \underset{x\in S}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0 \quad (x \cdot a_i \underset{x\in S}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0)$$

Из теоремы 7.3 следует, что X тогда и только тогда будет стереотипным (левым) модулем над A, когда операция умножения μ на элементы A непрерывно пропускается через стереотипное проективное тензорное произведение

$$\begin{tikzcd} A \times X \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \circledast X \arrow[dl, dashed] \\ & X & \end{tikzcd}.$$

Пример 11.1. Всякое стереотипное пространство X будет стереотипным левым модулем над стереотипной алгеброй $\mathcal{L}(X)$ (из примера 10.2). Это следует из определения топологии в $\mathcal{L}(X)$ (§ 9(a)) и теоремы 5.1.

Теорема 11.2 (о представлении)**.** *Пусть A – проективная стереотипная алгебра. Стереотипное пространство X над $\mathbb{C}$ со структурой левого (правого) A-модуля будет стереотипным A-модулем тогда и только тогда, когда операция умножения на элементы A задает непрерывный гомоморфизм (антигомоморфизм) A в $\mathcal{L}(X)$.*

Доказательство. 1. Пусть X – стереотипный левый A-модуль. Рассмотрим отображение $I : A \to \mathcal{L}(X)$, $Ia(x) = a \cdot x$.

Тогда

- для всякого $a \in A \quad Ia$ действительно лежит в $\mathcal{L}(X)$, так как при фиксированном $a \in A$ отображение $x \mapsto a \cdot x$ непрерывно;
- отображение $a \in A \mapsto Ia \in X : X$ непрерывно, так как если $a_i \overset{A}{\to} 0$, то $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad Ia_i(x) = a_i \cdot x \underset{x\in S}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$
- поэтому по теореме 1.16 отображение $a \in A = A^{\vartriangle} \mapsto Ia \in (X : X)^{\vartriangle} = X \oslash X = \mathcal{L}(X)$ тоже непрерывно.

2. Пусть задан непрерывный гомоморфизм $I : A \to \mathcal{L}(X)$. Положим $a \cdot x = Ia(x), \quad a \in A$ и убедимся, что операция $(a, x) \mapsto a \cdot x$ непрерывна:

- пусть $S \in \mathcal{S}(X)$ и $a_i \overset{A}{\to} 0$, тогда $Ia_i \overset{\mathcal{L}(X)}{\to} 0$ и поэтому $a_i \cdot x = Ia_i(x) \underset{x\in S}{\to} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$
- если же $K \in \mathcal{S}(A)$ и $x_i \overset{X}{\to} 0$, то $I(K)$ – вполне ограничено в $\mathcal{L}(X) = X \oslash X$ и значит по теореме 5.1 равностепенно непрерывно на X. Отсюда $a \cdot x_i = Ia(x_i) \underset{a\in K}{\to} \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

$\square$

Следствие 11.3. *Если X – стереотипный A-модуль, то $\forall K \in \mathcal{S}(A) \quad \forall S \in \mathcal{S}(X) \quad K \cdot S \in \mathcal{S}(X)$.*

(b) Сопряженный модуль

Теорема 11.4. *Если X – стереотипный левый (правый) модуль над стереотипной алгеброй A, то сопряженное пространство $X^\star$ есть стереотипный правый (левый) модуль над A относительно операции*

$$(f\cdot a)(x) = f(a\cdot x) \qquad ((a\cdot f)(x) = f(x\cdot a)) \tag{11.1}$$

Доказательство. Заметим, что $f\cdot a$ действительно лежит в $X^\star$, так как из $x_i \overset{X}{\to} 0$ следует $a\cdot x_i \overset{X}{\to} 0$ откуда $(f\cdot a)(x_i) = f(a\cdot x_i) \overset{\mathbb{C}}{\to} 0$. Докажем непрерывность билинейной формы $(f,a)\mapsto f\cdot a$.

1. Пусть $F\in\mathcal{S}(X^\star)$ и $a_i \overset{A}{\to} 0$. Тогда $\forall S\in\mathcal{S}(X) \quad a_i\cdot x \underset{x\in S}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$, и поскольку F равностепенно непрерывно на X (в силу леммы 2.2 и теоремы 2.5), $(f\cdot a_i)(x) = f(a_i\cdot x) \underset{x\in S, f\in F}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$ откуда $f\cdot a_i \underset{f\in F}{\overset{X^\star}{\rightrightarrows}} 0$.

2. Пусть $K\in\mathcal{S}(A)$ и $f_i \overset{X^\star}{\to} 0$. Тогда $\forall S\in\mathcal{S}(X) \quad K\cdot S\in\mathcal{S}(X)$ (в силу следствия 11.3) и поэтому $(f_i\cdot a)(x) = f_i(a\cdot x) \underset{x\in S, a\in K}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}} 0$ то есть $f_i\cdot a \underset{a\in K}{\overset{X^\star}{\rightrightarrows}} 0$. □

Пример 11.5 (действие $\mathcal{C}^\star(G)$ на $\mathcal{C}(G)$)**.** Рассмотрим групповую алгебру мер $A=\mathcal{C}^\star(G)$ из примера 10.7. В соответствии с общей формулой (11.1), умножение функции $u\in\mathcal{C}(G)$ слева и справа на меру $\alpha\in\mathcal{C}^\star(G)$ определяется формулами

$$\beta(\alpha\cdot u) = (\beta*\alpha)(u), \qquad \beta(u\cdot\alpha) = (\alpha*\beta)(u), \qquad \beta\in\mathcal{C}^\star(G)$$

В силу (10.15), это означает, что

$$\beta(\alpha\cdot u) = (\beta*\alpha)(u) = \beta\left(\widetilde{\alpha*\widetilde{u}}\right), \qquad \beta(u\cdot\alpha) = (\alpha*\beta)(u) = \beta\left(\widetilde{\alpha}*u\right),$$

То есть, в силу (10.12), справедливы явные формулы:

$$\alpha\cdot u = \widetilde{\alpha*\widetilde{u}} = u*\widetilde{\alpha}, \qquad u\cdot\alpha = \widetilde{\widetilde{u}*\alpha} = \widetilde{\alpha}*u \tag{11.2}$$

В частности,

$$\delta_a\cdot u = u*\delta_{a^{-1}} = a\cdot u, \qquad u\cdot\delta_a = \delta_{a^{-1}}*u = u\cdot a \qquad (a\in G) \tag{11.3}$$

Где $a\cdot u$ и $u\cdot a$ определены равенствами. Таким образом, именно формулы (10.5) описывают действие группы G на пространстве $\mathcal{C}(G)$, соответствующее действию алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ на $\mathcal{C}(G)$ по теореме 10.12.

(c) Непосредственный подмодуль и непосредственный фактор-модуль

Для произвольной проективной стереотипной алгебры A обозначим символом ${}_A\mathfrak{Ste}$ категорию левых стереотипных A-модулей, а символом $\mathfrak{Ste}_A$ категорию правых стереотипных A-модулей *с непрерывными A- линейными отображениями в качестве морфизмов*. По аналогии с § 4(d), в категориях ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ можно определить понятия *непосредственного подмодуля* и *непосредственного фактор-модуля.*

Стереотипный A-модуль Y называется *подмодулем стереотипного A-модуля X*, если задан мономорфизм стереотипных A-модулей $\mu: Y\to X$ (называемый *представляющим мономорфизмом* подмодуля Y в A-модуле X).

Если Y и $\widetilde{Y}$ – два подмодуля в стереотипном A-модуле X с представляющими мономорфизмами μ и $\widetilde{\mu}$, и задан *биморфизм* $\beta: Y\to\widetilde{Y}$ замыкающий диаграмму (4.8):

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\beta"] & & \widetilde{Y} \arrow[ul, "\widetilde{\mu}"'] \end{tikzcd},$$

тогда подмодуль $\widetilde{Y}$ называется *посредником* подмодуля Y в A-модуле X.

Подмодуль Y в стереотипном A-модуле X называется *непосредственным подмодулем* в X, если у него нет посредников, то есть если для любого его посредника $\widetilde{Y}$ в X соответствующий биморфизм β в диаграмме (4.8) автоматически является изоморфизмом.

Пример 11.6. Пусть E – алгебраический A-подмодуль в стереотипном A-модуле X, являющийся одновременно замкнутым локально-выпуклым подпространством в X. Тогда псевдонасыщение $E^\vartriangle$ обладает единственной структурой стереотипного A-модуля, при которой псевдонасыщение $\sigma^\vartriangle : E^\vartriangle \to X$ вложения $\sigma : E \subseteq X$ является морфизмом стереотипных A-модулей. При этом $E^\vartriangle$ будет непосредственным подмодулем стереотипного A-модуля X с представляющим мономорфизмом $\sigma^\vartriangle$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $I : A \to \mathcal{L}(X), \quad Ia(x) = a \cdot x$, непрерывное по теореме 11.2. Для всякого $a \in A$ морфизм $Ia : X \to X$ переводит E в E, поэтому определено ограничение $I_E a = Ia|_E : E \to E$ (являющееся непрерывным отображением локально-выпуклых пространств). Пусть $a_i \overset{A}{\to} 0$. Для всякого $S \in \mathcal{S}(E) = \mathcal{S}(E^\vartriangle)$ мы получим $I_E a_i(x) = a_i \cdot x \underset{x\in S}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0$ поэтому $I_E a_i \overset{E:(E^\vartriangle)}{\longrightarrow} 0$. Значит определено непрерывное отображение

$$I_E : A \to E : (E^\vartriangle)$$

По лемме 5.19, то же отображение должно непрерывно действовать из $A^\vartriangle = A$ в $(E^\vartriangle) : (E^\vartriangle)$:

$$I_E : A \to (E^\vartriangle) : (E^\vartriangle)$$

Отсюда по теореме 1.16 это же отображение должно непрерывно действовать из $A^\vartriangle = A$ в $(E^\vartriangle : E^\vartriangle)^\vartriangle = E^\vartriangle \oslash E^\vartriangle = \mathcal{L}(E^\vartriangle)$:

$$I_E : A \to \mathcal{L}(E^\vartriangle)$$

Теперь по теореме 11.2 мы получаем, что $E^\vartriangle$ – стереотипный A-модуль. Дальнейшее очевидно. $\square$

Следующая теорема аналогична теореме 4.15:

Теорема 11.7 (о строении непосредственных подмодулей)**.** *Стереотипный A-модуль Y тогда и только тогда будет непосредственным подмодулем стереотипного A-модуля X с представляющим мономорфизмом $\mu : Y \to X$, когда найдутся*

– *алгебраический A-подмодуль E в X, являющийся одновременно замкнутым локально-выпук-лым подпространством в X,*

– *изоморфизм стереотипных пространств $\beta : Y \to E^\vartriangle$,*

такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X & \\ Y \arrow[ur, "\mu"] \arrow[rr, "\beta"] & & E^\vartriangle \arrow[ul, "\sigma^\vartriangle"'] \end{tikzcd},$$

в которой $\sigma^\vartriangle$ – псевдонасыщение естественного вложения $\sigma : E \subseteq X$.

Стереотипный A-модуль Y называется *фактор-модулем стереотипного A-модуля* X, если задан эпиморфизм стереотипных A-модулей $\varepsilon : X \to Y$, называемый *представляющим эпиморфизмом* фактор-модуля Y стереотипного A-модуля X.

Если Y и $\widetilde{Y}$ – два фактор-модуля стереотипного A-модуля X с представляющими эпиморфизмами ε и $\widetilde{\varepsilon}$, и существует *биморфизм* стереотипных A-модулей $\beta : \widetilde{Y} \to Y$, замыкающий диаграмму (4.10)

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\widetilde{\varepsilon}"] & \\ Y & & \widetilde{Y} \arrow[ll, "\beta"'] \end{tikzcd},$$

то фактор-модуль $\widetilde{Y}$ называется *посредником* фактор-модуля Y стереотипного A-модуля X.

Фактор-модуль Y стереотипного A-модуля X называется *непосредственным фактор-модулем* стереотипного A-модуля X, если у него нет посредников, то есть если для любого его посредника $\widetilde{Y}$ соответствующий биморфизм β в диаграмме (4.10) автоматически непрерывен.

Пример 11.8. Пусть E – алгебраический A-подмодуль в стереотипном A-модуле X, являющийся одновременно замкнутым локально-выпуклым подпространством в X. Тогда псевдопополнение $(X/E)^\triangledown$ фактор-пространства X/E обладает единственной структурой стереотипного A-модуля, при которой псевдопополнение $\pi^\triangledown : X \to (X/E)^\triangledown$ фактор-отображения $\pi : X \to X/E$ будет морфизмом стереотипных A-модулей. При этом $(X/E)^\triangledown$ будет непосредственным фактор-модулем стереотипного A-модуля X с представляющим эпиморфизмом $\pi^\triangledown$.

Доказательство. Рассмотрим сопряженный к X модуль $X^\star$ (он будет стереотипным A-модулем по теореме 11.4). Аннулятор пространства E

$$E^\perp = \{f \in X^\star : f|_E = 0\}$$

будет алгебраическим подмодулем и замкнутым локально-выпуклым подпространством в $X^\star$. В силу примера 11.6, псевдонасыщение $(E^\perp)^\vartriangle$ должно быть стереотипным A-модулем. Значит по теореме 11.4, сопряженное пространство $((E^\perp)^\vartriangle)^\star$ – тоже стереотипный A-модуль. Применим теперь формулу (4.7):

$$((E^\perp)^\vartriangle)^\star = (X/E)^\triangledown$$

Мы получаем, что $(X/E)^\triangledown$ – стереотипный A-модуль. Дальше ясно. $\square$

Теорема 11.9 (о строении непосредственных фактор-модулей)**.** *Стереотипный A-модуль Y тогда и только тогда будет непосредственным фактор-модулем стереотипного модуля X с представляющим эпиморфизмом $\varepsilon : X \to Y$, когда найдутся*

- *алгебраический A-подмодуль E в X, являющийся одновременно замкнутым локально-выпук-лым подпространством в X,*

- *изоморфизм стереотипных A-модулей $\beta : (X/E)^\triangledown \to Y$,*

такие, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varepsilon"'] \arrow[dr, "\pi^\triangledown"] & \\ Y & & (X/E)^\triangledown \arrow[ll, "\beta"'] \end{tikzcd},$$

в которой $\pi^\triangledown$ – псевдопополнение фактор-отображения $\pi : X \to X/E$.

Доказательство. В заключение этого пункта приведем обещанное в § 10 доказательство теоремы 10.14. Пусть A – стереотипная алгебра и I – ее двусторонний идеал, замкнутый как подпространство в ЛВП A. Тогда в силу примера 11.8 $B = (A/I)^\triangledown$ является одновременно левым и правым стереотипным A-модулем. Первое означает, что если взять $K \in \mathcal{K}(B)$ и $W \in \mathcal{BU}(B)$, то найдется $U \in \mathcal{U}(A)$ такое, что $U \cdot K \subseteq W$. Отсюда следует, что окрестность нуля $V = \overline{\pi(U)} \in \mathcal{U}(B)$ ($\pi : A \to A/B$ – фактор-отображение) обладает свойством $V \cdot K \subseteq W$. Аналогично получаем что $\forall W \in \mathcal{BU}(B) \quad \forall K \in \mathcal{K}(B) \quad \exists V \in \mathcal{U}(B) \quad K \cdot V \subseteq W$ Вместе все это означает непрерывность билинейной операции умножения $(b, c) \in B \times B \mapsto b \cdot c \in B$. $\square$

(d) Интегральный и дифференциальный объекты в категориях ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$

Напомним, что объект I категории $\mathfrak{K}$ называется *интегральным*, если для любых двух различных морфизмов $\varphi \ne \psi : X \to Y$ найдется морфизм $\iota : I \to X$ такой, что морфизмы $\varphi \circ \iota$ и $\psi \circ \iota$ также будут различны: $\varphi \circ \iota \ne \psi \circ \iota$.

Двойственным образом, объект D категории $\mathfrak{K}$ называется *дифференциальным*, если для любых двух различных морфизмов $\varphi \ne \psi : X \to Y$ найдется морфизм $\delta : Y \to D$ такой, что морфизмы $\delta \circ \varphi$ и $\delta \circ \psi$ также будут различны: $\delta \circ \varphi \ne \delta \circ \psi$.

Теорема 11.10. *Для всякой стереотипной алгебры A категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ обладают интегральным $I = A$ и дифференциальным $D = A^\star$ объектами.*

Доказательство. Сама алгебра A будет, очевидно, стереотипным A-модулем, и, поскольку каждый морфизм $\alpha : A \to Z$ определяется своим значением на единице 1_A алгебры A

$$\alpha(a) = a \cdot \alpha(1_A) \qquad (\alpha(a) = \alpha(1_A) \cdot a),$$

A будет интегральным объектом в ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$. Отсюда по двойственности следует, что сопряженное пространство $A^\star$ (являющееся стереотипным A-модулем в силу теоремы 11.4) будет дифференциальным объектом в ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$. $\square$

(e) Предабелевость категорий ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$

Из теорем 11.7 и 11.9 следует, что ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ являются предабелевыми категориями. Следующая теорема доказывается так же, как теорема 4.18:

Теорема 11.11. *Всякий морфизм стереотипных левых (правых) A-модулей $\varphi : X \to Y$ обладает*

– *ядром* $\ker\varphi : \operatorname{Ker}\varphi \to X$,

– *коядром* $\operatorname{coker}\varphi : Y \to \operatorname{Coker}\varphi$,

– *образом* $\operatorname{im}\varphi : \operatorname{Im}\varphi \to Y$

– *и кообразом* $\operatorname{coim}\varphi : X \to \operatorname{Coim}\varphi$

в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ ($\mathfrak{Ste}_A$) левых (правых) стереотипных пространств. При этом, операция $\varphi \mapsto \varphi^\star$ перехода к сопряженному отображению устанавливает следующие связи между этими объектами:

$$(\ker\varphi)^\star = \operatorname{coker}\varphi^\star \quad (\operatorname{coker}\varphi)^\star = \ker\varphi^\star \quad (\operatorname{im}\varphi)^\star = \operatorname{coim}\varphi^\star \quad (\operatorname{coim}\varphi)^\star = \operatorname{im}\varphi^\star \tag{11.4}$$

$$(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp\vartriangle} = \operatorname{Im}\varphi^\star \quad (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp\vartriangle} = \operatorname{Ker}\varphi^\star \quad \operatorname{Ker}\varphi = (\operatorname{Im}\varphi^\star)^{\perp\vartriangle} \quad \operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi^\star)^{\perp\vartriangle} \tag{11.5}$$

(f) Мономорфизмы, эпиморфизмы, иммерсии и субмерсии в категориях ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$

Из теоремы 11.11 следует

Теорема 11.12. *Морфизм стереотипных A-модулей $\varphi : X \to Y$ тогда и только тогда будет мономорфизмом, когда $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ (что в свою очередь равносильно инъективности отображения φ).*

Отсюда с помощью формул (11.5) выводится

Теорема 11.13. *Морфизм стереотипных A-модулей $\varphi : X \to Y$ тогда и только тогда будет эпиморфизмом, когда $\operatorname{Im}\varphi = Y$ (что в свою очередь равносильно плотности множества $\varphi(X) = \{\varphi(x); x \in X\}$ в Y).*

Понятия *иммерсии* и *субмерсии* стереотипных A-модулей определяются по аналогии с § 4(f), причем остаются справедливыми теоремы аналогичные 4.19 и 4.20:

Теорема 11.14. *Для морфизма стереотипных A-модулей $\varphi : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *φ является иммерсией;*

(ii) *φ совпадает со своим образом: $\varphi = \operatorname{im}\varphi$ (то есть $\operatorname{coim}\varphi$ и $\operatorname{red}\varphi$ являются изоморфизмами);*

(iii) *X является непосредственным подмодулем в Y с представляющим мономорфизмом φ.*

Теорема 11.15. *Для морфизма стереотипных A-модулей $\varphi : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *φ является субмерсией;*

(ii) *φ совпадает со своим кообразом: $\varphi = \operatorname{coim}\varphi$ (то есть $\operatorname{im}\varphi$ и $\operatorname{red}\varphi$ являются изоморфизмами);*

(iii) *Y является непосредственным фактор-модулем для X с представляющим эпиморфизмом φ.*

(g) Полнота и кополнота категорий ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$

Как и $\mathfrak{Ste}$, категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ обладают *полнотой* и *кополнотой*:

Теорема 11.16. *Всякое семейство $\{X_i; i \in I\}$ стереотипных A-модулей обладает прямой суммой и прямым произведением в категории стереотипных A-модулей .*

Доказательство. Доказательство, в силу теоремы 11.4, достаточно провести для прямой суммы. Рассмотрим локально выпуклую прямую сумму $\bigoplus_{i\in I} X_i$ и покажем, что билинейная форма

$$A\times\bigoplus_{i\in I} X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i \quad \big| \quad (a\cdot x)_i = a\cdot x_i$$

непрерывна в смысле § 5(f).

1. Пусть S – вполне ограниченное множество в $X=\bigoplus_{i\in I} X_i$ то есть существует конечный набор $i_1,...,i_n\in I$ и компакты $S_1\subseteq X_{i_1},...,S_n\subseteq X_{i_n}$ такие, что $S\subseteq\bigoplus_{k=1}^n S_k$. Тогда если $a_\nu \xrightarrow{A} 0\,(\nu\to\infty)$, то $\forall k=1,...,n \quad a_\nu\cdot x_k \underset{x_k\in S_k}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0\,(\nu\to\infty)$, и поэтому $a_\nu\cdot x \underset{x\in S}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0\,(\nu\to\infty)$.

2. Пусть K – вполне ограниченное множество в A. Тогда, по теореме 5.1, для всякого $i\in I$ операторы умножения $\{a: X_i\to X_i \,|\, a\in K\}$

– равностепенно непрерывны на компактах в X_i;

– поточечно предкомпактны на X_i.

Отсюда следует, что операторы $\{a:\bigoplus_{i\in I} X_i\to\bigoplus_{i\in I} X_i \,|\, a\in K\}$

– равностепенно непрерывны на компактах в $\bigoplus_{i\in I} X_i$;

– поточечно предкомпактны на $\bigoplus_{i\in I} X_i$.

Значит, в силу теоремы 5.1 и следствия 5.5, операторы умножения на элементы $a\in K$ равностепенно непрерывны на $X=\bigoplus_{i\in I} X_i$. То есть, если $x^\nu \xrightarrow{X} 0\,(\nu\to\infty)$, то $a\cdot x^\nu \underset{a\in K}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0\,(\nu\to\infty)$. □

Теорема 11.17. *Всякая индуктивная (проективная) система $\{X_i; i\in I, i\to\infty\}$ стереотипных A-модулей обладает индуктивным (проективным) пределом в категории стереотипных A-модулей.*

Доказательство. Для доказательства, в силу теоремы 11.4, достаточно рассмотреть проективный предел. По предыдущей теореме 11.16, прямое произведение $\prod_{i\in I} X_i$ будет стереотипным A-модулем, поэтому непрерывна билинейная форма

$$A\times\prod_{i\in I} X_i \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$$

Локально выпуклый проективный предел $\{\mathfrak{LCS}-\underset{i\to\infty}{\to}\underset{\leftarrow}{\lim} X_i\}$ будет замкнутым подпространством в локально выпуклом пространстве $\prod_{i\in I} X_i$. Поэтому должна быть непрерывна билинейная форма

$$A\times\{\mathfrak{LCS}-\lim_{\substack{\leftarrow\\ i\to\infty}} X_i\} \longrightarrow \{\mathfrak{LCS}-\lim_{\substack{\leftarrow\\ i\to\infty}} X_i\}$$

По теореме 5.24, отсюда следует, что псевдонасыщение

$$A\times\{\mathfrak{LCS}-\lim_{\substack{\leftarrow\\ i\to\infty}} X_i\}^\vartriangle \longrightarrow \{\mathfrak{LCS}-\lim_{\substack{\leftarrow\\ i\to\infty}} X_i\}^\vartriangle$$

также является непрерывной билинейной формой. Таким образом, $\{\mathfrak{LCS}-\lim\limits_{\substack{\leftarrow\\ i\to\infty}} X_i\}^\vartriangle$ есть стереотипный A-модуль. Очевидно, он будет проективным пределом в категории $\mathfrak{Ste}$. □

§ 12 Пространства морфизмов, сбалансированных форм и тензорные произведения

(a) Пространство морфизмов $Y\overset{A}{\oslash}X$

Пусть X и Y – два левых (или правых) стереотипных модуля над стереотипной алгеброй A. Множество $\mathrm{Mor}_A(X,Y)$ всех морфизмов $\varphi: X\to Y$ (то есть A-линейных непрерывных отображений) можно естественным образом наделить структурой стереотипного пространства над $\mathbb{C}$.

Обозначим символом $Y \overset{A}{:} X$ векторное пространство всех морфизмов $\varphi : X \to Y$ в ${}_A\mathfrak{Ste}$ (соответственно в $\mathfrak{Ste}_A$), наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X. Очевидно, пространство $Y \overset{A}{:} X$ псевдополно (следствие 5.5), поэтому его псевдонасыщение

$$Y \overset{A}{\oslash} X = (Y \overset{A}{:} X)^{\vartriangle} \tag{12.1}$$

является стереотипным пространством. Мы называем его *внутренним пространством морфизмов* из X в Y. Из теоремы 5.1 следует

Теорема 12.1. *Множество морфизмов $\Phi \subseteq Y \overset{A}{\oslash} X$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим двум условиям*

(a) *равностепенная непрерывность:* $\forall V \in \mathcal{U}(Y) \quad \exists U \in \mathcal{U}(X) \quad \Phi(U) \subseteq V$;

(b) *равномерная предкомпактность на предкомпактных множествах:* $\forall S \in S(X) \quad \Phi(S) \in \mathcal{S}(Y)$

Композиция $\beta \circ \alpha$ и дробь $\beta \oslash \alpha$ определяются так же, как и в § 6(d). Следующие утверждения аналогичны теоремам 6.14 и 6.15.

Теорема 12.2. *Для любых $X, Y, Z, E, F, G, H \in {}_A\mathfrak{Ste}$ (или $\mathfrak{Ste}_A$) композиция*

$$(\beta, \alpha) \in (Z \overset{A}{\oslash} Y) \times (Y \overset{A}{\oslash} X) \longmapsto (\beta \circ \alpha) \in (Z \overset{A}{\oslash} X)$$

и дробь

$$(\beta, \alpha) \in (H \overset{A}{\oslash} G) \times (F \overset{A}{\oslash} E) \longmapsto (\beta \oslash \alpha) \in (H \overset{A}{\oslash} E) \overset{\mathbb{C}}{\oslash} (G \overset{A}{\oslash} F)$$

являются непрерывными билинейными формами.

Вместе с теоремой 7.3 это означает, что справедлива

Теорема 12.3. *Категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$ являются относительными категориями над моноидальной категорией* $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$.

Если X или Y является (стереотипным) модулем над некоторой новой (стереотипной) алгеброй B, то $Y \overset{A}{\oslash} X$ также будет (стереотипным) модулем над B. Более точная формулировка этого утверждения содержится в следующих двух теоремах.

Теорема 12.4. *Пусть A и B – стереотипные алгебры и $X, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$. Тогда*

(a) *если $Y \in {}_B\mathfrak{Ste}$, причем*

$$a \cdot b \cdot y = b \cdot a \cdot y, \qquad a \in A, b \in B, y \in Y$$

то $Y \overset{A}{\oslash} X \in {}_B\mathfrak{Ste}$ относительно умножения

$$(b \cdot \varphi)(x) = b \cdot \varphi(x), \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(b) *если $X \in {}_B\mathfrak{Ste}$, причем*

$$a \cdot b \cdot x = b \cdot a \cdot x, \qquad a \in A, b \in B, x \in X$$

то $Y \overset{A}{\oslash} X \in \mathfrak{Ste}_B$ относительно умножения

$$(\varphi \cdot b)(x) = \varphi(b \cdot x), \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(c) *если $Y \in \mathfrak{Ste}_B$, причем*

$$a \cdot (y \cdot b) = (a \cdot y) \cdot b, \qquad a \in A, b \in B, y \in Y$$

то $Y \overset{A}{\oslash} X \in \mathfrak{Ste}_B$ относительно умножения

$$(\varphi \cdot b)(x) = \varphi(x) \cdot b, \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(d) *если* $X \in \mathfrak{Ste}_B$, *причем*

$$a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b, \qquad a \in A, b \in B, x \in X$$

то $Y \overset{A}{\oslash} X \in {}_B\mathfrak{Ste}$ *относительно умножения*

$$(b \cdot \varphi)(x) = \varphi(x \cdot b), \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

Доказательство. Докажем для примера пункт (a) (остальные доказываются аналогично). Сначала нужно убедиться, что $\forall b \in B \quad \forall \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X \quad b \cdot \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$. Действительно, если $x_i \overset{X}{\to} 0$, то $\varphi(x_i) \overset{Y}{\to} 0$, и $(b \cdot \varphi)(x_i) = b \cdot \varphi(x_i) \overset{Y}{\to} 0$. Теперь покажем, что отображение

$$Ib : (Y \overset{A}{\oslash} X) \to (Y \overset{A}{\oslash} X), \quad Ib(\varphi) = b \cdot \varphi$$

непрерывно. Действительно, если $\varphi_i \overset{Y \overset{A}{\vdots} X}{\to} 0$, то есть $\forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \varphi_i(x) \underset{x \in S}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$, то мы получаем $Ib(\varphi_i)(x) = b \cdot \varphi_i(x) \underset{x \in S}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$, значит $Ib(\varphi_i) \xrightarrow{Y \overset{A}{\vdots} X} 0$. Итак, непрерывно отображение

$$Ib : (Y \overset{A}{\vdots} X) \to (Y \overset{A}{\vdots} X)$$

а по теореме 1.16 это означает, что непрерывно отображение

$$Ib = (Ib)^{\vartriangle} : (Y \overset{A}{\vdots} X)^{\vartriangle} = (Y \overset{A}{\oslash} X) \to (Y \overset{A}{\oslash} X) = (Y \overset{A}{\vdots} X)^{\vartriangle}$$

Таким образом, $\forall b \in B \quad Ib \in \mathcal{L}(Y \overset{A}{\oslash} X)$. Докажем теперь непрерывность отображения

$$I : B \to \mathcal{L}(Y \overset{A}{\oslash} X)$$

Пусть $b_i \overset{B}{\to} 0$. Тогда, поскольку $\forall \varPhi \in \mathcal{S}(Y \overset{A}{\oslash} X) \quad \forall S \in \mathcal{S}(X) \quad \varPhi(S) \in \mathcal{S}(Y)$ (теорема 12.1), имеем $b_i \cdot \varphi(x) \underset{x \in S, \varphi \in \varPhi}{\overset{Y}{\longrightarrow}} 0$. Отсюда $b_i \cdot \varphi \underset{\varphi \in \varPhi}{\xrightarrow{Y \overset{A}{\vdots} X}} 0$ Следовательно, непрерывно отображение

$$I : B \to \{(Y \overset{A}{\vdots} X) \overset{\mathbb{C}}{\vdots} (Y \overset{A}{\oslash} X)\}$$

По лемме 5.19 это означает, что непрерывно отображение

$$I = I^{\vartriangle} : B = B^{\vartriangle} \to \{(Y \overset{A}{\vdots} X)^{\vartriangle} \overset{\mathbb{C}}{\vdots} (Y \overset{A}{\oslash} X)\} = \{(Y \overset{A}{\oslash} X) \overset{\mathbb{C}}{\vdots} (Y \overset{A}{\oslash} X)\}$$

Теперь применяем теорему 1.16 и получаем, что непрерывно отображение

$$I = I^{\vartriangle} : B = B^{\vartriangle} \to \{(Y \overset{A}{\oslash} X) \overset{\mathbb{C}}{\vdots} (Y \overset{A}{\oslash} X)\}^{\vartriangle} = (Y \overset{A}{\oslash} X) \overset{\mathbb{C}}{\oslash} (Y \overset{A}{\oslash} X) = \mathcal{L}(Y \overset{A}{\oslash} X)$$

Итак, непрерывно отображение

$$I : B \to \mathcal{L}(Y \overset{A}{\oslash} X)$$

и это значит, что $Y \overset{A}{\oslash} X$ является левым стереотипным B-модулем. □

Если X и Y – правые A-модули, то утверждение, аналогичное теореме 12.4, выглядит так:

Теорема 12.5. *Пусть A и B – стереотипные алгебры и $X, Y \in \mathfrak{Ste}_A$. Тогда*

(a) *если* $Y \in \mathfrak{Ste}_B$, *причем*

$$y \cdot a \cdot b = y \cdot b \cdot a, \qquad a \in A, b \in B, y \in Y$$

то $Y \overset{A}{\oslash} X \in \mathfrak{Ste}_B$ *относительно умножения*

$$(\varphi \cdot b)(x) = (\varphi(x)) \cdot b \qquad , b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(b) *если* $X \in \mathfrak{Ste}_B$, *причем*
$$x \cdot a \cdot b = x \cdot b \cdot a, \qquad a \in A, b \in B, x \in X$$
то $Y \overset{A}{\oslash} X \in {}_B\mathfrak{Ste}$ *относительно умножения*
$$(b \cdot \varphi)(x) = \varphi(x \cdot b), \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(c) *если* $Y \in {}_B\mathfrak{Ste}$, *причем*
$$b \cdot (y \cdot a) = (b \cdot y) \cdot a, \qquad a \in A, b \in B, y \in Y$$
то $Y \overset{A}{\oslash} X \in {}_B\mathfrak{Ste}$ *относительно умножения*
$$(b \cdot \varphi)(x) = b \cdot \varphi(x), \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(d) *если* $X \in {}_B\mathfrak{Ste}$, *причем*
$$b \cdot (x \cdot a) = (b \cdot x) \cdot a, \qquad a \in A, b \in B, x \in X$$
то $Y \overset{A}{\oslash} X \in \mathfrak{Ste}_B$ *относительно умножения*
$$(\varphi \cdot b)(x) = \varphi(b \cdot x), \qquad b \in B, x \in X, \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X$$

(b) Пространство билинейных форм $Z \overset{A}{\oslash} (Y, X)$

Пусть A – стереотипная алгебра и $X \in {}_A\mathfrak{Ste}, Y \in \mathfrak{Ste}_A, Z \in \mathfrak{Ste}$. Билинейную форму $\beta : Y \times X \to Z$ мы называем *сбалансированной над* A если
$$\beta(y \cdot a, x) = \beta(y, a \cdot x)$$

Символом $Z \overset{A}{:} (Y, X)$ мы обозначаем пространство всех непрерывных (в смысле определения § 5(f)) сбалансированных над A билинейных форм $\beta : Y \times X \to Z$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в $Y \times X$. Аналогично теореме 5.21 доказывается

Лемма 12.6. *Пусть* $X \in {}_A\mathfrak{Ste}, Y \in \mathfrak{Ste}_A, Z \in \mathfrak{Ste}$. *Тогда формула*
$$\beta(y, x) = \varphi(y)(x)$$
устанавливает изоморфизм локально-выпуклых пространств
$$Z \overset{A}{:} (Y, X) = (Z \overset{\mathbb{C}}{:} Y) \overset{A}{:} X \tag{12.2}$$
в котором пространство $Z \overset{\mathbb{C}}{:} Y$ *наделено структурой правого* A*-модуля по формуле*
$$(a \cdot \psi)(y) = \psi(y \cdot a)$$

Из (12.2) следует, что $Z \overset{A}{:} (Y, X)$ псевдополно, поэтому псевдонасыщение этого пространства
$$Z \overset{A}{\oslash} (Y, X) = \{Z \overset{A}{:} (Y, X)\}^\vartriangle \tag{12.3}$$
является стереотипным пространством. Мы называем его *пространством непрерывных* A*-сбалансированных билинейных форм.* Из леммы 12.6 следует

Теорема 12.7. *Если* $X \in {}_A\mathfrak{Ste}, Y \in \mathfrak{Ste}_A, Z \in \mathfrak{Ste}$ *то формула*
$$\beta(y, x) = \varphi(y)(x)$$
устанавливает изоморфизм стереотипных пространств
$$Z \overset{A}{\oslash} (Y, X) = (Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y) \overset{A}{\oslash} X$$
где $Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ *наделено структурой правого* A*-модуля по формуле*
$$(a \cdot \psi)(y) = \psi(y \cdot a)$$

(c) Проективное тензорное произведение $X \overset{A}{\circledast} Y$

Проективное (стереотипное) тензорное произведение над A стереотипных A-модулей $X \in \mathfrak{Ste}_A$ и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ определяется равенством

$$X \overset{A}{\circledast} Y := (X^\star \overset{A}{\oslash} Y)^\star \tag{12.4}$$

или эквивалентным (по теореме 12.7) равенством

$$X \overset{A}{\circledast} Y := (\mathbb{C} \overset{A}{\oslash} (X, Y))^\star$$

Если $x \in X, y \in Y$, то элементарный тензор $x \overset{A}{\circledast} y \in X \overset{A}{\circledast} Y$ определяется равенством

$$(x \overset{A}{\circledast} y)(\varphi) := \varphi(y)(x), \qquad \varphi \in X^\star \overset{A}{\oslash} Y \tag{12.5}$$

или

$$(x \overset{A}{\circledast} y)(\beta) := \beta(x, y), \qquad \beta \in \mathbb{C} \overset{A}{\oslash} (X, Y)$$

По аналогии с § 7(a) доказываются следующие утверждения.

Предложение 12.8. *Отображение $\iota : (x, y) \in X \times Y \mapsto x \overset{A}{\circledast} y \in X \overset{A}{\circledast} Y$ является непрерывной A-сбалансированной билинейной формой.*

Предложение 12.9. *Алгебраическое тензорное произведение $X \overset{A}{\otimes} Y$ инъективно и плотно вкладывается в проективное стереотипное тензорное произведение $X \overset{A}{\circledast} Y$ по формуле $x \overset{A}{\otimes} y \mapsto x \overset{A}{\circledast} y$*

Теорема 12.10 (универсальность проективного тензорного произведения)**.** *Пусть $X \in \mathfrak{Ste}_A, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}, Z \in \mathfrak{Ste}$. Тогда для всякой непрерывной A-сбалансированной билинейной формы $\beta : X \times Y \to Z$ найдется единственный морфизм стереотипных пространств $\widetilde{\beta} : X \overset{A}{\otimes} Y \to Z$, замыкающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\beta"'] & & X \circledast Y \arrow[dl, "\widetilde{\beta}"] \\ & Z & \end{tikzcd},$$

где ι – стандартная билинейная форма, определенная в предложении 12.8. При этом, соответствие $\beta \mapsto \widetilde{\beta}$ является изоморфизмом стереотипных пространств

$$Z \overset{A}{\oslash} (X, Y) = Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} (X \overset{A}{\circledast} Y)$$

Из теоремы 12.4 следует

Теорема 12.11. *Пусть A и B – стереотипные алгебры и $X \in \mathfrak{Ste}_A, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$. Тогда*

(a) если $Y \in {}_B\mathfrak{Ste}$, причем

$$a \cdot (b \cdot y) = b \cdot (a \cdot y)$$

то $X \overset{A}{\circledast} Y \in_B \mathfrak{Ste}$ относительно умножения

$$b \cdot (x \overset{A}{\circledast} y) = x \overset{A}{\circledast} (b \cdot y)$$

или, более подробно,

$$(b \cdot u)(\varphi) = u(\varphi \cdot b), \qquad \varphi \in X^\star \overset{A}{\oslash} Y, u \in (X^\star \overset{A}{\oslash} Y)^\star$$

$$(\varphi \cdot b)(y) = \varphi(b \cdot y), \qquad y \in Y$$

(b) *если $X \in \mathfrak{Ste}_B$ причем*

$$(x \cdot a) \cdot b = (x \cdot b) \cdot a$$

то $X \overset{A}{\circledast} Y \in \mathfrak{Ste}_B$ относительно умножения

$$(x \overset{A}{\circledast} y) \cdot b = (x \cdot b) \overset{A}{\circledast} y$$

или, более подробно,

$$(u \cdot b)(\varphi) = u(b \cdot \varphi), \qquad \varphi \in X^\star \overset{A}{\oslash} Y, u \in (X^\star \overset{A}{\oslash} Y)^\star$$

$$(b \cdot \varphi)(y)(x) = (b \cdot (\varphi(y)))(x) = \varphi(y)(x \cdot b), \qquad y \in Y, x \in X$$

(c) *если $Y \in \mathfrak{Ste}_B$, причем*

$$(a \cdot y) \cdot b = a \cdot (y \cdot b)$$

то $X \overset{A}{\circledast} Y \in \mathfrak{Ste}_B$ относительно умножения

$$(x \overset{A}{\circledast} y) \cdot b = x \overset{A}{\circledast} (y \cdot b)$$

или, более подробно,

$$(u \cdot b)(\varphi) = u(b \cdot \varphi), \qquad \varphi \in X^\star \overset{A}{\oslash} Y, u \in (X^\star \overset{A}{\oslash} Y)^\star$$

$$(b \cdot \varphi)(y) = \varphi(y \cdot b), \qquad y \in Y$$

(d) *если $X \in {}_B\mathfrak{Ste}$ причем*

$$b \cdot (x \cdot a) = (b \cdot x) \cdot a$$

то $X \overset{A}{\circledast} Y \in_B \mathfrak{Ste}$ относительно умножения

$$b \cdot (x \overset{A}{\circledast} y) = (b \cdot x) \overset{A}{\circledast} y$$

или, более подробно,

$$(b \cdot u)(\varphi) = u(\varphi \cdot b), \qquad \varphi \in X^\star \overset{A}{\oslash} Y, u \in (X^\star \overset{A}{\oslash} Y)^\star$$

$$(\varphi \cdot b)(y)(x) = \varphi(y)(b \cdot x), \qquad y \in Y, x \in X$$

Из 12.7 следует

Теорема 12.12. *Для любых $X \in \mathfrak{Ste}_A, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}, Z \in \mathfrak{Ste}$ справедливы изоморфизмы (в $\mathfrak{Ste}$)*

$$Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} (X \overset{A}{\circledast} Y) = Z \overset{A}{\oslash} (X, Y) = (Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y) \overset{A}{\oslash} X = (Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X) \overset{A}{\oslash} Y$$

где структура A-модулей в $Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ и $Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ задается равенствами

$$(\varphi \cdot a)(y) = \varphi(a \cdot y), \qquad \varphi \in Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$$

$$(a \cdot \psi)(x) = \psi(x \cdot a), \qquad \psi \in Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$$

Условимся символом ${}_B\mathfrak{Ste}_A$ обозначать категорию стереотипных (B, A)-бимодулей, то есть стереотипных пространств Y, являющихся одновременно стереотипными левыми B-модулями и стереотипными правыми A-модулями, причем так что выполняется тождество

$$(b \cdot y) \cdot a = b \cdot (y \cdot a)$$

Из теоремы 12.5 следует

Теорема 12.13. *Если $X \in {}_A\mathfrak{Ste}, Y \in {}_B\mathfrak{Ste}_A, Z \in \mathfrak{Ste}_B$ то формула*

$$\psi(y \overset{A}{\circledast} x) = \varphi(x)(y)$$

определяет изоморфизм стереотипных пространств

$$Z \overset{B}{\oslash} (Y \overset{A}{\circledast} X) = (Z \overset{B}{\oslash} Y) \overset{A}{\oslash} X)$$

где $Y \overset{A}{\circledast} X$ наделено структурой левого B-модуля по формуле

$$b \cdot (y \overset{A}{\circledast} x) = (b \cdot y) \overset{A}{\circledast} x$$

В качестве следствия выводится

Теорема 12.14. *Если $X \in \mathfrak{Ste}_A, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}_B, Z \in {}_B\mathfrak{Ste}$ то имеется стандартный изоморфизм*

$$(X \overset{A}{\circledast} Y) \overset{B}{\circledast} Z = X \overset{A}{\circledast} (Y \overset{B}{\circledast} Z)$$

в котором $X \overset{A}{\circledast} Y$ и $Y \overset{B}{\circledast} Z$ наделены структурами правого B-модуля и левого A-модуля по формулам

$$(x \overset{A}{\circledast} y) \cdot b = x \overset{A}{\circledast} (y \cdot b)$$

$$a \cdot (y \overset{B}{\circledast} z) = (a \cdot y) \overset{B}{\circledast} z$$

(d) Инъективное тензорное произведение $X \overset{A}{\odot} Y$

Инъективное (стереотипное) тензорное произведение над A стереотипных A-модулей $X \in \mathfrak{Ste}_A$ и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ определяется равенством

$$X \overset{A}{\odot} Y := Y \overset{A}{\oslash} X^\star$$

или эквивалентным (по теореме 12.7) равенством

$$X \overset{A}{\odot} Y := \mathbb{C} \overset{A}{\oslash} (Y^\star, X^\star) \tag{12.6}$$

Ясно, что проективное и инъективное произведение переходят друг в друга под действием сопряжения

$$(X \overset{A}{\circledast} Y)^\star = Y^\star \overset{A}{\odot} X^\star \qquad (X \overset{A}{\odot} Y)^\star = Y^\star \overset{A}{\circledast} X^\star$$

Из теоремы 12.4 следует

Теорема 12.15. *Пусть A и B – стереотипные алгебры и $X \in \mathfrak{Ste}_A, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$. Тогда*

(a) если $Y \in {}_B\mathfrak{Ste}$, причем

$$a \cdot (b \cdot y) = b \cdot (a \cdot y)$$

то $X \overset{A}{\odot} Y \in {}_B\mathfrak{Ste}$ относительно умножения

$$(b \cdot \varphi)(f) = b \cdot \varphi(f), \qquad \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X^\star, f \in X^\star$$

(b) если $X \in \mathfrak{Ste}_B$ причем

$$(x \cdot a) \cdot b = (x \cdot b) \cdot a$$

то $X \overset{A}{\odot} Y \in \mathfrak{Ste}_B$ относительно умножения

$$(\varphi \cdot b)(f) = \varphi(b \cdot f), \qquad \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X^\star, f \in X^\star$$

$$(b \cdot f)(x) = f(x \cdot b)$$

(c) *если* $Y \in \mathfrak{Ste}_B$, *причем*
$$(a \cdot y) \cdot b = a \cdot (y \cdot b)$$
то $X \overset{A}{\odot} Y \in \mathfrak{Ste}_B$ *относительно умножения*
$$(\varphi \cdot b)(f) = \varphi(f) \cdot b, \qquad \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X^\star, f \in X^\star$$

(d) *если* $X \in {}_B\mathfrak{Ste}$ *причем*
$$b \cdot (x \cdot a) = (b \cdot x) \cdot a$$
то $X \overset{A}{\odot} Y \in_B \mathfrak{Ste}$ *относительно умножения*
$$(b \cdot \varphi)(f) = \varphi(f \cdot b), \qquad \varphi \in Y \overset{A}{\oslash} X^\star, f \in X^\star$$
$$(f \cdot b)(x) = f(b \cdot x)$$

Кроме того, из теоремы 12.14 следует

Теорема 12.16. *Если* $X \in \mathfrak{Ste}_A, Y \in {}_A\mathfrak{Ste}_B, Z \in {}_B\mathfrak{Ste}$ *то имеется стандартный изоморфизм*
$$(X \overset{A}{\odot} Y) \overset{B}{\odot} Z = X \overset{A}{\odot} (Y \overset{B}{\odot} Z)$$

В противоположность проективному тензорному произведению, элементарный тензор $x \overset{A}{\odot} y$ в инъективном тензорном произведении $X \overset{A}{\odot} Y$ определить в общем случае невозможно – в этом симметрия между $X \overset{A}{\circledast} Y$ и $X \overset{A}{\odot} Y$ нарушается. Ее удается восстановить только наделив алгебру A дополнительной структурой – так называемым отражением
$$@ : A^\star \to A$$
Соответствующая аксиоматическая конструкция будет описана в §14.

В § 14(b) нам понадобится следующее обозначение. Если $X \in \mathfrak{Ste}_A$ и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ то пусть
$$X \overset{A}{\tilde{\odot}} Y := X \overset{A}{\oslash} Y^\star$$

(e) Действие $\overset{A}{\oslash}$, $\overset{A}{\circledast}$ и $\overset{A}{\odot}$ на модули A и $A^\star$

Предложение 12.17. *Пусть* $X \in {}_A\mathfrak{Ste}$ $\quad (X \in \mathfrak{Ste}_A)$. *Тогда формула*
$$\varphi(a) = a \cdot x \quad (\varphi(a) = x \cdot a), \quad \varphi \in X \overset{A}{\oslash} A, x \in X$$
устанавливает изоморфизм стереотипных A-модулей
$$X \overset{A}{\oslash} A = X$$
где умножение на A в $X \overset{A}{\oslash} A$ имеет вид
$$(b \cdot \varphi)(a) = \varphi(a \cdot b) \quad (\varphi \cdot b)(a) = \varphi(b \cdot a)$$

Предложение 12.18. *Пусть* $X \in {}_A\mathfrak{Ste}$ $\quad (X \in \mathfrak{Ste}_A)$. *Тогда формула*
$$\eta(x)(a) = f(a \cdot x) \quad (\eta(x)(a) = f(x \cdot a))$$
устанавливает изоморфизм стереотипных A-модулей
$$A^\star \overset{A}{\oslash} X = X^\star$$
где умножение на A в $A^\star \overset{A}{\oslash} X$ имеет вид
$$(\eta \cdot b)(x) = \eta(x) \cdot b \quad ((b \cdot \eta)(x) = b \cdot \eta(x)$$

Предложение 12.19. *Пусть* $X \in {}_A\mathfrak{Ste}$ $\quad (X \in \mathfrak{Ste}_A)$. *Тогда формула*

$$\varphi(a) = a \cdot x \quad (\varphi(a) = x \cdot a), \quad \varphi \in A^\star \overset{A}{\odot} X = X \overset{A}{\oslash} A, x \in X$$

устанавливает изоморфизм стереотипных A*-модулей*

$$A^\star \overset{A}{\odot} X = X$$

где умножение на A *в* $A^\star \overset{A}{\odot} X$ *имеет вид*

$$(b \cdot \varphi)(a) = \varphi(a \cdot b) \qquad ((\varphi \cdot b)(a) = \varphi(b \cdot a))$$

Предложение 12.20. *Пусть* $X \in {}_A\mathfrak{Ste}$ $\quad (X \in \mathfrak{Ste}_A)$. *Тогда формула*

$$u(\eta) = \eta(x)(1_A), \qquad u \in A \overset{A}{\circledast} X = (A^\star \overset{A}{\oslash} X)^\star, x \in X$$

устанавливает изоморфизм стереотипных A*-модулей*

$$A \overset{A}{\circledast} X = X$$

где умножение на A *в* $A \overset{A}{\circledast} X$ *имеет вид*

$$b \cdot (a \overset{A}{\circledast} x) = a \overset{A}{\circledast} (b \cdot x)$$

(f) Специальные модули над алгеброй $\mathcal{L}(X)$

Пусть X и Y – стереотипные пространства (над $\mathbb{C}$).

Лемма 12.21. *Если морфизмы* $\psi, \varphi_1, ..., \varphi_n : X \to Y$ *конечномерны, то из условия*

$$\operatorname{Im} \psi \subseteq \operatorname{span} \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Im} \varphi_i$$

следует, что ψ *представим в виде суммы*

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ \alpha_i, \qquad \alpha_i \in \mathcal{L}(X)$$

Доказательство. 1. Сначала рассмотрим случай, когда X конечномерно. Пусть $e^1, ..., e^m$ – базис в X. Для всякого e^k имеем $\psi(e^k) \in \operatorname{span} \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Im} \varphi_i$ поэтому существуют $b_1^k, ..., b_n^k \in X$ такие, что

$$\psi(e^k) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(b_i^k)$$

Определим операторы $\beta_i^j \in \mathcal{L}(X) \quad (1 \leqslant i \leqslant n; \quad 1 \leqslant j \leqslant m)$ и $\alpha_i \in \mathcal{L}(X)$ равенствами

$$\beta_i^j(e^k) = \begin{cases} b_i^k, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \qquad \alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j$$

Тогда для всякого k получим

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ \alpha_i \right) (e^k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ \sum_{j=1}^{m} \beta_i^j \right) (e^k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varphi_i(\beta_i^j(e^k)) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(b_i^k) = \psi(e^k)$$

то есть, $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \circ \alpha_i$ и ψ совпадают на элементах базиса.

2. Теперь рассмотрим произвольный случай. Тогда все операторы $\psi, \varphi_1, ..., \varphi_n$ разложимы в композицию

$$\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi, \qquad \varphi_i = \widetilde{\varphi}_i \circ \pi$$

где $\pi : X \to \widetilde{X}$ – эпиморфизм в (единое для всех) конечномерное пространство $\widetilde{X}$. При этом, очевидно, выполнено соотношение

$$\operatorname{Im}\widetilde{\psi} \subseteq \operatorname{span}\bigcup_{i=1}^{n}\operatorname{Im}\widetilde{\varphi}_i$$

откуда, в силу уже доказанного,

$$\widetilde{\psi} = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varphi}_i \circ \widetilde{\alpha}_i, \qquad \widetilde{\alpha}_i \in \mathcal{L}(\widetilde{X})$$

Выберем вложение $\rho : \widetilde{X} \to X$, обращающее $\pi : X \to \widetilde{X}$ слева ($\pi \circ \rho = 1_{\widetilde{X}}$) и положим

$$\alpha_i = \rho \circ \widetilde{\alpha}_i \circ \pi$$

Тогда

$$\psi = \widetilde{\psi} \circ \pi = \left(\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varphi}_i \circ \widetilde{\alpha}_i\right) \circ \pi = \sum_{i=1}^{n}\widetilde{\varphi}_i \circ 1_{\widetilde{X}} \circ \widetilde{\alpha}_i \circ \pi = \sum_{i=1}^{n}(\widetilde{\varphi}_i \circ \pi) \circ (\rho \circ \widetilde{\alpha}_i \circ \pi) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i \circ \alpha_i.$$

□

Лемма 12.22. *Если морфизм $\psi \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ конечномерен, то для всякого множества морфизмов $\varPhi \subseteq Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ из условия*

$$\operatorname{Im}\psi \subseteq \overline{\operatorname{span}}\bigcup_{\varphi\in\varPhi}\operatorname{Im}\varphi$$

следует, что ψ является пределом направленности в $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ вида

$$\psi = \lim_{\nu\to\infty}\sum_{i=1}^{n^\nu}\varphi_i^\nu \circ \alpha_i^\nu, \qquad n^\nu \in \mathbb{N}, \quad \varphi_i^\nu \in \varPhi, \quad \alpha_i^\nu \in \mathcal{L}(X)$$

Доказательство. Из условия $\operatorname{Im}\psi \subseteq \overline{\operatorname{span}}\bigcup_{\varphi\in\varPhi}\operatorname{Im}\varphi$ следует, что существует направленность конечномерных операторов

$$\psi^\nu \overset{Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X}{\longrightarrow} \psi \qquad (\nu \to \infty)$$

такая, что

$$\operatorname{Im}\psi^\nu \subseteq \operatorname{span}\bigcup_{\varphi\in\varPhi}\varphi(X)$$

Действительно, выбрав линейно независимую систему $e_1, ..., e_m$, дополняющую $\operatorname{Ker}\psi$,

$$\operatorname{Ker}\psi \oplus \operatorname{span}\{e_1, ..., e_m\} = X,$$

и подобрав $a_j^\nu \in \operatorname{span}\bigcup_{\varphi\in\varPhi}\varphi(X)$ так, чтобы $a_j^\nu \longrightarrow \psi(e_j) \quad (\nu \to \infty)$, мы сможем положить $\{\psi^\nu(e_j) = a_j^\nu, \quad \psi^\nu|_{\operatorname{Ker}\psi} = 0\}$.

Зафиксируем ν. Из конечномерности ψ^ν и условия $\operatorname{Im}\psi^\nu \subseteq \operatorname{span}\bigcup_{\varphi\in\varPhi}\varphi(X)$ следует, что найдутся $\varphi_1^\nu, ..., \varphi_{n^\nu}^\nu \in \varPhi$ такие, что

$$\operatorname{Im}\psi^\nu \subseteq \operatorname{span}\bigcup_{i=1}^{n^\nu}\varphi_i^\nu(X)$$

Далее (опять в силу конечномерности ψ^ν) можно подобрать одномерные операторы $\beta_j^\nu \in \mathcal{L}(X)(1 \leqslant j \leqslant m, \quad m$ – по-прежнему, коразмерность общего ядра ψ^ν) так, чтобы

$$\operatorname{Im}\psi^\nu \subseteq \operatorname{span}\bigcup_{i=1}^{n^\nu}\bigcup_{j=1}^{m}\operatorname{Im}(\varphi_i^\nu \circ \beta_j^\nu)$$

При этом, поскольку ψ^ν и $\varphi_i^\nu \circ \beta_j^\nu$ конечномерны, по лемме 12.21 найдутся $\gamma_{i,j}^\nu \in \mathcal{L}(X)$ такие, что

$$\psi^\nu = \sum_{i=1}^{n^\nu}\sum_{j=1}^{m}\varphi_i^\nu \circ \beta_j^\nu \circ \gamma_{i,j}^\nu = \sum_{i=1}^{n^\nu}\varphi_i^\nu \circ \sum_{j=1}^{m}\beta_j^\nu \circ \gamma_{i,j}^\nu$$

Положив

$$\alpha_i^\nu = \sum_{j=1}^{m} \beta_j^\nu \circ \gamma_{i,j}^\nu$$

мы получим

$$\sum_{i=1}^{n^\nu} \varphi_i^\nu \circ \alpha_i^\nu = \psi^\nu \longrightarrow \psi \qquad (\nu \to \infty)$$

□

Лемма 12.23. *Если X обладает стереотипной аппроксимацией, то для всякого морфизма $\psi \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ можно выбрать направленность конечномерных операторов $\psi_i \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ таких, что*

$$\psi_i \overset{X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y}{\to} \varphi \quad \& \quad \bigcup_i \operatorname{Im} \psi_i \subseteq \operatorname{Im} \psi$$

Доказательство. Нужно взять $\chi_i \in \mathcal{F}(X) \quad \chi_i \overset{\mathcal{L}(X)}{\to} 1_X$ и положить $\psi_i = \varphi \circ \chi_i$. □

Лемма 12.24. *Если X обладает стереотипной аппроксимацией, то для всякого морфизма $\psi \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ и любого множества $\varPhi \subseteq Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ из условия*

$$\operatorname{Im} \psi \subseteq \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{\varphi \in \varPhi} \operatorname{Im} \varphi$$

следует, что ψ является пределом направленности в $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ вида

$$\psi = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{n^\nu} \varphi_i^\nu \circ \alpha_i^\nu, \qquad n^\nu \in \mathbb{N}, \quad \varphi_i^\nu \in \varPhi, \quad \alpha_i^\nu \in \mathcal{L}(X)$$

Доказательство. Выберем направленность ψ_i как в лемме 12.23. Тогда для всякого i из условия

$$\bigcup_i \operatorname{Im} \psi_i \subseteq \operatorname{Im} \psi \subseteq \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{\varphi \in \varPhi} \operatorname{Im} \varphi$$

будет следовать, что ψ_i принадлежит замкнутой линейной оболочке операторов вида $\varphi \circ \alpha, \quad \varphi \in \varPhi, \alpha \in \mathcal{L}(X): \quad \psi_i \in \overline{\operatorname{span}}(\varPhi \circ \mathcal{L}(X))$. Значит, $\psi = \lim_{i \to \infty} \psi_i \in \overline{\operatorname{span}}(\varPhi \circ \mathcal{L}(X))$ □

Теорема 12.25. *Пусть X и Y – стереотипные пространства. Тогда*

(i) пространство $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ является правым стереотипным $\mathcal{L}(X)$-модулем относительно умножения

$$\varphi \cdot \alpha = \varphi \circ \alpha, \qquad \alpha \in \mathcal{L}(X), \varphi \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$$

(ii) если X обладает стереотипной аппроксимацией, то всякий непосредственный $\mathcal{L}(X)$-подмодуль M в $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ имеет вид

$$M = Z \oslash X = \{\varphi \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X : \varphi(X) \subseteq Z\}$$

где Z – непосредственное подпространство в Y.

Доказательство. (i) следует из 12.4 (b). Докажем (ii). Ясно, что для всякого $Z \subseteq Y \quad M = Z \oslash X$ будет непосредственным $\mathcal{L}(X)$-подмодулем в $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$. Пусть наоборот, M – непосредственный $\mathcal{L}(X)$-подмодуль в $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$. Рассмотрим

$$Z = \operatorname{Im} M = \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{\varphi \in M} \operatorname{Im} \varphi$$

Понятно, что $M \subseteq Z \oslash X$. Докажем обратное: $M \supseteq Z \oslash X$. Действительно, если $\psi \in Z \oslash X$, то из условия

$$\operatorname{Im} \psi \subseteq Z = \operatorname{Im} M = \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{\varphi \in M} \operatorname{Im} \varphi$$

по лемме 12.24 следует, что $\psi \in \overline{\operatorname{span}}(M \circ \mathcal{L}(X)) = M$. Мы установили, что справедливо равенство множеств

$$M = Z \oslash X$$

Поскольку M и $Z \oslash X$ – непосредственные подмодули в $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$, это равенство означает изоморфизм M и $X \oslash X$, как стереотипных $\mathcal{L}(X)$-модулей. □

Сформулируем теперь серию двойственных утверждений к 12.21 – 12.25.

Лемма 12.26. *Если морфизмы $\psi, \varphi_1, ..., \varphi_n : Y \to X$ конечномерны, то из условия*

$$\operatorname{Ker} \psi \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_i$$

следует, что ψ представим в виде суммы

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \circ \varphi_i, \qquad \alpha_i \in \mathcal{L}(X)$$

Лемма 12.27. *Если морфизм $\psi \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ конечномерен, то для всякого множества морфизмов $\Phi \subseteq X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ из условия*

$$\operatorname{Ker} \psi \supseteq \bigcap_{\varphi \in \Phi} \operatorname{Ker} \varphi$$

следует, что ψ является пределом направленности в $X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ вида

$$\psi = \lim_{\nu \to \infty} \sum_{i=1}^{n^\nu} \alpha_i^\nu \circ \varphi_i^\nu, \qquad n^\nu \in \mathbb{N}, \quad \varphi_i^\nu \in \Phi, \quad \alpha_i^\nu \in \mathcal{L}(X)$$

Лемма 12.28. *Если X обладает стереотипной аппроксимацией, то для всякого $\psi \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ можно выбрать направленность конечномерных операторов $\psi_i \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ таких, что*

$$\psi_i \overset{X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y}{\to} \psi \quad \& \quad \operatorname{Ker} \psi \subseteq \bigcap_i \operatorname{Ker} \psi_i$$

Доказательство. Нужно взять $\chi_i \in \mathcal{F}(X) \quad \chi_i \overset{\mathcal{L}(X)}{\to} 1_X$ и положить $\psi_i = \chi_i \circ \psi$. □

Теорема 12.29. *Пусть X и Y – стереотипные пространства. Тогда*

(i) пространство $X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ является левым стереотипным $\mathcal{L}(X)$-модулем относительно умножения

$$\alpha \cdot \varphi = \alpha \circ \varphi, \qquad \alpha \in \mathcal{L}(X), \varphi \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$$

(ii) если X обладает стереотипной аппроксимацией, то всякий непосредственный $\mathcal{L}(X)$-подмодуль M в $X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ имеет вид

$$M = 0 \oslash Z = \{\varphi \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y : \varphi(Z) = 0\}$$

где Z – непосредственное подпространство в Y.

Доказательство. Условие (i) следует из 12.4(a), докажем условие (ii). Вспомним для этого, что по теореме 6.2 переход к сопряженному отображению $\varphi \mapsto \varphi^\star$ осуществляет изоморфизм стереотипных пространств

$$X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y = Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star$$

При этом, если Z – непосредственное подпространство в Y, а $Z^\perp$ – его аннулятор в $Y^\star$, то этот изоморфизм индуцирует изоморфизм

$$0 \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Z = Z^\perp \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star \tag{12.7}$$

Действительно, $\varphi^\star \in Z^\perp \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi^\star \subseteq Z^\perp \Leftrightarrow (\operatorname{Im}\varphi^\star)^\perp \supseteq Z^\perp \Leftrightarrow (4.13) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \supseteq Z \Leftrightarrow \varphi \in 0 \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Z$

Далее, $Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star$ есть правый $\mathcal{L}(X^\star)$-модуль, и поэтому $Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star = X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ есть левый $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X^\star)^{op}$-модуль. Поэтому M, как непосредственный правый $\mathcal{L}(X^\star)$-подмодуль в $Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star$ должен по теореме 12.25 иметь вид $M = E \oslash X^\star$ где E – непосредственное подпространство в $Y^\star$. Взяв $Z = E^{\perp\triangledown} \subseteq Y$, мы получим

$$M = Z^\perp \oslash X^\star = (12.7) = 0 \oslash Z$$

□

Теорема 12.30. *Пусть X и Y – стереотипные пространства. Тогда*

(i) пространство $Y \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$ является левым стереотипным $\mathcal{L}(X)$-модулем относительно умножения

$$\alpha \cdot \varphi = \alpha \circ \varphi, \qquad \alpha \in \mathcal{L}(X), \varphi \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y^\star = Y \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$$

(ii) если X обладает стереотипной аппроксимацией, то умножение на элементы $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ в $Y \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$ однозначно определяется равенством

$$\alpha \cdot (y \odot x) = y \odot \alpha(x) \tag{12.8}$$

и всякий непосредственный $\mathcal{L}(X)$-подмодуль M в $Y \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$ имеет вид

$$M = Z \overset{\mathbb{C}}{\odot} X \tag{12.9}$$

где Z – непосредственное подпространство в Y, а умножение на $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ задается формулой

$$\alpha \cdot (z \odot x) = z \odot \alpha(x)$$

Доказательство. Условие (i) следует из теоремы 12.15 (a), равенство (12.8) - из того, что элементы $y \odot x$ полны в $Y \odot X$ (теорема 9.6), докажем (12.9). Пространство $Y \overset{\mathbb{C}}{\odot} X = X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y^\star = Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star$ можно считать правым $\mathcal{L}(X^\star)$-модулем. Поэтому по теореме 12.25, всякий непосредственный подмодуль M в нем должен иметь вид

$$M = Z \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X^\star = X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Z^\star = Z \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$$

□

Теорема 12.31. *Пусть X и Y – стереотипные пространства. Тогда*

(i) пространство $Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ является левым стереотипным $\mathcal{L}(X)$-модулем относительно умножения

$$(\alpha \cdot u)(\varphi) = u(\varphi \circ \alpha), \qquad \alpha \in \mathcal{L}(X), \varphi \in Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X, u \in (Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X)^\star = Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$$

причем умножение на элементы $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ в $Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ однозначно определяется равенством

$$\alpha \cdot (y \circledast x) = y \circledast \alpha(x) \tag{12.10}$$

(ii) если X обладает стереотипной аппроксимацией, то всякий непосредственный $\mathcal{L}(X)$-фактор-модуль M в $Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ имеет вид

$$M = Z \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X \tag{12.11}$$

где Z – непосредственное фактор-пространство в Y, а умножение на $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ задается формулой

$$\alpha \cdot (z \circledast x) = z \circledast \alpha(x)$$

Доказательство. Условие (i) следует из теоремы 12.11 (a), равенство (12.10) - из полноты элементов $y \circledast x$ в $Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$, докажем (12.11). Если M – непосредственный $\mathcal{L}(X)$-фактор-модуль для $Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X = (Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X)^\star$, то $M^\star$ - непосредственный $\mathcal{L}(X)$-подмодуль в $(Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X)^\star = Y^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$. Поэтому по теореме 12.25, $M^\star = E \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ для некоторого непосредственного подпространства E в $Y^\star$. Взяв $Z = (Y/E^\perp)^\triangledown$ мы получим по лемме 4.13 $Z^\star = E$ откуда $M^\star = Z^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ и значит $M = (Z^\star \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X)^\star = Z \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$. □

(g) Бимодули и бипроективные алгебры

Назовем стереотипное пространство X *стереотипным бимодулем* над проективной стереотипной алгеброй A если на X заданы структуры левого и правого стереотипного A-модуля, причем операции умножения на элементы A удовлетворяют тождеству

$$(a \cdot x) \cdot b = a \cdot (x \cdot b), \qquad a, b \in A, x \in X$$

Пример 12.32. Сама алгебра A очевидно, является стереотипным A-бимодулем. Ее проективный тензорный квадрат $A \overset{\mathbb{C}}{\circledast} A$ будет по теореме 12.11 стереотипным A-бимодулем относительно операций умножения, удовлетворяющих тождеству (и однозначно определяемых им)

$$a \cdot (x \circledast y) \cdot b = (x \cdot b) \circledast (a \cdot y) \tag{12.12}$$

Инъективный тензорный квадрат $A \overset{\mathbb{C}}{\odot} A$ будет по теореме 12.15 стереотипным A-бимодулем относительно операций умножения, удовлетворяющих тождеству

$$a \cdot (x \odot y) \cdot b = (x \cdot b) \odot (a \cdot y) \tag{12.13}$$

Пример 12.33. Сопряженное пространство $A^\star$ к алгебре A будет стереотипным A-бимодулем относительно операций умножения

$$(a \cdot f \cdot b)(x) = f(b \cdot x \cdot a), \qquad a, b, x \in A, f \in A^\star \tag{12.14}$$

Его проективный тензорный квадрат $A^\star \overset{\mathbb{C}}{\circledast} A^\star$ будет по теореме 12.11 стереотипным A-бимодулем относительно операций умножения, удовлетворяющих тождеству (и однозначно определяемых им)

$$a \cdot (f \circledast g) \cdot b = (f \cdot b) \circledast (a \cdot g), \qquad f, g \in A^\star \tag{12.15}$$

Инъективный тензорный квадрат $A^\star \overset{\mathbb{C}}{\odot} A^\star$ будет по теореме 12.15 стереотипным A-бимодулем относительно операций умножения, удовлетворяющих тождеству

$$a \cdot (f \odot g) \cdot b = (f \cdot b) \odot (a \cdot g), \qquad f, g \in A^\star \tag{12.16}$$

Обозначим через A^{op} алгебру с противоположным умножением:

$$a \underset{\mathrm{op}}{\cdot} b = b \cdot a$$

Проективное тензорное произведение $A \circledast A^{\mathrm{op}}$ является по теореме 10.13 стереотипной алгеброй, умножение в которой можно задать формулой

$$(a \circledast b) \cdot (c \circledast d) = (a \cdot c) \circledast (d \cdot b)$$

Теорема 12.34. *Формула*

$$a \cdot x \cdot b = (a \circledast b) \cdot x, \qquad a, b \in A, x \in X$$

устанавливает биекцию между стереотипными A-бимодулями и стереотипными левыми $A \circledast A^{\mathrm{op}}$-модулями.

Морфизмом стереотипных A-бимодулей X и Y называется всякое линейное непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$, сохраняющее левое и правое умножение:

$$\varphi(a \cdot x \cdot b) = a \cdot \varphi(x) \cdot b, \qquad a, b \in A, x \in X$$

Пример 12.35. Морфизм умножения

$$\mu : A \circledast A \to A \quad \big| \quad \mu(a \circledast b) = a \cdot b$$

можно рассматривать как морфизм стереотипных A-бимодулей, если наделить произведение $A \circledast A$ структурой A-бимодуля формулой

$$a \cdot (x \circledast y) \cdot b = (a \cdot x) \circledast (y \cdot b), \qquad a, b, x, y \in A$$

Проективная стереотипная алгебра A называется *бипроективной*, если умножение $\mu : A \circledast A \to A$ является ретракцией в категории стереотипных A-бимодулей, то есть если найдется морфизм A-бимодулей $\sigma : A \to A \circledast A$, такой что

$$\mu \circ \sigma = \mathrm{id}_A$$

Пример 12.36. Для локально компактной группы G следующие условия эквивалентны:

(i) групповая алгебра $\mathcal{C}^\star(G)$ бипроективна;

(ii) группа G компактна.

Пример 12.37. Для группы Ли G следующие условия эквивалентны:

(i) групповая алгебра $\mathcal{E}^\star(G)$ бипроективна;

(ii) группа G компактна.

Пример 12.38. Для группы Штейна G следующие условия эквивалентны:

(i) групповая алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ бипроективна;

(ii) группа G редуктивна.

Пример 12.39. Для аффинной алгебраической группы G следующие условия эквивалентны:

(i) групповая алгебра $\mathcal{R}^\star(G)$ бипроективна;

(ii) группа G редуктивна.

Доказательство. Докажем утверждения 12.36 – 12.39 на примере алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$.

1. Бипроективность алгебры $A = \mathcal{C}^\star(G)$, то есть существование морфизма $\mathcal{C}^\star(G)$-бимодулей $\sigma : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{C}^\star(G \times G) = \mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G)$, обратного справа к умножению $\mu : \mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G) = \mathcal{C}^\star(G \times G) \to \mathcal{C}^\star(G)$, эквивалентно существованию морфизма $\mathit{\Pi} : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G \times G) = \mathcal{C}(G) \odot \mathcal{C}(G)$, обратного к коумножению $\varkappa : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}(G \times G) = \mathcal{C}(G) \odot \mathcal{C}(G)$.

По теореме 10.12 действие алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ на бимодулях $\mathcal{C}(G)$ и $\mathcal{C}(G\times G)$ эквивалентно действию группы G. При этом, в силу примера 11.5, G действует (слева и справа) на $\mathcal{C}(G)$ по формуле

$$a \cdot u \cdot b\,(t) = u(b \cdot t \cdot a), \quad a, b, t \in G, u \in \mathcal{C}(G) \tag{12.17}$$

Отсюда следует, что тождество (12.16) применительно к действию $\mathcal{C}^\star(G)$ на $\mathcal{C}^\star(G) \circledast \mathcal{C}^\star(G) = \mathcal{C}^\star(G \times G)$ можно переписать в виде

$$\delta_a \cdot (u \otimes v) \cdot \delta_b = (u \cdot \delta_b) \otimes (\delta_a \cdot v) = (u \cdot b) \otimes (a \cdot v),$$

то есть в виде

$$[a \cdot (u \otimes v) \cdot b]\ (s,t) = (u \cdot b)(s) \cdot (a \cdot v)(t) = u(b \cdot s) \cdot v(t \cdot a)$$

Это означает, что (двустороннее) действие группы G на $\mathcal{C}(G \times G)$ выражается формулой

$$[a \cdot w \cdot b]\ (s,t) = w(b \cdot s, t \cdot a), \quad a, b, s, t \in G, w \in \mathcal{C}(G \times G) \tag{12.18}$$

2. $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть G компактна. Рассмотрим инвариантное среднее I на алгебре $\mathcal{C}(G)$ и заметим, что справедлива формула

$$\int_G w(s \cdot t, t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t) = \int_G w(t, t^{-1} \cdot s)\,\mathrm{d}\,I(t), \qquad w \in \mathcal{C}(G \times G)$$

Действительно, по формулам (10.24) – (10.26), получаем

$$\int_G w(s \cdot t, t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t) = \left| \begin{matrix} s \cdot t = \tau, \quad t = s^{-1} \cdot \tau, \quad t^{-1} = \tau^{-1} \cdot s \\ \mathrm{d}\,I(t) = \mathrm{d}\,I(s^{-1} \cdot \tau) = \mathrm{d}\,I(\tau) \end{matrix} \right| = \int_G w(\tau, \tau^{-1} \cdot s)\,\mathrm{d}\,I(\tau)$$

Определим теперь отображение

$$\mathit{\Pi} : \mathcal{C}(G \times G) \to \mathcal{C}(G) \quad \Big| \quad \mathit{\Pi} w(s) = \int_G w(s \cdot t, t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t) = \int_G w(t, t^{-1} \cdot s)\,\mathrm{d}\,I(t)$$

Покажем, что $\varPi$ является морфизмом левых G-модулей. С одной стороны,

$$\varPi\,[a\cdot w]\,(s)=\int_G [a\cdot w]\,(t,t^{-1}\cdot s)\,\mathrm{d}\,I(t)=(12.18)=$$
$$=\int_G w(t,t^{-1}\cdot s\cdot a)\,\mathrm{d}\,I(t)=\varPi[w](s\cdot a)=(12.17)=\{a\cdot\varPi[w]\}\,(s)$$

то есть

$$\varPi\,[a\cdot w]=a\cdot\varPi[w] \tag{12.19}$$

С другой же –

$$\varPi\,[w\cdot b]\,(s)=\int_G [w\cdot b]\,(s\cdot t,t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t)=(12.18)=$$
$$=\int_G w(b\cdot s\cdot t,t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t)=\varPi[w](b\cdot s)=(12.17)=\{\varPi[w]\cdot b\}\,(s)$$

то есть

$$\varPi\,[w\cdot b]=\varPi[w]\cdot b \tag{12.20}$$

Убедимся, что

$$\varPi\circ\varkappa=\mathrm{id}_{\mathcal{C}(G)}$$

Действительно,

$$\varPi\,[\varkappa(w)]\,(s)=\int_G \varkappa(w)(s\cdot t,t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t)=\int_G w(s\cdot t\cdot t^{-1})\,\mathrm{d}\,I(t)=\int_G w(s)\,\mathrm{d}\,I(t)=(10.22)=w(s)$$

то есть

$$\varPi\,[\varkappa(w)]=w \tag{12.21}$$

2. $(i)\Rightarrow(ii)$. Пусть существует отображение $\varPi:\mathcal{C}(G)\to\mathcal{C}(G\times G)=\mathcal{C}(G)\odot\mathcal{C}(G)$ со свойствами (12.19), (12.20), (12.21). Положим

$$N:\mathcal{C}(G)\to\mathcal{C}(G)\quad\Big|\quad N(u)=\varPi(u\otimes 1)$$

(в произведении $u\otimes 1$ единица 1 означает функцию на G, тождественно равную единице). Заметим после этого, что $N(u)$ – постоянная функция на G при любом аргументе $u\in\mathcal{C}(G)$. Действительно,

$$a\cdot N(u)=a\cdot\varPi(u\otimes 1)=\varPi\,[a\cdot(u\otimes 1)]=\varPi(u\otimes a\cdot 1)=\varPi(u\otimes 1)=N(u)$$

То есть, функция $N(u)$ не меняется при правых сдвигах. Значит $N(u)$ постоянна. Поэтому $N(u)$ не меняется также и при левых сдвигах:

$$N(u)\cdot a=N(u)$$

Положим

$$I(u)=N(u)(1_G)$$

и убедимся, что I – левоинвариатное среднее на $\mathcal{C}(G)$:

$$(a\cdot I)(u)=I(u\cdot a)=N(u\cdot a)(1_G)\varPi[(u\cdot a)\otimes 1](1_G)=\varPi[(u\otimes 1\cdot a)](1_G)=$$
$$=[\varPi(u\otimes 1)\cdot a]\,(1_G)=[N(u)\cdot a]\,(1_G)=[N(u)]\,(1_G)=I(u)$$

С другой стороны,

$$I(1)=N(1)(1_G)=\varPi[1\otimes 1](1_G)=\varPi[\varkappa(1)](1_G)=1(1_G)=1$$

Итак, I есть левоинвариантное среднее на алгебре $\mathcal{C}(G)$. Это эквивалентно тому, что группа G компактна.

Мы доказали 12.36. Для других групповых алгебр доказательство аналогично с той лишь разницей, что в случаях $\mathcal{O}^\star(G)$ и $\mathcal{R}^\star(G)$ на последнем этапе полезна ссылка на замечание 10.34. $\square$

§ 13 Коммутант и бикоммутант

(a) Определение коммутанта и бикоммутанта

Пусть X – левый стереотипный модуль над стереотипной алгеброй A. Обозначим

$$A^!(X) = \operatorname{End}_A(X) = X \overset{A}{\oslash} X \tag{13.1}$$

Это пространство называется *коммутантом алгебры A в модуле X*. Из теоремы 12.2 следует

Теорема 13.1. *Коммутант $A^!(X)$ является*

– *проективной стереотипной алгеброй в смысле операции композиции $\varphi \circ \psi$;*

– *непосредственной подалгеброй в $\mathcal{L}(X)$ с представляющим мономорфизмом $\sigma^\vartriangle : A^!(X) \to \mathcal{L}(X)$ где $\sigma : A^!(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$ – естественное вложение.*

Теорема 13.2. *Коммутант алгебры A в стереотипном модуле $X \in {}_A\mathfrak{Ste}$ и в его сопряженном модуле $X^\star \in \mathfrak{Ste}_A$ являются антиизоморфными стереотипными алгебрами*

$$A^!(X) \cong A^!(X^\star)^{\mathrm{op}},$$

причем антиизоморфизм устанавливается операцией перехода к сопряженному морфизму $\varphi \in A^!(X) = \operatorname{End}_A(X) \mapsto \varphi^\star \in A^!(X^\star) = \operatorname{End}_A(X^\star)$.

Предложение 13.3. *Пространство X является стереотипным левым модулем над коммутантом $A^!(X)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_i \overset{X \overset{A}{\oslash} X}{\longrightarrow} 0$. Тогда $\varphi_i \overset{X \overset{A}{:} X}{\longrightarrow} 0$. то есть для всякого $S \in \mathcal{S}(X)$

$$\varphi_i(x) \underset{x\in S}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$$

Наоборот, пусть $x_i \overset{X}{\to} 0$, тогда для всякого $\varPhi \in \mathcal{S}(X \overset{A}{\oslash} X)$ $\varPhi$ будет равностепенно непрерывно на X, поэтому

$$\varphi(x_i) \underset{\varphi\in\varPhi}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$$

Мы доказали непрерывность билинейной формы $(\varphi, x) \in A^!(X) \times X \mapsto \varphi(x) \in X$. □

Коммутант алгебры $A^!(X)$ в модуле X

$$A^{!!}(X) = \operatorname{End}_{A^!(X)}(X) = X \underset{A^!(X)}{\oslash} X \tag{13.2}$$

называется *бикоммутантом алгебры A в модуле X*.

Согласно теореме 13.1, $A^{!!}(X)$ является стереотипной алгеброй и непосредственной подалгеброй в $\mathcal{L}(X)$. Это означает между прочим, что морфизм стереотипных алгебр $A \to \mathcal{L}(X)$ (соответствующий действию A на X по теореме о представлении 11.2) поднимается до морфизма стереотипных алгебр

$$\lambda : A \to A^{!!}(X)$$

Свойства этого морфизма в чисто алгебраическом случае рассматриваются в классических теоремах Риффеля, Веддерберна и Бернсайда (см. например [50]-[52]). В этом параграфе мы собираемся показать, что одна из этих теорем имеет аналог в нашей неклассической ситуации.

(b) Простые модули и алгебры

Стереотипный модуль X над проективной стереотипной алгеброй A мы называем

– *простым*, если для любого элемента $x \in X$, $x \neq 0$, орбита $A \cdot x = \{a \cdot x; a \in A\}$ плотна в X (это равносильно тому, что X не содержит непосредственных подмодулей, отличных от 0 и X);

– *почти делимым*, если для любого элемента $a \in A$, $a \neq 0$, множество $a \cdot X = \{a \cdot x; x \in X\}$ плотно в X;

– *модулем без кручения* над A, если $\forall a \in A \quad \forall x \in X \quad (a \neq 0 \quad \& \quad x \neq 0) \quad \Rightarrow a \cdot x \neq 0$.

Предложение 13.4. *Для всякого проективного стереотипного A-модуля X*

(a) X – простой левый (правый) A-модуль $\Leftrightarrow$ $X^\star$ – простой правый (левый) A-модуль;

(b) X – почти делимый левый (правый) A-модуль $\Leftrightarrow$ $X^\star$ – правый (левый) A-модуль без кручения.

Доказательство. (a) Если X не простой модуль, то существует непосредственный подмодуль $Y \subseteq X$: $0 \neq Y \neq X$. Его аннулятор $Y^\perp$ будет обладать свойствами $X^\star \neq Y^\perp \neq 0$. Таким образом, $X^\star$ обладает нетривиальным непосредственным подмодулем, и, следовательно, не может быть простым модулем.

(b) Пусть X – почти делимый модуль. Выберем $f \in X^\star, a \neq 0 \in A$ так чтобы $f \cdot a = 0$, и покажем, что тогда $f = 0$. Действительно, $\forall x \in X \quad 0 = (f \cdot a)(x) = f(a \cdot x)$, и, поскольку $\{a \cdot x; x \in X\}$ плотно в X, получаем $f = 0$.

Наоборот, если X не является почти делимым, то $\exists a \in X : a \neq 0 \ \& \ \{a \cdot X$ не плотно в $X\}$. Тогда $\exists f \in X^\star : f \neq 0 \,\&\, f(a \cdot X) = 0$. Значит $f \cdot a = 0$, поэтому $X^\star$ – модуль с кручением. □

Теорема 13.5. *Если X – простой модуль над A, то X – почти делимый модуль без кручения над $A^!(X)$.* [13]

Доказательство. Покажем сначала, что X – модуль без кручения над $A^!(X)$. Пусть $x \neq 0$ и $\varphi \in A^!(X)$, $\varphi \neq 0$. Предположим, что $\varphi(x) = 0$. Тогда $\forall a \in A\, 0 = a \cdot \varphi(x) = \varphi(a \cdot x)$ и значит $A \cdot x = \{a \cdot x; a \in A\} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \neq X$. То есть $A \cdot x$ не плотно в X, и поэтому X не может быть простым над A. Получаем противоречие, которое означает, что $\varphi(x) = 0$.

Докажем теперь, что X – почти делимый над $A^!(X)$. Пусть $0 \neq\in A^!(X)$. Тогда $\exists x \in X\, \varphi(x) \neq 0$. Значит множество $\{(a \cdot \varphi)(x); a \in A\} = \{\varphi(a \cdot x); a \in A\}$ плотно в X : $\quad \overline{\varphi(A \cdot x)} = X$. Отсюда $\overline{\varphi(X)} \supseteq \overline{\varphi(A \cdot x)} = X$, то есть $\varphi(X)$ плотно в X. □

Стереотипным идеалом (левым или правым) в проективной стереотипной алгебре A называется всякий мономорфизм (левых или правых) стереотипных A-модулей $\mu : I \to A$. Идеал $\mu : I \to A$ называется *непосредственным*, если I – непосредственный подмодуль в A. Аналогично определяются стереотипные двусторонние идеалы в A.

Определение. Стереотипную алгебру A мы называем *простой*, если она не содержит нетривиальных непосредственных двусторонних идеалов (то есть является простым A-бимодулем). Иными словами, всякая иммерсия стереотипных A-бимодулей $\mu : I \to A$ имеет вид $\mu = 0$ или $\mu = 1$. Это равносильно тому, что для всякого элемента $x \in A$, $x \neq 0$ элементы вида $\sum_{i=1}^n a_i \cdot x \cdot b_i \, (a_i, b_i \in A)$, образуют плотное подпространство в A.

Пример 13.6. Алгебра операторов $\mathcal{L}(X)$ проста в том и только в том случае, если пространство X обладает стереотипной аппроксимацией.

Доказательство. Если X не обладает аппроксимацией, то множество $\mathcal{G}(X)$ операторов, приближаемых конечномерными, образует нетривиальный непосредственный двусторонний идеал в $\mathcal{L}(X)$, поэтому $\mathcal{L}(X)$ не может быть простой.

Пусть наоборот, X обладает аппроксимацией. Тогда если I – непосредственный двусторонний идеал и $\varphi \in I, \quad \varphi \neq 0$, то $\exists a \in X \quad \varphi(a) = b \neq 0$. Умножив φ на подходящий одномерный оператор, мы получим ненулевой одномерный оператор $\psi \in I$. Затем, умножая ψ слева и справа на разные операторы, мы получим все возможные одномерные операторы в $\mathcal{L}(X)$. Это будет означать, что I содержит все одномерные, а значит, все конечномерные операторы. Поскольку X обладает аппроксимацией, I плотно в $\mathcal{L}(X)$ и значит $I = \mathcal{L}(X)$. □

(c) Теорема Риффеля

Следующая теорема является аналогом чисто алгебраического результата, названного в русском переводе книги С.Ленга [50] теоремой Риффеля.

Теорема 13.7 (Риффеля)**.** *Пусть A – простая стереотипная алгебра и X – ее левый (стереотипный) идеал. Тогда отображение*

$$\lambda : A \to A^{!!}(X)$$

является биморфизмом стереотипных пространств.

[13] Противоположное утверждение удается доказать только при дополнительных предположениях на алгебру A (теорема 14.20).

Для доказательства нам понадобится некая система обозначений. Пусть для $M, N \subseteq A$

$$M \cdot N = \left\{ \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot n_i ; m_i \in M, n_i \in N, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Лемма 13.8. *Для любых* $L, M, N \subseteq A$

$$(L \cdot M) \cdot N = L \cdot (M \cdot N)$$

Доказательство. $x \in (L \cdot M) \cdot N \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{k} l_i \cdot m_i \cdot n_i \Leftrightarrow x \in L \cdot (M \cdot N)$ □

Лемма 13.9. *Для любых* $M, N \subseteq A$

$$\overline{M \cdot N} = \overline{\overline{M} \cdot N} = \overline{M \cdot \overline{N}} = \overline{\overline{M} \cdot \overline{N}}$$

Доказательство. Достаточно проверить равенство $\overline{M \cdot N} = \overline{\overline{M} \cdot N}$. Действительно, с одной стороны, очевидно, $\overline{M \cdot N} \subseteq \overline{\overline{M} \cdot N}$. С другой же стороны, $\overline{M \cdot N} \supseteq \overline{M} \cdot N$, и поэтому $\overline{M \cdot N} \supseteq \overline{\overline{M} \cdot N}$. □

Лемма 13.10. *Пусть* $\varphi : A \to B$ *– морфизм стереотипных алгебр. Тогда*

$$\varphi(\overline{M \cdot N}) \subseteq \overline{\varphi(M) \cdot \varphi(N)} \qquad M, N \subseteq A$$

Доказательство. Из равенства $\varphi(M \cdot N) = \varphi(M) \cdot \varphi(N)$ получаем $\varphi(\overline{M \cdot N}) \subseteq \overline{\varphi(M \cdot N)} = \overline{\varphi(M) \cdot \varphi(N)}$. □

Доказательство. Докажем теперь теорему Риффеля. Пусть X – левый стереотипный идеал в простой стереотипной алгебре A. Обозначим $K = A^{!}(X)$. Множество $\overline{X \cdot A}$ является замкнутым двусторонним идеалом в A, и, поскольку A – простая, $\overline{X \cdot A} = A$

Отсюда $\lambda(\overline{X \cdot A}) = \lambda(A)$. Значит

1) $\overline{\lambda(A)} = \overline{\lambda(\overline{X \cdot A})} \subseteq$ (лемма 13.10) $\subseteq \overline{\overline{\lambda(X)} \cdot \overline{\lambda(A)}} =$ (лемма 13.9) $= \overline{\lambda(X) \cdot \lambda(A)}$

2) $\lambda(X) \cdot \lambda(A) = \lambda(X \cdot A) \subseteq \lambda(A) \Rightarrow \overline{\lambda(X) \cdot \lambda(A)} \subseteq \overline{\lambda(A)}$

Итак,

$$\overline{\lambda(X) \cdot \lambda(A)} = \overline{\lambda(A)} \tag{13.3}$$

Зафиксируем $y \in X$ и рассмотрим отображение

$$\mu_y : X \to X \quad \mu_y(x) = x \cdot y$$

($y \in X \Rightarrow \forall x \in X \quad \mu_y(x) = x \cdot y \in X$, поскольку X – левый идеал). Из тождества

$$\mu_y(a \cdot x) = (a \cdot x) \cdot y = a \cdot (x \cdot y) = a \cdot \mu_y(x)$$

следует, что $\mu_y \in \mathrm{End}_A(X) = A^{!}(X) = K$, отсюда $\forall \varphi \in \mathrm{End}_K(X) = A^{!!}(X)$

$$\varphi \circ \mu_y = \mu_y \circ \varphi \tag{13.4}$$

Покажем, что $\lambda(X)$ – левый идеал в $A^{!!}(X)$

$$A^{!!}(X) \cdot \lambda(X) \subseteq \lambda(X) \tag{13.5}$$

Действительно, $\forall x \in X \quad \forall \varphi \in A^{!!}(X) \quad \forall y \in X$ получаем

$$(\varphi \circ \lambda(x))(y) = \varphi(x \cdot y) = (\varphi \circ \mu_y)(x) = (13.4) = (\mu_y \circ \varphi)(x) = \varphi(x) \cdot y = \lambda(\varphi(x))(y)$$

То есть $\varphi \circ \lambda(x) = \lambda(\varphi(x)) \in \lambda(X)$ Поскольку это верно для любых $x \in X, \quad \varphi \in A^{!!}(X)$, справедливо (13.5). Теперь $A^{!!}(X) = A^{!!}(X) \cdot \lambda(1_A) \subseteq A^{!!}(X) \cdot \lambda(A) \subseteq \overline{A^{!!}(X) \cdot \overline{\lambda(A)}} = (13.3) = \overline{A^{!!}(X) \cdot \overline{\lambda(X) \cdot \lambda(A)}} =$ (лемма 13.9) $= \overline{A^{!!}(X) \cdot (\lambda(X) \cdot \lambda(A))} =$ (лемма 13.8) $= \overline{(A^{!!}(X) \cdot \lambda(X)) \cdot \lambda(A)} \subseteq (13.5) \subseteq \overline{\lambda(X) \cdot \lambda(A)} = (13.3) = \overline{\lambda(A)}$

Таким образом, $\lambda : A \to A^{!!}(X)$ является эпиморфизмом. С другой стороны, из простоты A следует, что $\operatorname{Ker} \lambda = 0$ и поэтому λ – мономорфизм. □

(d) Контрпример к теореме Бернсайда

Следующий пример показывает, что условие простоты для алгебры в теореме Риффеля существенно. С другой стороны он является "стереотипным контрпримером" к чисто алгебраической теореме Бернсайда.

Меняя требования теоремы 13.7, можно было бы ожидать, что если (необязательно, простая) стереотипная алгебра A обладает простым левым идеалом X, то морфизм $A \to A^{!!}(X)$ обязан быть эпиморфизмом. Оказывается это не так:

Пример 13.11. Существует (не простая) стереотипная алгебра A с простым левым идеалом X такие, что морфизм стереотипных алгебр

$$\lambda : A \to A^{!!}(X) \tag{13.6}$$

не является эпиморфизмом стереотипных пространств.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Лемма 13.12. *Для любого стереотипного пространства Y всякая (ненулевая) непосредственная фактор-алгебра $(\mathcal{L}(Y \oplus Y)/I)^{\triangledown}$ алгебры операторов $\mathcal{L}(Y \oplus Y)$ должна иметь делители нуля.*

Доказательство. Пусть I – замкнутый идеал, $\pi : \mathcal{L}(Y \oplus Y) \to (\mathcal{L}(Y \oplus Y)/I)^{\triangledown}$ -фактор-
-отображение и фактор-алгебра $(\mathcal{L}(Y \oplus Y)/I)^{\triangledown}$ не имеет делителей нуля. Рассмотрим проекции на обе координаты

$$A = \begin{pmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_Y \end{pmatrix}$$

Поскольку $A^2 = A$, имеем $\pi(A)^2 = \pi(A^2) = \pi(A)$, откуда

$$\pi(A) \cdot [\pi(A) - 1] = 0$$

и поскольку $(\mathcal{L}(Y \oplus Y)/I)^{\triangledown}$ не имеет делителей нуля, $\pi(A) = 0$ или $\pi(A) = 1$. По аналогичным причинам $\pi(B) = 0$ или $\pi(B) = 1$. С другой стороны,

$$\pi(A) + \pi(B) = \pi(A + B) = \pi \begin{pmatrix} 1_Y & 0 \\ 0 & 1_Y \end{pmatrix} = \pi(1_{Y \oplus Y}) = 1$$

Вместе это означает, что какая-то из величин $\pi(A)$ и $\pi(B)$ равна нулю, а другая – единице. Предположим для определенности, что

$$\pi(A) = 0, \qquad \pi(B) = 1 \tag{13.7}$$

Тогда, рассмотрев изоморфизм $\varPhi \in \mathcal{L}(Y \oplus Y)$, меняющий местами переменные

$$\varPhi = \begin{pmatrix} 0 & 1_Y \\ 1_Y & 0 \end{pmatrix} \qquad x \oplus y \mapsto y \oplus x$$

мы получим

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \varPhi \cdot A \cdot \varPhi$$

и поэтому из того, что I – двусторонний идеал следует

$$\pi(A) = 0 \Rightarrow A \in I \Rightarrow B = \varPhi \cdot A \cdot \varPhi \in I \Rightarrow \pi(B) = 0$$

Мы получили противоречие с (13.7). □

Лемма 13.13. *Y обладает стереотипной аппроксимацией $\Leftrightarrow$ $Y \oplus Y$ обладает стереотипной аппроксимацией.*

Доказательство. В прямую сторону импликация очевидна, докажем в обратную. Пусть $\sigma : Y \to Y \oplus Y$ и $\pi : Y \oplus Y \to Y$ – связанные друг с другом коретракция и ретракция: $\pi \circ \sigma = 1_Y$. Если $Y \oplus Y$ обладает аппроксимацией, то, подобрав конечномерные $\varphi_i \in \mathcal{L}(Y \oplus Y)$, аппроксимирующие единицу, мы получим

$$\pi \circ \varphi_i \circ \sigma \xrightarrow{\mathcal{L}(Y)} \pi \circ 1_{Y \oplus Y} \circ \sigma = \pi \circ \sigma = 1_Y$$

Значит Y обладает аппроксимацией. □

Доказательство. Теперь мы можем доказать пример 13.11. Пусть Y – стереотипное пространство без свойства аппроксимации и $X = Y \oplus Y$. Рассмотрим замыкание $\mathcal{G}(X) = \overline{\mathcal{F}(X)}$ идеала $\mathcal{F}(X)$ конечномерных операторов в $\mathcal{L}(X)$. По лемме 13.13,

$$0 \neq \mathcal{G}(X) \neq \mathcal{L}(X)$$

Следовательно, фактор $(\mathcal{L}(X)/\mathcal{G}(X))^\triangledown$ отличен от нуля. С другой стороны, по лемме 13.12, он должен иметь делители нуля и поэтому

$$(\mathcal{L}(X)/\mathcal{G}(X))^\triangledown \neq \mathbb{C}$$

Это, в частности, означает, что добавив к $\mathcal{G}(X)$ единицу (то есть одномерное подпространство $\mathbb{C} \cdot 1_X$), мы не получим все $\mathcal{L}(X)$. Таким образом, алгебра

$$A = \mathbb{C} \cdot 1_X \oplus \mathcal{G}(X)$$

(непосредственная подалгебра в $\mathcal{L}(X)$ порожденная $\mathcal{F}(X)$) не совпадает с $\mathcal{L}(X)$ хотя и замкнута в $\mathcal{L}(X)$. Морфизм (13.6) для A имеет вид $\mathbb{C} \cdot 1_X \oplus \mathcal{G}(X) \to \mathcal{L}(X)$ и значит не является эпиморфизмом.

Зафиксировав теперь произвольный функционал $f \in X^\star$, $f \neq 0$, мы сможем устроить вложение X в $\mathcal{G}(X)$ в качестве идеала: $x \in X \mapsto f \odot x \in \mathcal{G}(X)$. Останется только заметить, что X – простой A-модуль. $\square$

§ 14 Алгебры с отражениям

Структура отражения на стереотипной алгебре A, описываемая в этом параграфе, позволяет определить конечномерные морфизмы и модули со свойством аппроксимации над A.

(a) Определение алгебры с отражением

Пусть A – проективная стереотипная алгебра. По теореме 11.4, сопряженное пространство $A^\star$ будет стереотипным бимодулем над A с операциями, определенными формулами (11.1):

$$(a \cdot u \cdot b)(x) = u(b \cdot x \cdot a), \qquad a, b \in A, u \in A^\star$$

Линейное непрерывное отображение $@ : A^\star \to A$ называется *отражением* на A, если выполнены следующие условия

(i) $u(@v) = v(@u), \qquad u, v \in A^\star$

(ii) $@(a \cdot u \cdot b) = a \cdot @u \cdot b, \qquad a, b \in A, u \in A^\star$

Таким образом, $@$ должно быть морфизмом A-бимодулей, совпадающим со своим сопряженным отображением:

$$@^\star = @ \tag{14.1}$$

Можно заметить, что условие (ii) в этой паре эквивалентно условию

(iii) $@u \cdot v = u \cdot @v, \qquad u, v \in A^\star$

Доказательство. Действительно, из (i) и (ii) следует (iii): $(@u \cdot v)(a) = v(a \cdot @u) = v \cdot a(@u) = (i) = u(@(v \cdot a)) = (ii) = u(@v \cdot a) = (u \cdot @v)(a)$, а из (i) и (iii) следует (ii): с одной стороны, $v(@(a \cdot u)) = (i) = (a \cdot u)(@v) = u(@v \cdot a) = (u \cdot @v)(a) = (iii) = (@u \cdot v)(a) = v(a \cdot @u)$ а, с другой – $v(@(u \cdot b)) = (i) = (u \cdot b)(@v) = u(\cdot b @v) = (@v \cdot u)(b) = (iii) = (v \cdot @u)(b) = v(@u \cdot b)$. $\square$

Определение. Пара $(A, @)$ называется *алгеброй с отражением.* Отражение $@$ на алгебре A называется *точным*, если, кроме того, выполняются следующие эквивалентные (в силу (14.1)) условия

(a) $@ : A^\star \to A$ является мономорфизмом стереотипных пространств;

(b) $@ : A^\star \to A$ является эпиморфизмом стереотипных пространств;

(c) $@ : A^\star \to A$ является биморфизмом стереотипных пространств.

Предложение 14.1. *Формула*

$$u(@v) = \omega(u, v) \tag{14.2}$$

устанавливает изоморфизм между отражениями $@ : A^\star \to A$ *на стереотипной алгебре* A *и непрерывными (в смысле определения § 5(f)) билинейными формами* $\omega : A^\star \times A^\star \to \mathbb{C}$, *удовлетворяющими условиям*

(i) симметричность:

$$\omega(u, v) = \omega(v, u) \qquad u, v \in A^\star$$

(ii) сбалансированность относительно действия A*:*

$$\omega(a \cdot u \cdot b, v) = \omega(u, b \cdot v \cdot a) \qquad u, v \in A^\star,\ a, b \in A$$

При этом, отражение $@$ *тогда и только тогда будет точным, когда форма* ω *невырождена:*

$$\forall u \neq 0 \quad \exists v \quad \omega(u, v) \neq 0$$

(b) Примеры алгебр с отражениями

Отражения в стереотипной алгебре операторов $\mathcal{L}(X)$.

Пример 14.2. Для всякого стереотипного пространства X преобразование Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X)$

$$f \circledast x \in X^\star \circledast X = \mathcal{L}^\star(X) \mapsto f \odot x \in X^\star \odot X = \mathcal{L}(X) \tag{14.3}$$

является единственным с точностью до скалярного множителя отражением на алгебре операторов $\mathcal{L}(X)$. Мы называем это отражение $@_X$ нормальным отражением на $\mathcal{L}(X)$. Отражение $@_X$ тогда и только тогда будет точным, когда пространство X обладает свойством стереотипной аппроксимации.

Доказательство. Покажем, что преобразование Гротендика действительно является отражением. Понятно, что каждое тождество (i),(ii) достаточно проверять для одномерных тензоров $u, v \in \mathcal{L}^\star(X)$, поскольку $X^\star \otimes X$ плотно в $X^\star \circledast X = \mathcal{L}^\star(X)$ (предложение 7.2).

1. Проверим (i). Пусть $u = f \circledast x, v = g \circledast y$, $f, g \in X^\star, x, y \in X$. Тогда $@_X u = f \odot x, @_X v = g \odot y$, и $u(@_X v) = f \circledast x\,(g \odot y) = (9.8) = g \circledast y\,(f \odot x) = v(@_X u)$

2. Для тождества (ii) также выберем одномерный тензор $u = f \circledast x$. Тогда $@_X u = f \odot x$ и для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(X)$ получаем $@_X(\varphi \cdot u \cdot \psi) = @_X(\varphi \cdot f \circledast x \cdot \psi) = (9.4) = @_X((f \circ \psi) \circledast \varphi(x)) = (14.3) = (f \circ \psi) \odot \varphi(x) = (9.5) = \varphi \circ f \odot x \circ \psi = \varphi \cdot @_X u \cdot \psi$

Итак, доказано, что преобразование Гротендика $@_X : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X)$ является отражением. Пусть теперь $@ : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X)$ – какое-нибудь другое отражение. Зафиксируем $f \in X^\star$ и $x \in X$ такие, что

$$f(x) = 1.$$

Обозначим $u = f \circledast x, \quad \pi = f \odot x$ и заметим, что

$$\pi \cdot u = u = u \cdot \pi \tag{14.4}$$

Действительно, с одной стороны, $(\pi \cdot u)(\varphi) = u(\varphi \circ \pi) = f \circledast x(\varphi \circ f \odot x) = f \circledast x(f \odot \varphi(x)) = f(x) \cdot f(\varphi(x)) = f \circledast x(\varphi) = u(\varphi)$ а с другой, $(u \cdot \pi)(\varphi) = u(\pi \circ \varphi) = f \circledast x(f \odot x \circ \varphi) = f \circledast x((f \circ \varphi) \odot x) = f(x) \cdot f(\varphi(x)) = (f \circledast x)(\varphi) = u(\varphi)$

Из равенств (14.9) и тождества (ii) следует

$$\pi \circ @u = @u = @u \circ \pi$$

то есть, если обозначить $@u = \psi$

$$(f \odot x) \circ \psi = \psi = \psi \circ (f \odot x)$$

или

$$(f \circ \psi) \odot x = \psi = f \odot \psi(x)$$

Таким образом, оператор ψ одномерен и имеет вид

$$\psi = \lambda \cdot f \odot x$$

где число $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет равенствам

$$\lambda f = f \circ \psi, \qquad \lambda x = \psi(x)$$

Итак, для фиксированного тензора $f \circledast x$

$$@(f \circledast x) = \lambda \cdot f \odot x \tag{14.5}$$

Покажем, что $\forall g \in X^\star, \quad \forall y \in X$

$$@(g \circledast y) = \lambda \cdot g \odot y \tag{14.6}$$

Действительно, из формул

$$f \odot y \cdot f \circledast x \cdot g \odot x = f(x)^2 \cdot g \circledast y = g \circledast y \qquad f \odot y \cdot f \odot x \cdot g \odot x = f(x)^2 \cdot g \odot y = g \odot y$$

следует $@(g \circledast y) = f \odot y \cdot @(f \circledast x) \cdot g \odot x = (14.5) = f \odot y \cdot \lambda \cdot f \odot x \cdot g \odot x = \lambda \cdot g \odot y$. Мы доказали (14.6), откуда $@ = \lambda @_X$. Вторая часть предложения следует из теоремы 9.6. $\square$

Отражения в стереотипных групповых алгебрах $\mathcal{C}^\star(G)$), $\mathcal{E}^\star(G)$, $\mathcal{O}^\star(G)$, $\mathcal{R}^\star(G)$.

Пример 14.3. *Отображение $@_G : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}^\star(G)$, при котором непрерывная функция $u \in \mathcal{C}(G)$ на компактной группе G превращается в меру $@_G u \in \mathcal{C}^\star(G)$ на G с плотностью $\widetilde{u}(t) = u(t^{-1})$ относительно нормированной меры Хаара I $(I(G) = 1)$:*

$$@_G u(v) = \int_G v(t) \cdot u(t^{-1}) \cdot dI(t) \qquad\qquad v \in \mathcal{C}(G)$$

является точным отражением на стереотипной групповой алгебре мер Радона $\mathcal{C}^\star(G)$.

Тождество (i) достаточно проверить на δ-функциях:

$$@_G(\delta_a \cdot u \cdot \delta_b) = \delta_a \cdot @_G(u) \cdot \delta_b,$$

Действительно,

$$@_G(\delta_a \cdot u \cdot \delta_b)(v) = (11.3) = @_G(a \cdot u \cdot b)(v) = \int_G v(t) \cdot (a \cdot u \cdot b)(t^{-1}) \cdot dI(t) = \int_G v(t) \cdot u\left(b \cdot t^{-1} \cdot a\right) \cdot dI(t) =$$
$$= \left| \begin{matrix} b \cdot t^{-1} \cdot a = s^{-1} \\ t^{-1} = b^{-1} \cdot s^{-1} \cdot a^{-1} \\ t = a \cdot s \cdot b \end{matrix} \right| = \int_G v\left(a \cdot s \cdot b\right) \cdot u(s^{-1}) \cdot dI\left(a \cdot s \cdot b\right) = \int_G (b \cdot v \cdot a)(s) \cdot u(s^{-1}) \cdot dI\left(a \cdot s \cdot b\right) =$$
$$= \left| \begin{matrix} (10.24) \\ (10.25) \end{matrix} \right| = \int_G (b \cdot v \cdot a)(s) \cdot u(s^{-1}) \cdot dI(s) = @_G(u)(b \cdot v \cdot a) = (10.6) = \left(\delta_a \cdot @_G(u) \cdot \delta_b\right)(v)$$

Теперь проверим тождество (ii):

$$@_G(u)(v) = \int_G v(t) \cdot u(t^{-1}) \cdot dI(t) = \left| \begin{matrix} t^{-1} = s \\ t = s^{-1} \end{matrix} \right| =$$
$$= \int_G v(s^{-1}) \cdot u(s) \cdot dI(s^{-1}) = (10.26) = \int_G v(s^{-1}) \cdot u(s) \cdot dI(s) = @_G(v)(u)$$

С помощью δ-функций δ_t на G мы можем определить это отражение равенством

$$@_G u = \int_G u(t^{-1}) \cdot \delta_t \cdot dI(t) = \int_G u(t) \cdot \delta_{t^{-1}} \cdot dI(t). \tag{14.7}$$

Мы назовем его *нормальным отражением* на групповой алгебре $\mathcal{C}^\star(G)$. Очевидно,

$$@_G 1(1) = 1$$

Те же правила определяют *точное отражение на стереотипной алгебре распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ на компактной вещественной группе Ли G* (пример 10.8).

Далее, *если G – редуктивная комплексная группа Ли*, то есть G является комплексификацией некоторой вещественной компактной группы Ли K, *то формула*

$$@u(v) = \int_K v(t) \cdot u(t^{-1}) \cdot dI(t) \qquad\qquad u, v \in \mathcal{O}(G)$$

определяет точное отражение на стереотипной алгебре голоморфных потоков $\mathcal{O}^\star(G)$ (пример 10.9).

Аналогично определяется *точное отражение на стереотипной алгебре $\mathcal{R}^\star(G)$ регулярных потоков на редуктивной комплексной аффинной алгебраической группе G* (пример 10.10).

Отражения в функциональных алгебрах $\mathcal{C}(M))$, $\mathcal{E}(M)$, $\mathcal{O}(M)$, $\mathcal{R}(M)$.

Пример 14.4. Функциональные алгебры $\mathcal{C}(M), \mathcal{E}(M), \mathcal{O}(M), \mathcal{R}(M)$ тогда и только тогда обладают нетривиальным отражением, когда пространство-носитель M содержит изолированные точки.

Отражение в алгебрах $\mathcal{C}(M), \mathcal{E}(M), \mathcal{O}(M), \mathcal{R}(M)$ может быть точным (в том и) только в том случае, если пространство M дискретно.

Доказательство. Докажем это для $\mathcal{C}(M)$. Действительно, пусть $@ : \mathcal{C}(M)^\star \to \mathcal{C}(M)$ – отражение. Поскольку @ есть морфизм $\mathcal{C}(M)$-модулей, он должен сохранять носители: $\forall f \in \mathcal{C}(M)^\star \quad \operatorname{supp}(@f) \subseteq \operatorname{supp} f$. В частности, каждая δ-функция $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$ под действием @ должна превращаться в (непрерывную) функцию $@\delta_a \in \mathcal{C}(M)$ с точечным носителем: $\operatorname{supp} @\delta_a \subseteq \{a\}$. Ясно, что $@\delta_a \neq 0$ только если a – изолированная точка в M. Поэтому если M не содержит изолированных точек, то все δ-функции аннулируются отображением @: $\forall a \in M \quad @\delta_a = 0$. Поскольку, с другой стороны, δ-функции полны в $\mathcal{C}(M)^\star$, $\operatorname{span}\{\delta_a, a \in M\} = \mathcal{C}(M)^\star$ (потому что разделяют точки M), мы получаем, что $@ = 0$

Если теперь @ – точное отражение, то образы δ-функций $\{@\delta_a\}$ должны быть полны в $\mathcal{C}(M)$, а поскольку $\{@\delta_a\}$ имеют точечные носители, это возможно только, если M – дискретное пространство. □

(c) Конечномерные морфизмы над алгеброй с отражением

Пусть A – стереотипная алгебра и X – левый стереотипный A-модуль. Для всякого $f \in X^\star$ определим отображение

$$f_A : X \to A^\star, \qquad f_A(x)(a) = f(a \cdot x) \qquad (x \in X, a \in A) \tag{14.8}$$

(в силу предложения 12.18, $f_A \in A^\star \overset{A}{\oslash} X$). Если же X – правый стереотипный A-модуль, то для $f \in X^\star$ определим отображение

$$_A f : X \to A^\star, \qquad _A f(x)(a) = f(x \cdot a) \qquad (x \in X, a \in A) \tag{14.9}$$

(в силу предложения 12.18, $_A f \in A^\star \overset{A}{\oslash} X$).

Если зафиксировать левый A-модуль X, то для любых $f \in X^\star$ и $x \in X$ можно рассмотреть отображения $f_A : X \to A^\star$ и $_A x : X^\star \to A^\star$, для которых будет справедливо равенство

$$f_A(x) = {_A x}(f) \tag{14.10}$$

Действительно, $f_A(x)(a) = f(a \cdot x) = (f \cdot a)(x) = x(f \cdot a) =_A x(f)(a)$.

Пусть теперь $(A, @)$ – алгебра с отражением и $X, Y \in {_A\mathfrak{Ste}}$. Для любых $f \in X^\star$ и $y \in X$ обозначим

$$f \overset{A}{\odot} y : X \to Y, \qquad f \overset{A}{\odot} y\,(x) = @\{f_A(x)\} \cdot y \tag{14.11}$$

Поскольку $f \overset{A}{\odot} y \in X^\star \overset{A}{\odot} Y = Y \overset{A}{\oslash} X$, такое обозначение корректно.

Если же $X, Y \in \mathfrak{Ste}_A$ и $f \in X^\star, y \in X$ то полагаем

$$y \overset{A}{\tilde{\odot}} f : X \to Y, \qquad y \overset{A}{\tilde{\odot}} f\,(x) = y \cdot @\{_A f(x)\} \tag{14.12}$$

При этом $y \overset{A}{\tilde{\odot}} f \in Y \overset{A}{\tilde{\odot}} X^\star = Y \overset{A}{\oslash} X$.

Определение. Морфизмы вида $f \overset{A}{\odot} y$ и $y \overset{A}{\tilde{\odot}} f$ мы называем *одномерными.*

Предложение 14.5. *Сопряженный к одномерному морфизму является одномерным морфизмом:*

1) *если $X, Y \in {_A\mathfrak{Ste}}$ и $f \in X^\star, y \in X$ то $(f \overset{A}{\odot} y)^\star = f \overset{A}{\tilde{\odot}} y \in X^\star \overset{A}{\tilde{\odot}} Y = X^\star \overset{A}{\oslash} Y^\star$*

2) *если $X, Y \in \mathfrak{Ste}_A$ и $f \in X^\star, y \in X$ то $(y \overset{A}{\tilde{\odot}} f)^\star = y \overset{A}{\odot} f \in Y \overset{A}{\odot} X^\star = X^\star \overset{A}{\oslash} Y^\star$*

Доказательство. $(f \overset{A}{\odot} y)^\star(g)(x) = (g \circ f \overset{A}{\odot} y)(x) = g((f \overset{A}{\odot} y)(x)) = g(@f_A(x) \cdot y) = g_A(y)(@f_A(x)) = (i) = f_A(x)(@g_A(y)) = f(@g_A(y) \cdot x) = (f \cdot @g_A(y))(x) = (14.10) = (f \cdot @y_A(g))(x) = (f \overset{A}{\tilde{\odot}} y)(g)(x)$. □

Пример 14.6. Если X – почти делимый модуль или модуль без кручения над алгеброй с точным отражением $(A, @)$, то

$$\forall f \in X^\star \quad \forall x \in X \quad (f \neq 0 \quad \& \quad x \neq 0) \quad \Rightarrow f \overset{A}{\odot} x \neq 0$$

Доказательство. В силу 13.4 (b), достаточно рассмотреть случай, когда X – модуль без кручения. Тогда $f \neq 0 \Rightarrow \exists y \in X\ f(y) \neq 0 \Rightarrow f_A(y)(1) = f(1 \cdot y) \neq 0 \Rightarrow 0 \neq f_A(y) \in A^\star \Rightarrow 0 \neq @_A f_A(y) \in A \Rightarrow \forall x \neq 0 \in X \quad f \overset{A}{\odot} x\,(y) = @_A f_A(y) \cdot x \neq 0 \Rightarrow \forall x \neq 0 \quad f \overset{A}{\odot} x \neq 0.$ □

Определение. Морфизм $\mu : X \to Y$ стереотипных модулей над алгеброй с отражением называется *конечномерным (над A)*, если он является суммой одномерных:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i \overset{A}{\odot} y_i \qquad \left(\mu = \sum_{i=1}^{n} f_i \overset{A}{\tilde{\odot}} y_i \right)$$

Символом $\mathcal{F}_A(X,Y)$ мы обозначаем систему конечномерных над A морфизмов $\mu : X \to Y$.

Из предложения 14.5 следует

Предложение 14.7. *Морфизм $\mu^\star : Y^\star \to X^\star$, сопряженный к конечномерному морфизму $\mu : X \to Y$, является конечномерным.*

(d) Модули со свойством аппроксимации

Будем говорить, что модуль X над алгеброй с отражением $(A, @)$ *обладает свойством аппроксимации над A*, если тождественный морфизм $1_X : X \to X$ аппроксимируется в $X \overset{A}{\oslash} X = \mathrm{End}_A(X) = A^!(X)$ конечномерными. В этом случае

$$\overline{\mathcal{F}_A(X,X)} = \mathrm{End}_A(X) = A^!(X)$$

Пример 14.8. Сама алгебра A, как левый или правый A-модуль, тогда и только тогда обладает аппроксимацией над A когда отражение $@ : A^\star \to A$ является точным.

Доказательство. Дело в том, что "левые" одномерные A-морфизмы $\varphi : A \to A$ имеют вид

$$\varphi(b) = u \overset{A}{\odot} a(b) = b \cdot (@u \cdot a), \qquad u \in A^\star, a \in A \tag{14.13}$$

а "правые" – вид

$$\varphi(b) = a \overset{A}{\tilde{\odot}} u(b) = (a \cdot @u) \cdot b, \qquad u \in A^\star, a \in A \tag{14.14}$$

Действительно, по определению $u_A(b)(c) = u(c \cdot b)$, и поэтому $u_A(1)(c) = u(c)$, то есть $u_A(1) = u$.

Значит $@u_A(1) = @u$, откуда $@u_A(b) = @(u_A(b \cdot 1)) = @(b \cdot u_A(1)) = b \cdot @u_A(1) = b \cdot @u$. Следовательно, справедливо (14.13): $u \overset{A}{\odot} a(b) = @u_A(b) \cdot a = b \cdot (@u \cdot a)$. Аналогично доказывается (14.14).

Из (14.13) следует, что одномерные (и значит, конечномерные) левые A-морфизмы $\varphi : A \to A$ имеют вид $\varphi = 1_A \cdot @u$, значит 1_A приближается конечномерными только если единица алгебры A приближается элементами вида $@u$. Это означает что $@$ должно быть точным отражением. □

Пример 14.9. Всякое стереотипное пространство X, рассматриваемое как левый $\mathcal{L}(X)$ -модуль, аппроксимируемо над $\mathcal{L}(X)$.

Доказательство. Дело в том, что

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}(X)}(X,X) = \mathbb{C} = \mathrm{End}_{\mathcal{L}(X)}(X)$$

Второе равенство очевидно: если $\mu \in \mathrm{End}_{\mathcal{L}(X)}(X)$, то есть $\mu(\varphi(x)) = \varphi(\mu(x)), \quad \varphi \in \mathcal{L}(X)$, то $\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \mu = \lambda \cdot 1$.

Докажем первое. Пусть $x \in X, f \in X^\star$ и $\mu = f \overset{A}{\odot} x$. Тогда, поскольку

$$f_A(y)(\varphi) = f(\varphi(y)) = f \overset{\mathbb{C}}{\circledast} y(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{L}(X)$$

мы получаем

$$f_A(y) = f \overset{\mathbb{C}}{\circledast} y$$

и значит

$$@f_A(y) = @f \overset{\mathbb{C}}{\circledast} y = f \overset{\mathbb{C}}{\odot} y$$

откуда

$$\mu(y) = f \overset{A}{\odot} x(y) = @f_A(y) \cdot x = f \overset{\mathbb{C}}{\odot} y(x) = f(x) \cdot y$$

То есть μ есть оператор умножения на скаляр $\lambda = f(x)$. □

Теорема 14.10. *Пусть $(A,@)$ – алгебра с отражением и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над A а $X \in \mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над $\mathbb{C}$. Тогда левый стереотипный A-модуль $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ с умножением*

$$(a \cdot \varphi)(x) = a \cdot \varphi(x)$$

обладает аппроксимацией над A.

Для доказательства нам понадобится

Лемма 14.11. *Если $\alpha \in \mathcal{L}(X) = \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(X)$ – одномерный (над $\mathbb{C}$) оператор и $\beta \in \operatorname{End}_A(Y)$ – одномерный (над A) морфизм, то $\beta \oslash \alpha \in \operatorname{End}_A(Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X)$ – одномерный (над A) морфизм.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha = f \overset{\mathbb{C}}{\odot} x, \qquad \beta = g \overset{A}{\odot} y$$

Положим

$$h = g \overset{\mathbb{C}}{\circledast} x \in (Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X)^\star, \qquad \psi = f \overset{\mathbb{C}}{\oslash} y \in Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$$

и покажем, что

$$h \overset{A}{\odot} \psi = \beta \oslash \alpha$$

Из цепочки равенств $h_A(\varphi)(a) = h(a\cdot\varphi) = g \circledast x(a\cdot\varphi) = g((a\cdot\varphi)(x)) = g(a\cdot\varphi(x)) = g_A(\varphi(x))(a)$ следует

$$h_A(\varphi) = g_A(\varphi(x)) \tag{14.15}$$

(или $h_A = g_A \circledast x$). Поэтому $\forall \varphi \in Y \oslash X \quad \forall z \in X$
$(h \overset{A}{\odot} \psi(\varphi))(z) = (@h_A(\varphi)\cdot\psi)(z) = (@g_A(\varphi(x)) \cdot f \odot y)(z) =$ (определение умножения в $Y \oslash X$) $=$ $@g_A(\varphi(x))((f\cdot y)(z)) = @g_A(\varphi(x))(f(z)\cdot y) = @g_A(f(z)\cdot\varphi(x))y = g \overset{A}{\odot} y(f(z)\cdot\varphi(x)) = g \overset{A}{\odot} y(\varphi(f(z)\cdot x)) =$ $(g \overset{A}{\odot} y \circ \varphi \circ f \overset{\mathbb{C}}{\odot} x)(z) = (\beta\circ\varphi\circ\alpha)(z) = (\beta\odot\alpha)(\varphi)(z)$ □

Доказательство. Теперь докажем теорему 14.10. Пусть

$$\alpha_i \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}(X) \qquad \alpha_i \overset{\mathcal{L}(X)}{\longrightarrow} 1_X, \qquad\qquad \beta_j \in \mathcal{F}_A(Y) \qquad \beta_j \overset{\operatorname{End}_A(Y)}{\longrightarrow} 1_Y$$

Тогда по лемме 14.11 $\beta_j \oslash \alpha_i \in \mathcal{F}_A(Y \oslash X)$ а по теореме 6.15

$$\beta_j \oslash \alpha_i \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1_Y \oslash \alpha_i \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1_Y \oslash 1_X = 1_{Y\oslash X}$$

□

Аналогично доказывается

Теорема 14.12. *Пусть $(A,@)$ – алгебра с отражением и $Y \in \mathfrak{Ste}_A$ обладает аппроксимацией над A а $X \in \mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над $\mathbb{C}$. Тогда правый стереотипный A-модуль $Y \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ с умножением*

$$(\varphi \cdot a)(x) = \varphi(x)\cdot a$$

обладает аппроксимацией над A.

Из теорем 14.12 и 6.2 следует

Теорема 14.13. *Пусть $(A,@)$ – алгебра с отражением и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над A а $X \in \mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над $\mathbb{C}$. Тогда правый стереотипный A-модуль $X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ с умножением*

$$(\varphi \cdot a)(y) = \varphi(a \cdot y)$$

обладает аппроксимацией над A.

Аналогично, из 14.10 следует.

Теорема 14.14. *Пусть $(A,@)$ – алгебра с отражением и $Y \in \mathfrak{Ste}_A$ обладает аппроксимацией над A а $X \in \mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над $\mathbb{C}$. Тогда левый стереотипный A-модуль $X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} Y$ с умножением*

$$(a\cdot\varphi)(y) = \varphi(y\cdot a)$$

обладает аппроксимацией над A.

Наконец, из теорем 14.12, 14.13 и 14.14 следуют еще два утверждения.

Теорема 14.15. *Пусть $(A,@)$ – алгебра с отражением и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над A а $X \in \mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над $\mathbb{C}$. Тогда левый стереотипный A-модуль $X \overset{\mathbb{C}}{\odot} Y$ с умножением*

$$(a\cdot\varphi)(f) = a\cdot\varphi(f), \qquad \varphi \in Y \oslash X^\star = X \overset{\mathbb{C}}{\odot} Y, \quad f\in X^\star$$

обладает аппроксимацией над A.

Теорема 14.16. *Пусть $(A,@)$ – алгебра с отражением и $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над A а $X \in \mathfrak{Ste}$ обладает аппроксимацией над $\mathbb{C}$. Тогда левый стереотипный A-модуль $X \overset{\mathbb{C}}{\circledast} Y$ с умножением*

$$(a\cdot u)(\varphi) = u(\varphi\cdot a), \qquad (\varphi\cdot a)(y) = \varphi(a\cdot y) \qquad u\in (X^\star\oslash Y)^\star = X\overset{\mathbb{C}}{\circledast} Y, \quad \varphi\in X^\star\oslash Y$$

обладает аппроксимацией над A.

Аналогично теореме 9.12 доказывается

Теорема 14.17. *Пусть $\{X^\iota;\iota\in I\}$ – семейство стереотипных модулей со свойством аппроксимации над алгеброй с отражением $(A,@)$. Тогда прямое произведение $\prod_{\iota\in I} X^\iota$ и прямая сумма $\oplus_{\iota\in I}X^\iota$ (являются стереотипными A-модулями, и) обладают аппроксимацией над $(A,@)$.*

(e) Коммутант и бикоммутант алгебры с отражением

В пространстве $A^!(X)^\star$, сопряженном к коммутанту $A^!(X)$ всегда можно определить одномерные тензоры $f \overset{A}{\circledast} x \in A^!(X)^\star$ формулой (12.5), принимающей в данном случае вид

$$f \overset{A}{\circledast} x(\alpha) = f(\alpha(x)), \qquad \alpha\in A^!(X)$$

Если же, кроме того, алгебра A наделена отражением $@: A^\star\to A$, то появляется возможность определить также одномерные операторы по формуле (14.11):

$$(f \overset{A}{\odot} x)(y) = @_A f_A(y)\cdot x \qquad y\in X$$

Из предложения 12.8 и теоремы 12.10 следует

Теорема 14.18. *Если $(A,@)$ – алгебра с отражением, то для всякого стереотипного модуля X над A коммутант $A^!(X)$ является алгеброй с отражением $@^!(X)$, однозначно определяемым формулой*

$$f \overset{A}{\circledast} x \in X^\star \overset{A}{\circledast} X = A^!(X)^\star \quad \overset{@^!(X)}{\longmapsto} \quad f \overset{A}{\odot} x \in X^\star \overset{A}{\odot} X = A^!(X) \qquad f\in X^\star, x\in X,$$

Предложение 14.19. *Пусть $K = A^!(X)$, $@_K = @^!(X)$. Тогда справедливо тождество*

$$@_K f_K(y)\cdot x = f \underset{K}{\odot} x\,(y) = f \overset{A}{\odot} y\,(x) = @_A f_A(x)\cdot y, \qquad x,y\in X, \quad f\in X^\star \tag{14.16}$$

Доказательство. По определению, $f_K(y)(\varphi) = f(\varphi(y)) = f \overset{A}{\circledast} y(\varphi)$, то есть $f_K(y) = f \overset{A}{\circledast} y$, значит $@_K f_K(y) = @_K(f \overset{A}{\circledast} y) = f \overset{A}{\odot} y$, откуда и получаем (14.16). □

Следующий результат является обращением теоремы 13.5.

Теорема 14.20. *Если X – почти делимый модуль или модуль без кручения над алгеброй с точным отражением $(A,@_A)$, то X – простой модуль над коммутантом $A^!(X)$.*

Доказательство. В силу теоремы 13.2 и предложения 13.4, достаточно рассмотреть случай, когда X – модуль без кручения. Пусть $0 \neq x \in X$. Зафиксируем $y \in X$ и покажем, что

$$\exists \varphi_\nu \in A^!(X) \quad \varphi_\nu(x) \xrightarrow{X} y \quad (\nu \to \infty) \tag{14.17}$$

Поскольку $@_A : A^\star \to A$ – точное отражение, существует направленность функционалов $g^i \in A^\star$ такая, что

$$@_A g^i \xrightarrow{A} 1_A \quad (i \to \infty)$$

Далее, из того, что X – модуль без кручения над A следует, что отображение $a \in A \mapsto a \cdot x \in X$ является мономорфизмом. Поэтому сопряженное отображение $f \in X^\star \mapsto f_A(x) \in A^\star \quad (f_A(x)(a) = f(a \cdot x))$ должно быть эпиморфизмом. Значит, существует направленность функционалов $f^{ij} \in X^\star$ такая, что

$$f_A^{ij}(x) \xrightarrow{A^\star} g^i \quad (j \to \infty)$$

Положим теперь $\varphi^{ij} = f^{ij} \overset{A}{\odot} y$. Тогда выполняется (14.17):

$$\varphi^{ij}(x) = f^{ij} \overset{A}{\odot} y\,(x) = @_A f_A^{ij}(x) \cdot y \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} @_A g^i \cdot y \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} y$$

$\square$

Определение. Условимся, как обычно, говорить, что алгебра A *эффективно действует на модуле* X, если для всякого $a \in A$ тождество $a \cdot x = 0 \quad (x \in X)$ влечет за собой равенство $a = 0$. Иными словами, представление алгебры A в алгебре операторов $\mathcal{L}(X)$, описанное в теореме 11.2, должно иметь нулевое ядро.

Ясно, что коммутант $A^!(X)$ всегда эффективно действует на X.

СВОЙСТВА КОММУТАНТА АЛГЕБРЫ С ОТРАЖЕНИЕМ

$1^!$. *Если $(A, @)$ – алгебра с точным отражением, эффективно действующая на X, то X обладает аппроксимацией над $(A^!(X), @^!(X))$.*

$2^!$. *Если X обладает аппроксимацией над $(A, @)$, то $(A^!(X), @^!(X))$ – алгебра с точным отражением, эффективно действующая на X.*

Доказательство. Обозначим $K = A^!(X)$, $@_K = @^!(X)$.

1. Пусть A имеет точное отражение и эффективно действует на X. Заметим, что

$$f \underset{K}{\odot} x(y) = @_K f_K(y) \cdot x = (14.16) = @_A f_A(x) \cdot y, \qquad f \in X^\star, x \in X$$

то есть всякий одномерный над A морфизм $f \underset{K}{\odot} x \in \operatorname{End}_K(X)$ имеет вид

$$f \underset{K}{\odot} x = @_A u, \qquad u = f_A(x) \in A^\star \tag{14.18}$$

Поскольку действие A на X эффективно, имеем

$$\bigcap_{f \in X^\star, x \in X} \operatorname{Ker} f_A(x) = 0$$

Поэтому $\overline{\operatorname{span}\{f_A(x), f \in X^\star, x \in X\}} = A^\star$. Поскольку отображение $@ : A^\star \to A$ имеет плотный в A образ, мы получаем, что операторы вида

$$\varphi = @_A \sum_{i=1}^n f_A^i(x_i) \in A$$

(то есть, в силу (14.18), конечномерные над K эндоморфизмы X) аппроксимируют единицу в A.

2. Пусть X обладает аппроксимацией над $(A, @)$. Тогда

$$f \overset{A}{\odot} x(y) = @_A f_A(y) \cdot x = (14.16) = @_K f_K(x) \cdot y, \qquad f \in X^\star, x \in X$$

Это означает, что всякий одномерный над A морфизм $f \overset{A}{\odot} x \in \mathrm{End}_A(X)$ имеет вид

$$f \overset{A}{\odot} x = @_K u, \qquad u = f_K(x) \in K^\star$$

Поэтому если конечномерные над A морфизмы приближают единицу в $K = \mathrm{End}_A(X)$

$$\varphi_i \longrightarrow 1_X$$

то найдутся $u_i \in K^\star$ такие, что

$$@_K u_i \longrightarrow 1_K$$

То есть K – алгебра с точным отражением. $\square$

Бикоммутантом $A^{!!}(X)$ проективной стереотипной алгебры A, действующей на стереотипном модуле X, называется коммутант от коммутанта:

$$A^{!!}(X) = [A^!(X)]^!(X) = X \underset{A^!(X)}{\oslash} X = \mathrm{End}_{A^!(X)}(X)$$

Как и коммутант, *бикоммутант* $A^{!!}(X)$ *всегда является проективной стереотипной алгеброй, причем отражение* $@$ *на* A *порождает естественное отражение* $@^{!!}(X)$ *на* $A^{!!}(X)$.

СВОЙСТВА БИКОММУТАНТА АЛГЕБРЫ С ОТРАЖЕНИЕМ

$1^{!!}$. *Если* X *обладает аппроксимацией над* $(A, @)$, *то* X *обладает аппроксимацией над* $(A^{!!}(X), @^{!!}(X))$.

$2^{!!}$. *Если* $(A, @)$ *– алгебра с точным отражением, эффективно действующая на* X, *то* $(A^{!!}(X), @^{!!}(X))$ *– алгебра с точным отражением, эффективно действующая на* X.

(f) Морфизмы алгебр с отражением и теорема о бикоммутанте для алгебр с отражением

Морфизмом алгебр с отражением $(A, @_A)$ и $(B, @_B)$ называется всякий морфизм стереотипных алгебр $\varphi : A \to B$, обеспечивающий коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A^\star \arrow[r, "@_A"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B^\star \arrow[u, "\varphi^\star"] \arrow[r, "@_B"] & B \end{tikzcd}$$

Следующая конструкция служит руководящим примером.

Пример 14.21 (Морфизм в бикоммутант $\lambda : A \to A^{!!}(X)$)**.** Если X – стереотипный модуль над алгеброй с отражением $(A, @_A)$ то естественное отображение $\lambda : A \to A^{!!}(X)$ является морфизмом алгебр с отражением.

Доказательство. Обозначим $K = A^!(X)$. Нам нужно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A^\star \arrow[r, "@_A"] & A \arrow[d, "\lambda"] \\ X^\star \underset{K}{\circledast} X = A^{!!}(X)^\star \arrow[u, "\lambda^\star"] \arrow[r, "@_{A^{!!}}"] & A^{!!}(X) = X^\star \underset{K}{\odot} X \end{tikzcd} \qquad (14.19)$$

Пусть $f \in X^\star, x \in X$. По определению, $f \underset{K}{\circledast} x \overset{@_{A^{!!}}}{\to} \mapsto f \underset{K}{\odot} x$. Значит $\forall y \in X$

$$@_{A^{!!}}(f \underset{K}{\circledast} x)(y) = f \underset{K}{\odot} x(y) = @_K f_K(y) \cdot x \qquad (14.20)$$

С другой стороны, $\lambda^\star(f \underset{K}{\circledast} x) = f \underset{K}{\circledast} x \circ \lambda \in A^\star$, то есть $\forall a \in A \quad \lambda^\star(f \underset{K}{\circledast} x)(a) = (f \underset{K}{\circledast} x)(\lambda(a)) = f(\lambda(a)(x)) = f(a \cdot x) = f_A(x)(a)$. Таким образом, $\lambda^\star(f \underset{K}{\circledast} x) = f_A(x)$. Отсюда $@_A \lambda^\star(f \underset{K}{\circledast} x) = @_A f_A(x)$, и значит

$$\lambda @_A \lambda^\star(f \underset{K}{\circledast} x)(y) = \lambda @_A f_A(x)(y) = @_A f_A(x) \cdot y \qquad (14.21)$$

Соберем вместе (14.20) и (14.21): $\lambda @_A \lambda^\star(f \underset{K}{\circledast} x)(y) = @_A f_A(x)\cdot y = (3.8) = @_K f_K(y)\cdot x = @_{A^{!!}} f \underset{K}{\circledast} x(y)$. То есть $\lambda @_A \lambda^\star = @_{A^{!!}}$. □

Отметим еще один важный

Пример 14.22 (Неприводимые представления)**.** Пусть $\pi : G \to \mathcal{L}(X)$ – непрерывное представление компактной группы G в конечномерном пространстве X, и $\varphi : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathcal{L}(X)$ – соответствующий морфизм стереотипных алгебр (теорема 10.12).

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L}(X) & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

Пусть $@_G : \mathcal{C}(G) \to \mathcal{C}^\star(G)$ – нормальное отражение на алгебре $\mathcal{C}^\star(G)$ (14.7), и пусть $@_X : \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X)$ – нормальное отражение на алгебре $\mathcal{L}(X)$ (то есть преобразование Гротендика из (9.9)). Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) π – неприводимое представление;

(ii) для какого-нибудь ненулевого отражения $@$ на $\mathcal{L}(X)$ отображение φ является морфизмом алгебр с отражением $\varphi : (\mathcal{C}^\star(G), @_G) \to (\mathcal{L}(X), @)$;

(iii) для некоторой ненулевой константы $\lambda \in \mathbb{C}$ отображение φ является морфизмом алгебр с отражением $\varphi : (\mathcal{C}^\star(G), @_G) \to (\mathcal{L}(X), \lambda @_X)$.

При этом,

$$\varphi \circ @_G \circ \varphi^\star = \frac{1}{\dim X} \cdot @_X \tag{14.22}$$

где $\dim X$ – размерность пространства X. В частности,

(a) π – одномерное представление $\Leftrightarrow$ φ – морфизм алгебр с отражением $\varphi : (\mathcal{C}^\star(G), @_G) \to (\mathcal{L}(X), @_X)$.

Доказательство. Доказательство использует следующую простейшую формулу, справедливую для всякого неприводимого представления π:

$$\int_G \operatorname{tr}(\alpha \circ \pi(g)) \cdot \pi(g^{-1}) \cdot dI(g) = \frac{1}{\dim X} \cdot \alpha, \qquad \alpha \in \mathcal{L}(X)$$

(здесь I – нормированная мера Хаара на G: $I(G) = 1$). Из этой формулы, в силу (9.12), следует, что

$$\int_G u(\pi(g)) \cdot \pi(g^{-1}) \cdot dI(g) = \frac{1}{\dim X} \cdot @_X u, \qquad u \in \mathcal{L}^\star(X) \tag{14.23}$$

Но, с другой стороны, как легко проверить,

$$(\varphi \circ @_G \circ \varphi^\star)(u) = \int_G u(\pi(g)) \cdot \pi(g^{-1}) \cdot dI(g) \qquad u \in \mathcal{L}^\star(X) \tag{14.24}$$

Действительно, если $u \in \mathcal{L}^\star(X)$, то

$$\varphi^\star(u) \in \mathcal{C}(G) : \quad \varphi^\star(u)(g) = (u \circ \varphi)(g) = u(\varphi(g)) = u(\pi(g))$$

$$\Downarrow$$

$$@_G \varphi^\star(u) \in \mathcal{C}^\star(G) : \quad @_G \varphi^\star(u) = \int_G \varphi^\star(u)(g) \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot dI(g) = \int_G u(\pi(g)) \cdot \delta_{g^{-1}} \cdot dI(g)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi @_G \varphi^\star(u) \in \mathcal{L}(X) : \quad \varphi @_G \varphi^\star(u) = \int_G u(\pi(g)) \cdot \varphi(\delta_{g^{-1}}) \cdot dI(g) = \int_G u(\pi(g)) \cdot \pi(g^{-1}) \cdot dI(g)$$

Формулы (14.23) и (14.24) вместе дают (14.22). Мы доказали, импликацию $(i) \Rightarrow (iii)$. Импликация $(iii) \Rightarrow (ii)$ очевидна. Докажем $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\mathcal{L}(X)$ наделено некоторым ненулевым отражением @, и φ является морфизмом алгебр с отражением $\varphi : (\mathcal{C}^\star(G), @_G) \to (\mathcal{L}(X), @)$, то есть коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(G) \arrow[r, "@_G"] & \mathcal{C}^\star(G) \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathcal{L}^\star(X) \arrow[u, "\varphi^\star"] \arrow[r, "@"] & \mathcal{L}(X) \end{tikzcd} .$$

В силу примера 14.2, $@ = \lambda \cdot @_X, \quad \lambda \neq 0$. Поэтому $\mathcal{L}(X) = \operatorname{Im} @ \subseteq \operatorname{Im} \varphi$, откуда следует, что π – неприводимое представление. $\square$

Теорема 14.23 (о бикоммутанте для алгебр с отражением)**.** *Если проективная стереотипная алгебра A наделена точным отражением $@ : A^\star \to A$, то для всякого стереотипного модуля $X \in {}_A\mathfrak{Ste}$ на котором A действует эффективно, естественное отображение*

$$\lambda : A \to A^{!!}(X)$$

является эпиморфизмом (и следовательно – биморфизмом) стереотипных пространств.

Эквивалентная формулировка: *пусть $(A, @)$ – алгебра с точным отражением, X – стереотипное пространство, и задан мономорфизм стереотипных алгебр (инъективное непрерывное линейное мультипликативное сохраняющее единицу отображение) $\varphi : A \to \mathcal{L}(X)$, тогда $\varphi(A)$ плотно в бикоммутанте $A^{!!}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$.*

Доказательство. В силу примера 14.21, коммутативна диаграмма (14.19). В силу свойства 2^0 § 14(d), $A^{!!}(X)$ является алгеброй с точным отражением, то есть отображение $@_{A^{!!}}$ имеет плотный образ в $A^{!!}(X)$. Значит, φ также имеет плотный образ в $A^{!!}(X)$. $\square$

(g) Теорема Веддерберна для простых алгебр с отражением

Алгебру с отражением $(A, @)$ назовем *простой алгеброй с отражением*, если

(a) отражение @ ненулевое;

(b) A является простой алгеброй (определение § 13(b));

(c) A обладает ненулевым простым левым идеалом X;

(из (a) и (b) следует, что отражение @ должно быть точным).

Пример 14.24. Пусть X – (ненулевой) почти делимый модуль или модуль без кручения над алгеброй с точным отражением $(D, @_D)$. Тогда
$(D^!(X), @^!_D(X))$– простая алгебра с отражением $\Leftrightarrow$ X обладает аппроксимацией над $(D, @_D)$.

В частности, $\mathcal{L}(X)$ – *простая алгебра с отражением* $\Leftrightarrow$ *пространство X обладает стереотипной аппроксимацией (над $\mathbb{C}$).*

Доказательство. Если X не обладает аппроксимацией над $(D, @_D)$, то конечномерные морфизмы $\sum_{i=1}^n f^i \underset{D}{\odot} x^i$ образуют (ненулевой в силу примера 14.6) не плотный в $\operatorname{End}_D(X) = D^!(X)$ двусторонний идеал. Значит $D^!(X)$ не может быть простой алгеброй.

Наоборот, пусть X обладает D-аппроксимацией и I – какой-нибудь ненулевой непосредственный двусторонний идеал в $D^!(X)$. Возьмем $0 \neq \varphi \in I$ и $x \in X : \varphi(x) \neq 0$. Тогда для $0 \neq f \in X^\star$ мы получим

$$f \underset{D}{\odot} \varphi(x) = \varphi \circ f \underset{D}{\odot} x \in I$$

и поэтому, умножая слева и справа на элементы $\alpha, \beta \in D^!(X)$, получим

$$(f \circ \beta) \underset{D}{\odot} \alpha(\varphi(x)) = \alpha \circ f \underset{D}{\odot} \varphi(x) \circ \beta \in I$$

Поскольку, в силу теоремы 14.20, X – простой (левый) $D^!(X)$-модуль, всякий $y \in X$ приближается элементами $\alpha(\varphi(x))$, $\alpha \in D^!(X)$. С другой стороны, в силу 13.4(a), $X^\star$ – тоже простой (правый) $D^!(X)$-модуль, значит, всякий $g \in X^\star$ приближается функционалами $f \circ \beta$, $\beta \in D^!(X)$.

Таким образом, все одномерные операторы $g \underset{D}{\odot} y$ лежат в I, и вместе с ними в I лежат все конечномерные над D операторы. Поскольку X обладает D-аппроксимацией, I должно быть плотно в $D^!(X)$. Так как I – непосредственный идеал в $D^!(X)$ получаем равенство $I = D^!(X)$.

Итак, $A = D^!(X)$ обладает свойством (b). С другой стороны, в силу свойства 2^0 § 14(d), $D^!(X)$ – алгебра с точным отражением. Наконец, из 14.20 следует, что X – простой модуль над $D^!(X)$. $\square$

Определение. Пусть дан морфизм алгебр с отражением $\sigma : (A, @_A) \to (B, @_B)$, являющийся одновременно мономорфизмом проективных стереотипных алгебр, то есть, линейное мультипликативное непрерывное инъективное отображение $\sigma : A \to B$, сохраняющее единицу и обеспечивающее коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} A^\star \arrow[r, "@_A"] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ B^\star \arrow[u, "\sigma^\star"] \arrow[r, "@_B"] & B \end{tikzcd}. \tag{14.25}$$

Тогда мы говорим, что $(A, @_A)$ является *подалгеброй с отражением* в алгебре с отражением $(B, @_B)$, и σ – ее представляющий мономорфизм.

Если $@_A$ и $@_B$ – точные отражения, то $(A, @_A)$ называется *подалгеброй с точным отражением в алгебре с точным отражением* $(B, @_B)$. В этом случае все морфизмы в диаграмме (14.25) становятся биморфизмами стереотипных пространств, поэтому возникает цепочка плотных инъекций

$$B^\star \quad \overset{\sigma^\star}{\subseteq} \quad A^\star \quad \overset{@_A}{\subseteq} \quad A \quad \overset{\sigma}{\subseteq} \quad B$$

Теорема 14.25 (Веддерберна для простых алгебр с отражением)**.** *Пусть $(D, @_D)$ – алгебра с отражением и X – ненулевой левый стереотипный D-модуль со следующими свойствами:*

(i) X обладает аппроксимацией над $(D, @_D)$;

(ii) X – почти делимый модуль или модуль без кручения над D.

Тогда всякая подалгебра с точным отражением $(A, @_A)$ в коммутанте $(D^!(X), @^!_D(X))$ является простой алгеброй с отражением.

$$\begin{tikzcd} A^\star \arrow[r, "@_A"] & A \arrow[d, "\sigma"] \\ D^!(X)^\star \arrow[u, "\sigma^\star"] \arrow[r, "@^!_D"] & D^!(X) \end{tikzcd}.$$

Наоборот, если $(A, @_A)$ – простая алгебра с отражением, то найдется алгебра с отражением $(D, @_D)$ и ненулевой левый стереотипный D-модуль X со свойствами

(i) X обладает аппроксимацией над $(D, @_D)$;

(iii) X является почти делимым и (одновременно) не имеет кручения над D;

такие, что $(A, @_A)$ является подалгеброй с точным отражением в коммутанте $(D^!(X), @^!_D(X))$.

Доказательство. 1. Пусть $(D, @_D)$ – алгебра с отражением и X обладает свойствами (i) и (ii). В силу примера 14.24, $(D^!(X), @^!_D(X))$ – алгебра с точным отражением, поэтому для любой ее подалгебры с точным отражением $(A, @_A)$ справедлива цепочка биморфизмов

$$D^!(X)^\star \quad \overset{\sigma^\star}{\subseteq} \quad A^\star \quad \overset{@_A}{\subseteq} \quad A \quad \overset{\sigma}{\subseteq} \quad D^!(X)$$

Нам нужно проверить условия (b) и (c) из определения простой алгебры с отражением. Условие (c) очевидно: X – простой $D^!(X)$-модуль (в силу 14.20), а A плотно в $D^!(X)$, поэтому X – простой A-модуль.

Докажем (b). Функционалы вида $f \underset{D}{\circledast} x$ разделяют точки $D^!(X)^\star = X^\star \underset{D}{\circledast} X$, поэтому они полны в $D^!(X)^\star$ (то есть их линейные комбинации плотны в $D^!(X)^\star$). Значит, они полны и в $A^\star$ (поскольку $\sigma^\star : D^!(X)^\star \to A^\star$ – плотная инъекция). Значит, их образы $@_A \sigma^\star(f \underset{D}{\circledast} x) = @_D(f \underset{D}{\circledast} x) = f \underset{D}{\odot} x$ полны в A (поскольку

$@_A : A^\star \to A$ – тоже плотная инъекция). Таким образом, алгебра $A \subseteq D^!(X)$ содержит конечномерные (над D) морфизмы в качестве плотного идеала.

Заметив это, мы можем теперь воспользоваться той же схемой доказательства, что и в примере 14.24. Если I – ненулевой непосредственный двусторонний идеал в A, то взяв $0 \neq \varphi \in I$ и $x \in X : \varphi(x) \neq 0$, мы можем умножить φ на одномерный оператор

$$f \underset{D}{\odot} \varphi(x) = \varphi \circ f \underset{D}{\odot} x \in I$$

где $0 \neq f \in X^\star$, а затем, умножая слева и справа на элементы $\alpha, \beta \in A$, мы получим

$$(f \circ \beta) \underset{D}{\odot} \alpha(\varphi(x)) = \alpha \circ f \underset{D}{\odot} \varphi(x) \circ \beta \in I$$

Поскольку, как уже отмечалось, X – простой A-модуль, всякий $y \in X$ приближается элементами $\alpha(\varphi(x))$, $\alpha \in A$. С другой стороны, $X^\star$ – тоже простой A-модуль, значит, всякий $g \in X^\star$ приближается функционалами $f \circ \beta$, $\beta \in A$.

Таким образом, все одномерные операторы $g \underset{D}{\odot} y$ лежат в I, и вместе с ними в I лежат все конечномерные над D операторы. Отсюда $I = A$.

2. Пусть наоборот, $(A, @_A)$ – простая алгебра с отражением. Тогда, по определению, A обладает простым левым модулем X. По теореме 13.5, X будет почти делимым модулем без кручения над коммутантом $D = A^!(X)$, то есть будет обладать свойствами (i) и (iii). С другой стороны, поскольку в A нет нетривиальных непосредственных двусторонних идеалов, A эффективно действует на X. Значит (свойство $1^!$ § 14(d)), X аппроксимируем над $D = A^!(X)$. Наконец, в силу примера 14.21, естественное отображение $\lambda : A \to A^{!!}(X) = D^!(X)$ является морфизмом алгебр с отражением. При этом, поскольку A не имеет нетривиальных непосредственных двусторонних идеалов, λ является мономорфизмом стереотипных алгебр. Иными словами, $(A, @_A)$ является подалгеброй с (точным) отражением в коммутанте $(D^!(X), @^!_D(X))$. □

Следствие 14.26. *Если* $(A, @_A)$ *– простая алгебра с отражением и* X *– ненулевой простой* A*-модуль, то* $(A^{!!}(X), @^{!!}_A(X))$*– простая алгебра с отражением.*

Доказательство. По теореме 13.5, X будет модулем без кручения над $A^!(X)$ а по свойству 1^0 § 14(d), X будет обладать аппроксимацией над $A^!(X)$ Значит, по теореме 14.25, $A^{!!}(X)$ – простая алгебра с отражением. □

§ 15 Абсолютная теория гомологий

Обычный подход к теории гомологий топологических алгебр – *относительная теория гомологий* [13, 15, 16] – заключается в том, что свойства топологических модулей над фиксированной алгеброй A количественно оцениваются гомологиями в абелевой категории (не топологизированных) векторных пространств над $\mathbb{C}$. В этом параграфе мы показываем, что к стереотипным алгебрам применима также другая схема, которую мы называем *абсолютной теорией гомологий*, состоящая в том, что свойства топологических модулей из ${}_A\mathfrak{Ste}$ оцениваются гомологиями в неабелевой категории ${}_\mathbb{C}\mathfrak{Ste}$.

(a) Инъективность и проективность

Стереотипный левый модуль P над стереотипной алгеброй A называется *проективным (в абсолютном смысле)*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

(i) всякий эпиморфизм $\varphi : X \to Y$ в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ порождает эпиморфизм $(\varphi \overset{A}{\oslash} 1_P) : (X \overset{A}{\oslash} P) \to (Y \overset{A}{\oslash} P)$ в категории $\mathfrak{Ste}$:

$$\varphi \in \mathrm{Epi}({}_A\mathfrak{Ste}) \Rightarrow \varphi \overset{A}{\oslash} 1_P \in \mathrm{Epi}(\mathfrak{Ste})$$

(ii) всякий эпиморфизм $\varphi : X \to Y$ в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ порождает эпиморфизм $(1_{P^\star} \overset{A}{\odot} \varphi) : (P^\star \overset{A}{\odot} X) \to (P^\star \overset{A}{\odot} Y)$ в категории $\mathfrak{Ste}$

$$\varphi \in \mathrm{Epi}({}_A\mathfrak{Ste}) \Rightarrow 1_{P^\star} \overset{A}{\odot} \varphi \in \mathrm{Epi}(\mathfrak{Ste})$$

(iii) всякий мономорфизм $\varphi : X \to Y$ в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ порождает мономорфизм $(\varphi \overset{A}{\circledast} 1_P) : (X \overset{A}{\circledast} P) \to (Y \overset{A}{\circledast} P)$ в категории $\mathfrak{Ste}$:

$$\varphi \in \operatorname{Mon}({}_A\mathfrak{Ste}) \Rightarrow \varphi \overset{A}{\circledast} 1_P \in \operatorname{Mon}(\mathfrak{Ste})$$

(это условие можно назвать *условием плоскости*; таким образом, в теории гомологий стереотипных алгебр плоскость оказывается эквивалентной проективности).

Двойственным образом, стереотипный (левый) модуль Q над стереотипной алгеброй A называется *инъективным (в абсолютном смысле)*, если выполняются следующие эквивалентные условия

(i) всякий мономорфизм $\varphi : X \to Y$ в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ порождает эпиморфизм $(1_Q \overset{A}{\oslash} \varphi) : (Q \overset{A}{\oslash} Y) \to (Q \overset{A}{\oslash} X)$ в категории $\mathfrak{Ste}$

$$\varphi \in \operatorname{Mon}({}_A\mathfrak{Ste}) \Rightarrow 1_Q \overset{A}{\oslash} \varphi \in \operatorname{Epi}(\mathfrak{Ste})$$

(ii) всякий эпиморфизм $\varphi : X \to Y$ в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ порождает эпиморфизм $(\varphi \overset{A}{\odot} 1_Q) : (X \overset{A}{\odot} Q) \to (Y \overset{A}{\odot} Q)$ в категории $\mathfrak{Ste}$:

$$\varphi \in \operatorname{Epi}({}_A\mathfrak{Ste}) \Rightarrow \varphi \overset{A}{\odot} 1_Q \in \operatorname{Epi}(\mathfrak{Ste})$$

(iii) всякий мономорфизм $\varphi : X \to Y$ в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ порождает мономорфизм $(1_{Q^\star} \overset{A}{\circledast} \varphi) : (Q^\star \overset{A}{\circledast} X) \to (Q^\star \overset{A}{\circledast} Y)$ в категории $\mathfrak{Ste}$

$$\varphi \in \operatorname{Mon}({}_A\mathfrak{Ste}) \Rightarrow 1_{Q^\star} \overset{A}{\circledast} \varphi \in \operatorname{Mon}(\mathfrak{Ste})$$

Аналогично определяются правые проективные и инъективные модули.

Теорема 15.1. *Левый (правый) A-модуль P проективен $\Leftrightarrow$ правый (левый) A-модуль $Q = P^\star$ инъективен.*

ПРИМЕРЫ (АБСОЛЮТНО) ПРОЕКТИВНЫХ И ИНЪЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ

1^0. *Для стереотипного пространства X, как стереотипного $\mathbb{C}$-модуля, абсолютная проективность эквивалентна абсолютной инъективности и эквивалентна выполнению условия стереотипной аппроксимации для X* (в силу теорем 9.14 и 9.16).

2^0. *Абсолютно свободный A-модуль M* над индексным множеством I определяется как стереотипный A-модуль с заданным отображением $\delta : I \to M$ таким, что для всякого стереотипного A-модуля X диаграмма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] & & X \\ & I \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd}$$

устанавливает биекцию между всевозможными отображениями $\eta : I \to X$ и морфизмами стереотипных A-модулей $\varphi : M \to X$. Можно убедиться, что, с точностью до изоморфизма (стереотипных A-модулей), существует только один абсолютно свободный A-модуль над данным индексным множеством I, а именно, прямая сумма $\operatorname{card} I$ экземпляров алгебры A:

$$A_I = \mathbb{C}_I \overset{\mathbb{C}}{\circledast} A,$$

Всякий такой модуль является (левым и правым) проективным (в абсолютном смысле) над A.

3^0. *Абсолютно косвободный A-модуль N* над индексным множеством I определяется как стереотипный A-модуль с заданным отображением $\varepsilon : N \to I$ таким, что для всякого стереотипного A-модуля X диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & X \arrow[ll, "\varphi"'] \arrow[dl, "\eta"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

устанавливает биекцию между всевозможными отображениями $\eta : X \to I$ и морфизмами стереотипных A-модулей $\varphi : X \to N$. С точностью до изоморфизма (стереотипных A-модулей), существует только один абсолютно косвободный A-модуль над данным индексным множеством I, а именно, прямое произведение $\operatorname{card} I$ экземпляров модуля $A^\star$:

$$(A^\star)^I = \mathbb{C}^I \overset{\mathbb{C}}{\odot} (A^\star),$$

Всякий такой модуль является (левым и правым) инъективным (в абсолютном смысле) над A.

Теорема 15.2. *Для всякого стереотипного модуля X над A найдется абсолютно свободный модуль A_I и эпиморфизм $\pi : A_I \to X$*

Доказательство. В качестве I можно взять X. □

Теорема 15.3. *Для всякого стереотипного модуля X над A найдется абсолютно косвободный модуль $(A^\star)^I$ и мономорфизм $\sigma : X \to (A^\star)^I$*

Доказательство. В качестве I можно взять X. □

(b) Аппроксимативная ретракция и аппроксимативная коретракция

Назовем морфизм стереотипных A-модулей $\pi : X \to Y$ *аппроксимативной ретракцией*, если существует направленность морфизмов $\rho_i : Y \to X$ такая, что

$$\pi \circ \rho_i \overset{Y \overset{A}{\oslash} Y}{\longrightarrow} 1_Y \qquad (i \to \infty)$$

Это равносильно тому, что морфизм

$$(\pi \oslash 1_Y) : (X \overset{A}{\oslash} Y) \to (Y \overset{A}{\oslash} Y)$$

является эпиморфизмом.

Из определения ясно, что

$$\pi - \textbf{ретракция} \Rightarrow \pi - \textbf{аппроксимативная ретракция} \Rightarrow \pi - \textbf{эпиморфизм}$$

Двойственным образом, морфизм $\sigma : X \to Y$ мы называем *аппроксимативной коретракцией*, если существует направленность морфизмов $\rho_i : Y \to X$ такая, что

$$\rho_i \circ \sigma \overset{X \overset{A}{\oslash} X}{\longrightarrow} 1_X \qquad (i \to \infty)$$

Это равносильно тому, что морфизм

$$(1_X \oslash \sigma) : (X \overset{A}{\oslash} Y) \to (X \overset{A}{\oslash} X)$$

является эпиморфизмом.

Понятно, что

$$\sigma - \textbf{коретракция} \Rightarrow \sigma - \textbf{аппроксимативная коретракция} \Rightarrow \sigma - \textbf{мономорфизм}$$

Теорема 15.4. *π – аппроксимативная ретракция $\Leftrightarrow$ $\sigma = \pi^\star$ – аппроксимативная коретракция.*

Теорема 15.5. *Модуль $P \in {}_A\mathfrak{Ste}$ абсолютно проективен $\Leftrightarrow$ существует аппроксимативная ретракция $\pi : A_I \to P$.*

Доказательство. 1. Если P – проективный, то, взяв канонический эпиморфизм $\pi : A_I \to P$ мы получим, что он должен быть аппроксимативной ретракцией, потому что из проективности P следует, что морфизм

$$(\pi \oslash 1_P) : (A_I \oslash P) \to (P \oslash P)$$

является эпиморфизмом.

2. Если наоборот, существует аппроксимативная ретракция $\pi : A_I \to P$ то, взяв произвольный эпиморфизм $\varphi : X \to Y$ мы получим, что для всякого $\alpha : P \to Y$ можно положить $\beta = \alpha \circ \pi$ и поскольку A_I является проективным, можно построить направленность $\gamma_i : A_I \to X$ такую, что

$$\varphi \circ \gamma_i \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \beta$$

Кроме того, поскольку π – аппроксимативная ретракция, можно построить направленность $\rho_j : P \to A_I$ такую, что

$$\pi \circ \rho_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 1_P$$

Тогда мы получим

$$\varphi \circ \gamma_i \circ \rho_j \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta \circ \rho_j = \alpha \circ \pi \circ \rho_J \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

и это будет означать, что P – проективный. Наглядно все это можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi"] & & Y \\
A_I \arrow[u, dashed, "\gamma_i\ (2)"] \arrow[urr, dashed, "\beta\ (1)"] \arrow[rr, "\pi"] & & P \arrow[u, "\alpha"'] \\
& P \arrow[ul, dashed, "\rho_j\ (1)"] \arrow[ur, "1_P"'] &
\end{tikzcd},$$

в которой пунктирные стрелки строятся после сплошных, а штрих-пунктирные – после пунктирных. $\square$

Двойственный результат:

Теорема 15.6. *Модуль Q абсолютно инъективен $\Leftrightarrow$ существует аппроксимативная коретракция $\sigma : Q \to (A^\star)^I$.*

(c) Инъективность и проективность для алгебр с отражением

Теорема 15.7. *Если $(A, @)$ – алгебра с отражением, то всякий модуль $M \in {}_A\mathfrak{Ste}$ обладающий A-аппроксимацией, является одновременно проективным и инъективным.*

Доказательство. Пусть $\varphi : X \to Y$ – эпиморфизм и $\beta : M \to Y$ – произвольный морфизм. Из свойства аппроксимации для M следует, что β приближается конечномерными A-морфизмами $\beta_i : M \to Y$:

$$\beta_i \underset{i\to\infty}{\overset{Y\oslash M}{\longrightarrow}} \beta, \qquad \beta_i \in \mathcal{F}_A(M, Y)$$

Из эпиморфности $\varphi : X \to Y$ следует, что каждый A-конечномерный морфизм $\beta_i : M \to Y$ можно приблизить A-конечномерными морфизмами вида $\varphi \circ \alpha_i^j$

$$\varphi \circ \alpha_i^j \underset{j\to\infty}{\overset{Y\oslash M}{\longrightarrow}} \beta_i \qquad \alpha_i^j \in \mathcal{F}_A(M, X)$$

Таким образом, каждый $\beta : M \to Y$ приближается морфизмами, пропускающимися через $\varphi : X \to Y$:

$$\varphi \circ \alpha_i^j \underset{j\to\infty}{\overset{Y\oslash M}{\longrightarrow}} \beta_i \underset{i\to\infty}{\overset{Y\oslash M}{\longrightarrow}} \beta$$

Значит $\varphi \oslash 1_M$ – эпиморфизм. Мы доказали проективность M Аналогично доказывается инъективность. $\square$

Теорема 15.8. *Если $(A, @)$ – алгебра с точным отражением, то для модуля $M \in {}_A\mathfrak{Ste}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) M обладает A-аппроксимацией;

(ii) M абсолюно проективен;

(iii) M абсолютно инъективен.

Доказательство. В силу теоремы 15.7, надо доказать импликации $(ii) \Rightarrow (i)$ и $(iii) \Rightarrow (i)$

Пусть M является проективным. Тогда по теореме 15.4 существует аппроксимативная ретракция $\pi : A_i \to P$. Из того, что отображение $@ : A^\star \to A$ является точным следует что A является A-аппроксимируемым модулем над A (пример 14.8). Значит, A_I – тоже обладает A-аппроксимацией, то есть существуют конечномерные над A морфизмы $\varphi^j : A_I \to A_I$, аппроксимирующие единицу:

$$\varphi^j \underset{j\to\infty}{\overset{\mathrm{End}_A(A_I)}{\longrightarrow}} 1_{A_I}$$

Тогда морфизмы

$$\psi_i^j = \pi \circ \varphi^j \circ \rho_i : M \to M$$

будут конечномерными и при этом

$$\psi_i^j = \pi \circ \varphi^j \circ \rho_i \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \pi \circ \rho_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 1_M$$

Таким образом, M обладает A-аппроксимацией. Мы доказали импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Аналогично доказывается $(iii) \Rightarrow (i)$. □

Теорема 15.9. *Если $(A, @)$ – алгебра с отражением, то условия $(i), (ii), (iii)$ теоремы 15.8 эквивалентны в том и только в том случае, если отражение $@ : A^\star \to A$ является точным.*

Доказательство. Здесь нужно доказать достаточность. Если условия $(i), (ii), (iii)$ эквивалентны, то сама алгебра A будучи проективным модулем (пример 3^0 § 15(a)) должна быть A-аппроксимируемым модулем в силу импликации $(ii) \Rightarrow (i)$. Значит в силу примера 14.8, отражение $@ : A^\star \to A$ должно быть точным. □

Следствие 15.10. *Пусть X – стереотипное пространство со свойством стереотипной аппроксимации. Тогда стереотипный модуль M над алгеброй операторов $\mathcal{L}(X)$ аппроксимируем над $\mathcal{L}(X) \Leftrightarrow M$ – абсолютно проективен над $\mathcal{L}(X) \Leftrightarrow M$ – абсолютно инъективен над $\mathcal{L}(X)$.*

(d) Абсолютная гомологическая размерность

Последовательность морфизмов в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ или $\mathfrak{Ste}_A$

$$... \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} X_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow ...$$

называется *точной (в абсолютном смысле)*, если

$$\forall i \qquad \operatorname{Im}\varphi_i = \operatorname{Ker}\varphi_{i+1}$$

Проективной резольвентой левого (правого) стереотипного A-модуля X (в абсолюном смысле) называется всякая точная цепочка A-морфизмов в ${}_A\mathfrak{Ste}$ (или $\mathfrak{Ste}_A$)

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\pi_0} P_0 \xleftarrow{\pi_1} P_1 \longleftarrow ...$$

в которой все модули P_i абсолютно проективны.

Если $\exists n \quad P_{n+1} = 0$, то резольвента называется *конечной*, а число

$$l = \min\{n : P_{n+1} = 0\}$$

– ее *длиной.* Длина самой короткой проективной резольвенты левого (правого) A-модуля X называется левой (правой) *проективной размерностью* модуля X над A и обозначается $\operatorname{dlp}_A X \quad (\operatorname{drp}_A X)$.

Двойственным образом, *инъективной резольвентой* левого (правого) стереотипного A-модуля X (в абсолюном смысле) называется всякая точная цепочка A-морфизмов в ${}_A\mathfrak{Ste}$ (или $\mathfrak{Ste}_A$)

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\sigma_0} Q_0 \xrightarrow{\sigma_1} Q_1 \longrightarrow ...$$

в которой все модули Q_i абсолютно инъективны.

Если $\exists n \quad Q_{n+1} = 0$, то резольвента называется *конечной*, а число

$$l = \min\{n : Q_{n+1} = 0\}$$

– ее *длиной.* Длина самой короткой инъективной резольвенты левого (правого) A -модуля X называется левой (правой) *инъективной размерностью* модуля X над A и обозначается $\operatorname{dli}_A X \quad (\operatorname{dri}_A X)$.

В силу принципа двойственности, величины $\operatorname{dlp}_A X, \quad \operatorname{drp}_A X, \quad \operatorname{dli}_A X, \quad \operatorname{dri}_A X$ связаны между собой равенствами

$$\operatorname{dlp}_A X = \operatorname{dri}_A X^\star, \qquad \operatorname{dli}_A X = \operatorname{drp}_A X^\star \tag{15.1}$$

Из теоремы 15.2 следует

Теорема 15.11. *Всякий стереотипный модуль X над произвольной стереотипной алгеброй A обладает инъективной и проективной резольвентами (в абсолютном смысле).*

Левой (правой) *проективной размерностью стереотипной алгебры* A называется величина

$$\mathrm{dlp}(A) = \sup\{\mathrm{dlp}_A X, X \in {}_A\mathfrak{Ste}\} \qquad (\mathrm{drp}(A) = \sup\{\mathrm{drp}_A X, X \in \mathfrak{Ste}_A\})$$

Аналогично, левой (правой) *инъективной размерностью стереотипной алгебры* A называется величина

$$\mathrm{dli}(A) = \sup\{\mathrm{dli}_A X, X \in {}_A\mathfrak{Ste}\} \qquad (\mathrm{dri}(A) = \sup\{\mathrm{dri}_A X, X \in \mathfrak{Ste}_A\})$$

Из формул (15.1) следуют соотношения

$$\mathrm{dlp}(A) = \mathrm{dri}(A) \qquad \mathrm{drp}(A) = \mathrm{dli}(A) \tag{15.2}$$

Величина

$$\mathrm{dh}(A) = \max\{\mathrm{dlp}(A), \mathrm{drp}(A)\} = \max\{\mathrm{dli}(A), \mathrm{dri}(A)\}$$

называется (абсолютной) *гомологической размерностью стереотипной алгебры* A.

(e) Примеры абсолютных гомологических размерностей

Здесь мы приводим самые первые результаты по вычислению абсолютных гомологических размерностей. Мы рассматриваем вопрос о том, когда размерность равна нулю, не обсуждая случай более высоких размерностей.

1^0. *Абсолютная гомологическая размерность поля* $\mathbb{C}$ *равна нулю*:

$$\mathrm{dh}\, \mathbb{C} = 0$$

2^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры операторов* $\mathcal{L}(X) = X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} X$ *равна нулю*

$$\mathrm{dh}\, \mathcal{L}(X) = 0$$

тогда и только тогда, когда стереотипное пространство X *обладает стереотипной аппроксимацией.*

3^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры* $\mathcal{C}(M)$ *непрерывных функций на локально-компактном пространстве* M*, разложимом в прямую сумму* $M = \coprod_{i\in I} M_i$ *некоторого семейства* σ*-компактных пространств равна нулю*

$$\mathrm{dh}\, \mathcal{C}(M) = 0$$

тогда и только тогда, когда топологическое пространство M *является дискретным.*

4^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры* $\mathcal{E}(M)$ *гладких функций на гладком многообразии* M *равна нулю*

$$\mathrm{dh}\, \mathcal{E}(M) = 0$$

тогда и только тогда, когда многообразие M *нульмерно.*

5^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры* $\mathcal{O}(M)$ *голоморфных функций на многообразии Штейна* M *равна нулю*

$$\mathrm{dh}\, \mathcal{O}(M) = 0$$

тогда и только тогда, когда многообразие M *нульмерно.*

6^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры* $\mathcal{R}(M)$ *регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии* M *равна нулю*

$$\mathrm{dh}\, \mathcal{R}(M) = 0$$

тогда и только тогда, когда многообразие M *нульмерно.*

7^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры мер Радона* $\mathcal{C}^\star(G)$ *на локально компактной группе* G*, равна нулю*

$$\mathrm{dh}\, \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

тогда и только тогда, когда группа G *компактна.*

8^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры распределений $\mathcal{E}^\star(G)$ на группе Ли G, равна нулю*

$$\mathrm{dh}\,\mathcal{E}^\star(G) = 0$$

тогда и только тогда, когда группа G компактна.

9^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры голоморфных потоков $\mathcal{O}^\star(G)$ на группе Штейна G равна нулю*

$$\mathrm{dh}\,\mathcal{O}^\star(G) = 0$$

тогда и только тогда, когда группа G редуктивна (то есть, является комплексификацией некоторой компактной вещественной группы Ли).

10^0. *Абсолютная гомологическая размерность алгебры регулярных потоков $\mathcal{R}^\star(G)$ на аффинной алгебраической группе G равна нулю*

$$\mathrm{dh}\,\mathcal{R}^\star(G) = 0$$

тогда и только тогда, когда группа G редуктивна (то есть, является комплексификацией некоторой компактной вещественной группы Ли).

Замечание 15.12. Из-за неабелевости категорий ${}_A\mathfrak{Ste}$ и $\mathfrak{Ste}_A$, в стереотипной теории равенство нулю абсолютной гомологической размерности не означает, что все модули должны непременно быть проективными (или инъективными). Это условие гарантирует существование проективной и инъективной резольвенты нулевой длины для произвольного модуля X,

$$0 \leftarrow X \leftarrow P \leftarrow 0, \qquad 0 \to X \to Q \to 0,$$

что в данном случае следует понимать лишь как существование биморфизмов (но необязательно, изоморфизмов) $\pi : P \to X$ и $\sigma : X \to Q$. Впрочем, если X – конечномерное пространство над $\mathbb{C}$, то биморфизмы $\pi : P \to X$ и $\sigma : X \to Q$ обязаны быть изоморфизмами, и поэтому X будет проективным и инъективным модулем.

Ниже в этом параграфе мы доказываем примеры $1^0 - 3^0$.

Абсолютная гомологическая размерность поля $\mathbb{C}$.

Доказательство. Первый из перечисленных примеров очевиден, потому что всякое стереотипное пространство X обладает проективной и инъективной резольвентами нулевой длины:

$$0 \leftarrow X \leftarrow \mathbb{C}_I \leftarrow 0 \qquad 0 \to X \to \mathbb{C}^I \to 0 \tag{15.3}$$

□

Абсолютная гомологическая размерность алгебры $\mathcal{L}(X)$. Доказательство примера 2^0 § 15(e) мы разобьем на четыре леммы.

Лемма 15.13. *Пусть стереотипный левый $\mathcal{L}(X)$-модуль P устроен так, что действие конечномерных операторов $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ на P тривиально:*

$$\forall p \in P \quad \forall \alpha \in \mathcal{F}(X) \quad \alpha \cdot p = 0 \tag{15.4}$$

Тогда существует только один морфизм стереотипных левых $\mathcal{L}(X)$-модулей

$$\Phi : P \to \mathcal{L}(X)$$

а именно, $\Phi = 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $p \in P$ и $\varphi = \Phi(p) \in \mathcal{L}(X)$. Тогда $\forall \alpha \in \mathcal{F}(X) \quad \alpha \cdot \varphi = \alpha \cdot \Phi(p) = \Phi(\alpha \cdot p) = \Phi(0) = 0$. Это верно для всякого $\alpha \in \mathcal{F}(X)$, поэтому $\varphi = 0$. Таким образом, $\forall p \in P \quad \Phi(p) = 0$. □

Лемма 15.14. *Если $\mathrm{dh}\,\mathcal{L}(X) = 0$, то X обладает стереотипной аппроксимацией.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{dh}\mathcal{L}(X) = 0$. Тогда для модуля

$$\mathcal{H}(X) = (\mathcal{L}(X)/\mathcal{G}(X))^{\triangledown}$$

должна существовать проективная резольвента нулевой длины

$$0 \leftarrow \mathcal{H}(X) \leftarrow P \leftarrow 0$$

То есть должен существовать абсолютно проективный модуль P и биморфизм стереотипных $\mathcal{L}(X)$-модулей $\Psi : P \to \mathcal{H}(X)$.

Из того, что $\Psi : P \to \mathcal{H}(X)$ – биморфизм следует, что P обладает свойством (15.4) (поскольку этим свойством обладает $\mathcal{H}(X)$).

С другой стороны, поскольку P – абсолютно проективный объект, рассмотрев диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}(X) \arrow[rr, "\Pi"] & & \mathcal{H}(X) \\ & P \arrow[ul, dashed, "?"] \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd},$$

в которой Π – естественный эпиморфизм, мы получим, что существует направленность $\mathcal{L}(X)$-морфизмов $\Phi_\nu : P \to \mathcal{L}(X)$ такая, что

$$\Pi \circ \Phi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} \Psi$$

Но из условия (15.4), в силу леммы 15.13, следует, что $\Phi_\nu = 0$, и поэтому

$$\Psi = \lim_{\nu\to\infty} \Pi \circ \Phi_\nu = 0$$

Итак, морфизм $\Psi : P \to \mathcal{H}(X)$ с одной стороны, равен нулю, а с другой стороны, является биморфизмом. Это означает, что $P = \mathcal{H}(X) = 0$, то есть $\mathcal{L}(X) = \mathcal{G}(X)$, или, иными словами, X обладает стереотипной аппроксимацией. □

Лемма 15.15. *Если X обладает стереотипной аппроксимацией, то для всякого стереотипного $\mathcal{L}(X)$-модуля M найдется множество индексов J и биморфизм $\mathcal{L}(X)$-модулей $\omega : \mathbb{C}_J \circledast X \to M$.*

Доказательство. Пусть X обладает стереотипной аппроксимацией, и M – стереотипный левый $\mathcal{L}(X)$-модуль. По теореме 15.2, существует $\mathcal{L}(X)$-эпиморфизм

$$\pi : \mathcal{L}(X)_I \to M$$

В силу примера 14.2, преобразование Гротендика

$$@ : X^\star \circledast X = \mathcal{L}^\star(X) \to \mathcal{L}(X) = X^\star \odot X$$

должно быть морфизмом левых (и правых) $\mathcal{L}(X)$-модулей, причем, поскольку X обладает аппроксимацией, @ является эпиморфизмом. Значит, по теореме 9.13 (b), отображение

$$(1_{\mathbb{C}_I} \circledast @) : \mathbb{C}_I \circledast X^\star \circledast X \to \mathbb{C}_I \circledast \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X)_I$$

также должно быть эпиморфизмом. Следовательно, отображение

$$\sigma = \pi \circ (1_{\mathbb{C}_I} \circledast @) : \mathbb{C}_I \circledast X^\star \circledast X \to \mathcal{L}(X)_I \to M$$

является эпиморфизмом, как композиция эпиморфизмов. Обозначив $Y = \mathbb{C}_I \circledast X^\star$ мы получим эпиморфизм

$$\sigma : Y \circledast X \to M$$

Заметим теперь, что *левое* действие $\mathcal{L}(X)$ на модуле $Y \circledast X$ задается формулой

$$\alpha \cdot (y \circledast x) = y \circledast \alpha(x) \tag{15.5}$$

Действительно, поскольку на $X^\star \odot X = \mathcal{L}(X)$ действие $\mathcal{L}(X)$ задается формулой

$$\alpha \cdot (f \odot x) = f \odot \alpha(x)$$

из мономорфности @ следует

$$\alpha \cdot (f \circledast x) = f \circledast \alpha(x)$$

После этого действие $\mathcal{L}(X)$ на $Y = \mathbb{C}_I \circledast X^\star$ переносится по формуле

$$\alpha \cdot (c \circledast f \circledast x) = c \circledast f \circledast \alpha(x)$$

а это уже равносильно (15.5).

Применим теперь пункт (ii) теоремы 12.31. Кообраз $\operatorname{Coim}\sigma$ морфизма σ, как непосредственный фактор-модуль для $Y \circledast X$ имеет вид

$$\operatorname{Coim}\sigma = E \circledast X$$

где E – непосредственное фактор-пространство для Y. Поскольку σ – эпиморфизм, $\operatorname{im}\sigma$ должен быть биморфизмом, и значит определен биморфизм

$$\tau = \operatorname{im}\sigma \circ \operatorname{red}\sigma : E \circledast X \to M$$

Теперь рассмотрим $\mathbb{C}$-биморфизм $\rho : \mathbb{C}_J \to E$ (из (15.3)). По теореме 9.13 (b), отображение $\rho \circledast 1_X$: $\mathbb{C}_J \circledast X \to E \circledast X$ должно быть биморфизмом над $\mathbb{C}$ и значит над $\mathcal{L}(X)$. Следовательно, композиция $\omega = \tau \circ (\rho \circledast 1_X) : \mathbb{C}_J \circledast X \to E \circledast X \to M$ тоже будет биморфизмом. □

Лемма 15.16. *Если X обладает стереотипной аппроксимацией, то* $\operatorname{dh}\mathcal{L}(X) = 0$.

Доказательство. Возьмем произвольный стереотипный левый $\mathcal{L}(X)$-модуль M. По лемме 15.15, найдется множество индексов J и биморфизм $\mathcal{L}(X)$-модулей $\omega : \mathbb{C}_J \circledast X \to M$.

Заметим, что $\mathbb{C}_J \circledast X$ – проективный $\mathcal{L}(X)$-модуль. Действительно, в силу примера 14.9, X обладает $\mathcal{L}(X)$-аппроксимацией. Значит по теореме 14.15 $\mathbb{C}_J \circledast X$ тоже обладает $\mathcal{L}(X)$-аппроксимацией. Отсюда, в силу теоремы 15.7, $\mathbb{C}_J \circledast X$ является проективным.

Итак, имеется биморфизм $\omega : P \to M$, где $P = \mathbb{C}_J \circledast X$ – проективный $\mathcal{L}(X)$-модуль. Это означает, что имеется проективная резольвента нулевой длины

$$0 \leftarrow M \leftarrow P \leftarrow 0$$

Поскольку это верно для любого стереотипного левого $\mathcal{L}(X)$-модуля M, мы получаем

$$\operatorname{dlp}(A) = 0$$

Аналогично, если рассмотреть противоположную алгебру $A^{\mathrm{op}} = \mathcal{L}(X^\star)$, то мы получим, что всякий левый модуль над A^{op} имеет проективную резольвенту нулевой длины. Для исходной алгебры $A = \mathcal{L}(X)$ это будет означать, что всякий правый модуль M над A имеет проективную резольвенту нулевой длины. Значит

$$\operatorname{drp}(A) = 0$$

Отсюда

$$\operatorname{dh}(A) = \max\{\operatorname{dlp}(A), \operatorname{drp}(A)\} = 0$$

□

Абсолютная гомологическая размерность функциональных алгебр. Примеры 3^0 – 6^0 § 15(e) доказываются одинаково. Мы покажем, как это делается для 3^0, и доказательство мы разобьем на две леммы.

Лемма 15.17. *Если M – дискретное топологическое пространство, то* $\operatorname{dh}\mathcal{C}(M) = 0$.

Доказательство. Заметим вначале, что каждый стереотипный $\mathcal{C}(M)$-модуль X имеет вид прямого произведения

$$X = \prod_{t \in M} X_t$$

где $\{X_t; t \in M\}$ – семейство стереотипных пространств, а умножение на $u \in \mathcal{C}(M)$ определяется равенством $(u \cdot x)_t = u(t) \cdot x_t, \quad (u(t) \in \mathbb{C}, x_t \in X_t)$. Это действительно так, потому что пространства X_t можно определить равенством $X_t = \{u \cdot x; x \in X, u \in \mathcal{C}(M) : \operatorname{supp} u \subseteq \{t\}\}$.

Тогда для каждого X_t можно будет подобрать биморфизм $\mu_t : \mathbb{C}_{I_t} \to X_t$, и произведение

$$\mu = \prod_{t \in M} \mu_t : \prod_{t \in M} \mathbb{C}_{I_t} \to \prod_{t \in M} X_t = X$$

получится биморфизмом. Поскольку модуль $\prod_{t\in M}\mathbb{C}_{I_t}$ очевидно будет проективным, мы получаем проективную резольвенту нулевой длины:

$$0 \leftarrow X \leftarrow \prod_{t\in M}\mathbb{C}_{I_t} \leftarrow 0$$

□

Лемма 15.18. *Если* $\operatorname{dh}\mathcal{C}(M)=0$*, то* M *– дискретное топологическое пространство.*

Доказательство. Зафиксируем точку $a\in M$ и наделим поле $\mathbb{C}$ структурой $\mathcal{C}(M)$-модуля по формуле

$$\forall u\in\mathcal{C}(M)\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}\quad u\cdot\lambda=u(a)\cdot\lambda$$

Пусть $\mathbb{C}_a$ обозначает поле $\mathbb{C}$ с такой структурой $\mathcal{C}(M)$-модуля. Если $\operatorname{dh}\mathcal{C}(M)=0$, то всякий конечномерный $\mathcal{C}(M)$-модуль будет проективен (в силу Замечания 15.12). В частности, модуль $\mathbb{C}_a$ тоже проективен. Значит, мы можем рассмотреть диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(M) \arrow[rr, "\delta_a"] & & \mathbb{C}_a \\ & \mathbb{C}_a \arrow[ul, dashed, "?"] \arrow[ur, "\operatorname{id}_{\mathbb{C}_a}"'] & \end{tikzcd}, \tag{15.6}$$

(в которой $\delta_a(u)=u(a)$), из которой можно будет заключить, что существует направленность $\mathcal{C}(M)$-морфизмов $\mu_i:\mathbb{C}_a\to\mathcal{C}(M)$ такая, что

$$\delta_a\circ\mu_i\longrightarrow\operatorname{id}_{\mathbb{C}_a}\quad(i\to\infty)$$

Взяв какое-нибудь $\mu_i\neq0$, мы получим ненулевой морфизм $\mu_i:\mathbb{C}_a\to\mathcal{C}(M)$. При этом, как легко заметить, числа $\lambda\neq0$ при таком отображении будут превращаться в функции $\mu_i(\lambda)\neq0$ с носителями в точке a:

$$\operatorname{supp}\mu_i(\lambda)\subseteq\{a\}$$

Это возможно только если a – изолированная точка в M. Мы показали, что любая точка $a\in M$ изолирована в M, то есть M – дискретное пространство. □

Абсолютная гомологическая размерность групповых алгебр. Примеры 7^0-10^0 § 15(e) доказываются одинаково. Мы покажем, как это делается для 7^0, разбив доказательство на несколько лемм.

Пусть $\Sigma(G)$ обозначает *двойственный объект к компактной группе* G, то есть полную систему неприводимых непрерывных представлений $\sigma:G\to\mathcal{L}(X)\quad(\dim X<\infty)$ [48].

Лемма 15.19. *Пусть* G *– компактная группа, и для всякого* $\sigma\in\Sigma(G)$ *пусть* M_σ *– произвольный стереотипный модуль над* $\mathcal{L}(X_\sigma)$*. Тогда прямая сумма* $M=\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)}M_\sigma$ *является стереотипным модулем над алгеброй* $\mathcal{C}^\star(G)$ *относительно операции*

$$\alpha\left(\sum_{\sigma\in\Sigma(G)}m_\sigma\right)=\sum_{\sigma\in\Sigma(G)}\overline{\sigma}(\alpha)m_\sigma \tag{15.7}$$

где $\overline{\sigma}:\mathcal{C}^\star(G)\to\mathcal{L}(X)$ *– морфизм стереотипных алгебр, соответствующий представлению* $\sigma:G\to\mathcal{L}(X)$ *по теореме 10.12.*

При этом, если каждый модуль M_σ *обладает стереотипной аппроксимацией над* $(\mathcal{L}(X_\sigma),@_{X_\sigma})$*, то* $M=\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)}M_\sigma$ *обладает стереотипной аппроксимацией над* $(\mathcal{C}^\star(G),@_G)$ *(где* $@_G$ *есть нормальное отражение в* $\mathcal{C}^\star(G)$*, определенное формулой* (14.7)*).*

Доказательство. Морфизм алгебр $\overline{\sigma}:\mathcal{C}^\star(G)\to\mathcal{L}(X_\sigma)$ определяет структуру стереотипного $\mathcal{C}^\star(G)$-модуля на каждом пространстве M_σ. Поэтому прямая сумма $M=\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)}M_\sigma$ является стереотипным $\mathcal{C}^\star(G)$-модулем, по теореме 11.16. Остальное доказывается также, как в теореме 9.12. □

Лемма 15.20. *Если* G *– компактная группа, то для всякого стереотипного* $\mathcal{C}^\star(G)$*-модуля* N *существует стереотипный* $\mathcal{C}^\star(G)$*-модуль* M *вида* $M=\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)}M_\sigma$ *(где* M_σ *– стереотипные модули над* $\mathcal{L}(X_\sigma)$*) и биморфизм стереотипных* $\mathcal{C}^\star(G)$*-модулей* $\rho:M\to N$*.*

Доказательство. Обозначим

$$A := \mathcal{C}^\star(G), \quad A_\sigma := \{\alpha \in \mathcal{C}^\star(G) \ : \ \forall \pi \in \Sigma(G)\ \pi \neq \sigma \Rightarrow \alpha_\sigma = 0\}, \quad M_\sigma := A_\sigma \cdot N$$

Тогда $\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} A_\sigma$ будет плотно в A, поэтому $\exists \alpha_\nu \in \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} A_\sigma \ : \ \alpha_\nu \xrightarrow{A} 1_A \ (\nu \to \infty)$. Значит, $\forall n \in N\ \exists m_\nu; = \alpha_\nu \cdot n \in \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} M_\sigma \ : \ m_\nu \xrightarrow{N} n \ (\nu \to \infty)$.

Следовательно, $\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} M_\sigma$ плотно в N, а это, как раз, нам и нужно было проверить. □

Лемма 15.21. *Если G – компактная группа, то* $\operatorname{dh} \mathcal{C}^\star(G) = 0$.

Доказательство. Берем произвольный левый стереотипный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль N. Для него по лемме 15.20 существует биморфизм стереотипных $\mathcal{C}^\star(G)$-модулей $\rho : M \to N$, где M – стереотипный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль вида $M = \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} M_\sigma$, а M_σ – стереотипные модули над $\mathcal{L}(X_\sigma)$.

Для каждого $\mathcal{L}(X_\sigma)$-модуля M_σ можно по лемме 15.15 подобрать биморфизм $\mathcal{L}(X_\sigma)$-модулей $\omega_\sigma : \mathbb{C}_{J_\sigma} \circledast X_\sigma \to M_\sigma$. Тогда прямая сумма $\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \omega_\sigma : \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \mathbb{C}_{J_\sigma} \circledast X_\sigma \to \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} M_\sigma$ тоже будет биморфизмом, а значит, и композиция $\rho \circ \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \omega_\sigma : \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \mathbb{C}_{J_\sigma} \circledast X_\sigma \to \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} M_\sigma \to N$ тоже будет биморфизмом.

Теперь нужно заметить, что по теореме 14.16 $C_{J_\sigma} \circledast X_\sigma$ обладает аппроксимацией над $\mathcal{L}(X_\sigma)$, значит по лемме **??** $\oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \mathbb{C}_{J_\sigma} \circledast X_\sigma$ обладает аппроксимацией над $\mathcal{C}^\star(G)$. Поэтому по теореме 15.8 $P = \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \mathbb{C}_{J_\sigma} \circledast X_\sigma$ есть абсолютно проективный модуль над $\mathcal{C}^\star(G)$.

Таким образом, для произвольного стереотипного левого $\mathcal{C}^\star(G)$-модуля N мы построили биморфизм $\beta : P \to N$, в котором $P = \oplus_{\sigma\in\Sigma(G)} \mathbb{C}_{J_\sigma} \circledast X_\sigma$ – некоторый абсолютно проективный модуль над $\mathcal{C}^\star(G)$. Это означает, что

$$\operatorname{dlp} \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

Рассмотрев противоположную группу G^{op}, мы получим $\operatorname{dlp} \mathcal{C}^\star(G^{\mathrm{op}}) = 0$, и это будет означать, что

$$\operatorname{drp} \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

Вместе то и другое дает

$$\operatorname{dh} \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

□

Лемма 15.22. *Если* $\operatorname{dh} \mathcal{C}^\star(G) = 0$*, то группа G компактна.*

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$e : \mathcal{C}^\star(G) \to \mathbb{C} \quad | \quad e(\alpha) = \alpha(1_{\mathcal{C}^\star(G)})$$

Нетрудно проверить, что он будет морфизмом стереотипных алгебр. Поэтому поле $\mathbb{C}$ можно наделить структурой стереотипного $\mathcal{C}^\star(G)$-модуля по формуле

$$\forall \alpha \in \mathcal{C}^\star(G) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \alpha * \lambda = e(\alpha) \cdot \lambda = \alpha(1) \cdot \lambda$$

Такое действие алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ на $\mathbb{C}$ эквивалентно тривиальной структуре G-модуля на $\mathbb{C}$:

$$\forall g \in G \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad g * \lambda = \lambda$$

Предположим теперь, что

$$\operatorname{dh} \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

Тогда $\mathbb{C}$, как любой другой стереотипный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль должен иметь инъективную резольвенту нулевой длины. Другими словами, существует $\mathcal{C}^\star(G)$-биморфизм в некоторый абсолютно инъективный модуль $\beta : \mathbb{C} \to Q$. Поскольку $\mathbb{C}$ – конечномерное пространство, β должен быть изоморфизмом, и значит, $\mathbb{C}$ есть абсолютно инъективный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль.

Рассмотрим теперь морфизм стереотипных $\mathcal{C}^\star(G)$-модулей

$$\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathcal{C}^\star(G) \quad | \quad \varepsilon(\lambda) = \lambda \cdot 1_{\mathcal{C}^\star(G)}$$

и нарисуем следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}}"'] & & \mathcal{C}(G) \arrow[dl, dashed, "?"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd} \qquad . \tag{15.8}$$

Поскольку $\mathbb{C}$ есть абсолютно инъективный модуль, существует направленность $\mathcal{C}^\star(G)$-морфизмов $M_i : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$ такая, что
$$M_i \circ \varepsilon \longrightarrow \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \qquad (i \to \infty)$$
Возьмем какой-нибудь морфизм $M_i \neq 0$, тогда $M_i : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$ будет ненулевым непрерывным инвариантным средним на $\mathcal{C}(G)$, потому что
$$\forall g \in G \quad \forall u \in \mathcal{C}(G) \quad M_i(g * u) = g * M_i(u) = M_i(u)$$
Это означает, что G должно быть компактной группой. □

§ 16 Относительная теория гомологий

Пусть A и B – стереотипные алгебры, причем B является подалгеброй в A с представляющим мономорфизмом $\iota : B \to A$. В этом параграфе мы покажем, как строится теория гомологий алгебры A относительно подалгебры B.

(a) Относительно свободные и косвободные модули

Левым косвободным модулем алгебры A относительно подалгебры B над базой $E \in {}_B\mathfrak{Ste}$ называется модуль
$$A^\star \overset{B}{\odot} E = E \overset{B}{\oslash} A$$
с операцией умножения
$$(c \cdot \varphi)(a) = \varphi(a \cdot c), \qquad a, c \in A \tag{16.1}$$
(по теореме 12.4(a) это будет стереотипный A-модуль).

Аналогично, *правым косвободным модулем* алгебры A относительно подалгебры B над базой $E \in \mathfrak{Ste}_B$ называется модуль
$$E \overset{B}{\odot} A^\star = A^\star \overset{B}{\oslash} E^\star = E \overset{B}{\oslash} A$$
с операцией умножения
$$(\varphi \cdot c)(a) = \varphi(c \cdot a), \qquad a, c \in A \tag{16.2}$$
(и по теореме 12.4(b) это будет стереотипный A-модуль).

Двойственным образом, *левым свободным модулем* алгебры A относительно подалгебры B над базой $E \in {}_B\mathfrak{Ste}$ называется модуль
$$A \overset{B}{\circledast} E = (A^\star \overset{B}{\oslash} E)^\star$$
с операцией умножения
$$c \cdot (a \circledast e) = (c \cdot a) \circledast e \tag{16.3}$$
(это будет стереотипный A-модуль по теореме 12.11(d)).

И аналогично, *правым свободным модулем* алгебры A относительно подалгебры B над базой $E \in \mathfrak{Ste}_B$ называется модуль
$$E \overset{B}{\circledast} A = (E^\star \overset{B}{\oslash} A)^\star$$
с операцией умножения
$$(e \circledast a) \cdot c = e \circledast (a \cdot c) \tag{16.4}$$
(и это будет стереотипный A-модуль по теореме 12.11(c)).

Предложение 16.1. *Под действием сопряжения свободные модули переходят в косвободные:*
$$(A^\star \overset{B}{\odot} E)^\star = E^\star \overset{B}{\circledast} A \qquad (A \overset{B}{\circledast} E)^\star = E^\star \overset{B}{\odot} A^\star$$

Теорема 16.2 (критерий относительной косвободы). *Для стереотипных модулей $Q \in {}_A\mathfrak{Ste}$ и $E \in {}_B\mathfrak{Ste}$ следующие условия эквивалентны*

(i) $Q \overset{A}{\cong} A^\star \overset{B}{\odot} E$*;*

(ii) существует B-морфизм $\pi : Q \to E$ такой, что для всякого стереотипного A-модуля X и любого B-морфизма $\chi : X \to E$ найдется единственный A-морфизм $\widetilde{\chi} : X \to Q$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} \forall\, X \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\chi^A"] \arrow[dr, "\forall\,\chi^B"'] & & Q \arrow[dl, "\pi^B"] \\ & E & \end{tikzcd} \tag{16.5}$$

(индексы A и B у морфизмов означают принадлежность к категориям ${}_A\mathfrak{Ste}$ и ${}_B\mathfrak{Ste}$).

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $Q = A^\star \overset{B}{\odot} E = E \overset{B}{\oslash} A$ и $\pi : (E \overset{B}{\oslash} A) \to E$ действует по формуле

$$\pi(\varphi) = \varphi(1_A)$$

Для произвольного B-морфизма $\chi : X \to E$ положим

$$\widetilde{\chi}(x)(a) = \chi(a \cdot x), \qquad a \in A, x \in X$$

Мы получили (очевидно, непрерывное) отображение $\widetilde{\chi}(x) : A \to E$. Покажем что оно является B-морфизмом

$$\widetilde{\chi}(x)(b \cdot a) = b \cdot \widetilde{\chi}(x)(a), \qquad b \in B$$

Действительно, $\widetilde{\chi}(x)(b \cdot a) = \chi(b \cdot a \cdot x) = (\chi \in E \overset{B}{\oslash} X) = b \cdot \chi(a \cdot x) = b \cdot \widetilde{\chi}(x)(a)$.

Итак, определено отображение $\widetilde{\chi} : X \to E \overset{B}{\oslash} A$. Покажем, что оно является A-морфизмом:

$$\widetilde{\chi}(a \cdot x) = a \cdot \widetilde{\chi}(x)$$

Действительно, $\widetilde{\chi}(a \cdot x)(c) = \chi(c \cdot a \cdot x) = \widetilde{\chi}(x)(c \cdot a) = (16.1) = [a \cdot \widetilde{\chi}(x)](c)$.

Проверим теперь коммутативность диаграммы (16.5):

$$(\pi \circ \widetilde{\chi})(x) = \pi(\widetilde{\chi}(x)) = \widetilde{\chi}(x)(1_A) = \chi(1_A \cdot x) = \chi(x)$$

Непрерывность $\widetilde{\chi}$ очевидна, остается проверить единственность такого морфизма. Пусть $\alpha : X \to Q = (E \overset{B}{\oslash} A)$ – какой-нибудь еще A-морфизм со свойством

$$\pi \circ \alpha = \chi$$

Тогда

$$\alpha(x)(1_A) = \pi(\alpha(x)) = (\pi \circ \alpha)(x) = \chi(x) = \widetilde{\chi}(x)(1_A)$$

Поэтому $\forall a \in A$ $\alpha(x)(a) = (16.1) = [a \cdot \alpha(x)](1_A) = (\alpha \in Q \overset{A}{\oslash} X) = \alpha(a \cdot x)(1_A) = \widetilde{\chi}(a \cdot x)(1_A) = (\widetilde{\chi} \in Q \overset{A}{\oslash} X) = [a \cdot \widetilde{\chi}(x)](1_A) = \widetilde{\chi}(x)(a)$. То есть $\alpha = \widetilde{\chi}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть выполнено условие (ii), тогда, взяв $X = E \overset{B}{\oslash} A$ и $\chi : (E \overset{B}{\oslash} A) \to E, \chi(\varphi) = \varphi(1_A)$, мы получим, что существуют два однозначно определенных морфизма α и β, замыкающие диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \underset{B}{\oslash} A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\chi"'] & & Q \arrow[dl, "\pi"] \\ & E & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} E \underset{B}{\oslash} A \arrow[dr, "\chi"'] & & Q \arrow[ll, "\beta"'] \arrow[dl, "\pi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

(существование β обеспечивается доказанной импликацией $(i) \Rightarrow (ii)$). Для композиций $\alpha \circ \beta$ и $\beta \circ \alpha$ мы получим диаграммы

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[rr, dashed, "\alpha\circ\beta"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Q \arrow[dl, "\pi"] \\ & E & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} E \underset{B}{\oslash} A \arrow[dr, "\chi"'] & & E \underset{B}{\oslash} A \arrow[ll, dashed, "\beta\circ\alpha"'] \arrow[dl, "\chi"] \\ & E & \end{tikzcd} .$$

Поскольку пунктирные стрелки в них должны быть единственны, получаем

$$\alpha \circ \beta = 1_Q, \qquad \beta \circ \alpha = 1_{E \overset{B}{\oslash} A}$$

$\square$

Из теоремы 16.2 и предложения 16.1 следует

Теорема 16.3. *Для стереотипных модулей $P \in {}_A\mathfrak{Ste}$ и $E \in {}_B\mathfrak{Ste}$ следующие условия эквивалентны:*

(i) $P \overset{A}{\cong} A \overset{B}{\circledast} E$;

(ii) существует B-морфизм $\sigma : E \to P$ такой, что для всякого стереотипного A-модуля X и любого B-морфизма $\chi : E \to X$ найдется единственный A-морфизм $\widetilde{\chi} : P \to X$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, dashed, "\exists!\,\chi^A"] & & \forall\, X \\ & E \arrow[ul, "\sigma^B"] \arrow[ur, "\forall\,\chi^B"'] & \end{tikzcd}$$

(индексы A и B у морфизмов означают принадлежность к категориям ${}_A\mathfrak{Ste}$ и ${}_B\mathfrak{Ste}$).

(b) Относительная проективность и инъективность

Назовем морфизм стереотипных A-модулей $\varphi : X \to Y$ *расщепимым относительно* B если выполняются следующие три условия (см. диаграмму (4.14)):

(i) $\operatorname{red}\varphi$ является изоморфизмом в категории ${}_B\mathfrak{Ste}$;

(ii) $\operatorname{coim}\varphi$ является ретракцией в категории ${}_B\mathfrak{Ste}$;

(iii) $\operatorname{im}\varphi$ является коретракцией в категории ${}_B\mathfrak{Ste}$.

Предложение 16.4. *Если $\varphi : X \to Y$ – расщепимый относительно B морфизм стереотипных A-модулей, то*

(i) φ является B-эпиморфизмом $\Leftrightarrow$ φ является B -ретракцией

(i) φ является B-мономорфизмом $\Leftrightarrow$ φ является B-коретракцией.

Пример 16.5. Всякий стереотипный левый A-модуль X вкладывается в косвободный модуль $A^\star \overset{B}{\odot} X$ с помощью A-мономорфизма, расщепимого относительно B

$$\sigma : X \to A^\star \overset{B}{\odot} X = X \overset{B}{\oslash} A \qquad \sigma(x)(a) = a \cdot x$$

Пример 16.6. Аналогично, всякий стереотипный правый A-модуль X вкладывается в косвободный модуль $X \overset{B}{\odot} A^\star$ с помощью A-мономорфизма, расщепимого относительно B

$$\sigma : X \to X \overset{B}{\odot} A^\star = X \overset{B}{\oslash} A \qquad \sigma(x)(a) = x \cdot a$$

Пример 16.7. Всякий стереотипный левый A-модуль X является образом свободного модуля $A \overset{B}{\circledast} X$ при A-эпиморфизме, расщепимом относительно B

$$\pi : A \overset{B}{\circledast} X \to X, \qquad \pi(a \circledast x) = a \cdot x$$

Пример 16.8. Наконец, всякий стереотипный правый A-модуль X является образом свободного модуля $X \overset{B}{\circledast} A$ при A-эпиморфизме, расщепимом относительно B

$$\pi : X \overset{B}{\circledast} A \to X, \qquad \pi(a \circledast x) = x \cdot a$$

Доказательство. Докажем, например, пример 16.5. Действительно, для всякого $x \in X$ отображение $\sigma(x) : A \to X$, очевидно, непрерывно и будет B-морфизмом, потому что

$$\sigma(x)(b \cdot a) = b \cdot a \cdot x = b \cdot [\sigma(x)(a)]$$

а возникающее таким образом отображение $\sigma : X \to X \overset{B}{\oslash} A$ будет A-морфизмом, потому что

$$\sigma(c \cdot x)(a) = a \cdot c \cdot x = \sigma(x)(a \cdot c) = (16.1) = [c \cdot \sigma(x)](a)$$

то есть $\sigma(c\cdot x)=c\cdot\sigma(x)(c\in A)$.

Расщепимость отображения σ следует из равенства

$$\pi\circ\sigma=1_X$$

где $\pi: X\overset{B}{\oslash}A\to X,\quad \pi(\varphi)=\varphi(1_A)$. □

Стереотипный A-модуль Q называется *инъективным относительно* B если для всякого расщепимого относительно B мономорфизма стереотипных A-модулей $\varphi: X\to Y$ и любого морфизма A-модулей $\alpha: X\to Q$ найдется морфизм A-модулей $\beta: Y\to Q$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
& Q &
\end{tikzcd}.$$

Иными словами, отображение

$$(1_Q\overset{A}{\oslash}\varphi):(Q\overset{A}{\oslash}Y)\to(Q\overset{A}{\oslash}X)$$

должно быть сюръекцией.

Двойственным образом, стереотипный A-модуль P называется *проективным относительно* B если для всякого расщепимого относительно B эпиморфизма стереотипных A-модулей $\varphi: Y\to X$ и любого морфизма A-модулей $\alpha: P\to X$ найдется морфизм A-модулей $\beta: P\to Y$, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X & & Y \arrow[ll, "\varphi"'] \\
& P \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, dashed, "\beta"'] &
\end{tikzcd}.$$

Иными словами, отображение

$$(\varphi\overset{A}{\oslash}1_P):(Y\overset{A}{\oslash}P)\to(X\overset{A}{\oslash}P)$$

должно быть сюръекцией.

Теорема 16.9. *Левый (правый) A-модуль P проективен относительно B $\Leftrightarrow$ правый (левый) A-модуль $Q=P^\star$ инъективен относительно B*

Пример 16.10. Всякий косвободный модуль $A^\star\overset{B}{\odot}E$ (соответственно, $E\overset{B}{\odot}A^\star$) инъективен относительно B.

Доказательство. Пусть $\sigma: X\to Y$ – расщепимый относительно B мономорфизм A-модулей (и значит B-коретракция) и пусть $\rho: Y\to X$ – левый обратный к нему B-морфизмю Тогда возникает следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi^A"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, dashed, "\chi^B\ (2)"] \arrow[dl, dashed, "\rho^B\ (1)"'] \arrow[d, dashed, "\beta^A\ (3)"] & E \\
X \arrow[r, "\alpha^A"] & E\underset{B}{\oslash}A \arrow[ur, "\pi^B"'] &
\end{tikzcd},$$

в которой π обозначает проекцию $\varphi\in E\overset{B}{\oslash}A\mapsto\varphi(1_A)\in E$, $\chi=\pi\circ\alpha\circ\rho,\quad \beta=\widetilde{\chi}$ -морфизм из теоремы 16.2, а индексы A и B у морфизмов означают принадлежность к категориям ${}_A\mathfrak{Ste}$ и ${}_B\mathfrak{Ste}$. □

Отсюда следует

Пример 16.11. Всякий свободный модуль $A\overset{B}{\circledast}E$ (соответственно, $E\overset{B}{\circledast}A$) проективен относительно B.

Теорема 16.12 (характеризация относительно инъективных модулей)**.** *Для стереотипного A-модуля L следующие условия эквивалентны:*

(i) L является инъективным относительно B;

(ii) стандарный мономорфизм $\sigma: L\to L\overset{B}{\oslash}A\quad\sigma(x)(a)=a\cdot x$ является коретракцией в ${}_A\mathfrak{Ste}$;

(iii) существует стереотипный A-модуль Q, инъективный относительно B и коретракция $\tau : L \to Q$ в ${}_A\mathfrak{Ste}$.

Доказательство. Импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ очевидны. Докажем $(iii) \Rightarrow (i)$. Пусть дан инъективный A-модуль Q и A-коретракция $\tau : L \to Q$, тогда для всякого расщепимого относительно B мономорфизма $\varphi : X \to Y$ получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "(1)"] \arrow[dd, "\alpha"'] & & Y \arrow[dl, dashed, "(2)"'] \arrow[dd, dashed, "\beta\ (4)"] \\
& Q \arrow[dr, dashed, "(3)"'] & \\
L \arrow[ur, "\tau"] \arrow[rr, "1_L"'] & & L
\end{tikzcd},$$

□

Из примера 16.8 следует

Теорема 16.13 (характеризация относительно проективных модулей)**.** *Для стереотипного A-модуля L следующие условия эквивалентны:*

(i) L является проективным относительно B;

(ii) стандарный эпиморфизм $\pi : A \overset{B}{\circledast} L \to L \quad \pi(a \circledast x) = a \cdot x$ является ретракцией в ${}_A\mathfrak{Ste}$;

(iii) существует стереотипный A-модуль P, проективный относительно B и ретракция $\tau : P \to L$ в ${}_A\mathfrak{Ste}$.

Пример 16.14. Пусть $E, X \in_{\mathbb{C}} \mathfrak{Ste}$ Тогда

(i) $\mathcal{L}(X)$-модуль $E \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$ с умножением

$$\alpha \cdot \varphi = \alpha \circ \varphi, \quad \alpha \in \mathcal{L}(X), \varphi \in X \overset{\mathbb{C}}{\oslash} E^\star = E \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$$

(стереотипный по теореме 12.31) является инъективным относительно $B = \mathbb{C}$.

(ii) $\mathcal{L}(X)$-модуль $E \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ с умножением

$$\alpha \cdot (e \circledast x) = e \circledast \alpha(x), \quad \alpha \in \mathcal{L}(X), e \in E, x \in X$$

(стереотипный по теореме 12.30) является проективным относительно $B = \mathbb{C}$.

Доказательство. Поскольку эти конструкции двойственны, нам достаточно доказать что-нибудь одно. Докажем второе. Зафиксируем $x_0 \in X$ и $f_0 \in X^\star$ так, чтобы

$$f_0(x_0) = 1$$

Отображения

$$\pi : \mathcal{L}(X) \to X \quad \pi(\varphi) = \varphi(x_0), \sigma : X \to \mathcal{L}(X) \quad \sigma(x) = f_0 \odot x$$

будут $\mathcal{L}(X)$-морфизмами, причем

$$\pi \circ \sigma = 1_X$$

Действительно, $(\pi \circ \sigma)(x) = \pi(f_0 \odot x) = (f_0 \odot x)(x_0) = f_0(x_0)(x) = 1 \cdot x = x$. Отсюда следует, что отображения

$$1_E \circledast \pi : E \circledast \mathcal{L}(X) \to E \circledast X, \qquad 1_E \circledast \sigma : E \circledast X \to E \circledast \mathcal{L}(X)$$

будут $\mathcal{L}(X)$-морфизмами, удовлетворяющими равенству

$$(1_E \circledast \pi) \circ (1_E \circledast \sigma) = 1_E \circledast 1_X = 1_{E \circledast X}$$

Таким образом, $E \circledast X$ является $\mathcal{L}(X)$-ретракцией модуля $E \circledast \mathcal{L}(X)$, проективного относительно $\mathbb{C}$ в силу примера 16.11. □

(c) Относительная гомологическая размерность

Последовательность морфизмов в категории ${}_A\mathfrak{Ste}$ (или $\mathfrak{Ste}_A$)

$$... \longrightarrow X_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} X_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} X_{i+1} \longrightarrow ... \tag{16.6}$$

называется *расщепимой относительно B* если

(i) все морфизмы φ_i расщепимы относительно B

(ii) $\forall i \in \mathbb{Z} \quad \operatorname{Im} \varphi_i = \operatorname{Ker} \varphi_{i+1}$

Предложение 16.15. *Последовательность* (16.6) *является расщепимой относительно B тогда и только тогда, когда она стягиваема в категории ${}_B\mathfrak{Ste}(\mathfrak{Ste}_B)$, то есть существует диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_{i-1} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & X_i \arrow[r, "\varphi_{i+1}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed, "\delta_i"] & X_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed, "\delta_{i+1}"] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
\cdots \arrow[r] & X_{i-1} \arrow[r, "\varphi_i"] & X_i \arrow[r, "\varphi_{i+1}"] & X_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

в которой для всякого i выполнено равенство

$$\varphi_{i-1} \circ \delta_i + \delta_{i+1} \circ \varphi_i = 1_{X_i}$$

Инъективной резольвентой стереотипного A-модуля X относительно B называется всякая расщепимая относительно B последовательность A-морфизмов

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\sigma_0} Q_0 \xrightarrow{\sigma_1} Q_1 \longrightarrow ...$$

в которой все A-модули Q_i инъективны относительно B.

Двойственным образом, *проективной резольвентой* стереотипного A-модуля X относительно B называется всякая расщепимая относительно B последовательность A-морфизмов

$$0 \longleftarrow X \xleftarrow{\pi_0} P_0 \xleftarrow{\pi_1} P_1 \longleftarrow ...$$

в которой все модули P_i проективны относительно B.

Ясно, что *инъективная и проективная резольвенты переходят друг в друга при сопряжении.* Их существование следует из примеров 16.5 и 16.6:

Теорема 16.16. *Всякий стереотипный A-модуль X обладает инъективной резольвентой относительно произвольной подалгебры B в A, причем любые две резольвенты гомотопны:*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & Q^0 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & Q^1 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & \cdots \arrow[dl, dashed] \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & \widetilde{Q}^0 \arrow[r] & \widetilde{Q}^1 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Теорема 16.17. *Всякий стереотипный A-модуль X обладает проективной резольвентой относительно произвольной подалгебры B в A, причем любые две резольвенты гомотопны:*

$$\begin{tikzcd}
0 & X \arrow[l] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & P_0 \arrow[l] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & P_1 \arrow[l] \arrow[d, "1"'] \arrow[dl, dashed] & \cdots \arrow[l] \arrow[dl, dashed] \\
0 & X \arrow[l] & \widetilde{P}_0 \arrow[l] & \widetilde{P}_1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

По аналогии с §14 определяется *гомологическая размерность* алгебры A относительно подалгебры B

$$\operatorname{dh}^B(A) = \max\{\operatorname{dlp}^B(A), \operatorname{drp}^B(A)\} = \max\{\operatorname{dli}^B(A), \operatorname{dri}^B(A)\}$$

где величины $\operatorname{dlp}^B, \operatorname{drp}^B, \operatorname{dli}^B, \operatorname{dri}^B$ определяются также как в § 15(c).

(d) Примеры относительных гомологических размерностей

1^0. *Ситуация тривиальна, если $B = A$:*

$$\mathrm{dh}^A(A) = 0$$

2^0. *Гомологическая размерность алгебры матриц $A = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ относительно $B = \mathbb{C}$ равна нулю*

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\,\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

3^0. *Для алгебры $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на локально-компактном пространстве M, разложимом в прямую сумму $M = \coprod_{i\in I} M_i$ некоторого семейства σ-компактных пространств следующие условия эквивалентны:*

(i) пространство M дискретно;

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{C}(M)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{C}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\,\mathcal{C}(M) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{C}(M)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{C}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\,\mathcal{C}(M) = 0$$

4^0. *Для алгебры $\mathcal{E}(M)$ гладких функций на гладком многообразии M, следующие условия эквивалентны:*

(i) многообразие M нульмерно;

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{E}(M)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{E}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\,\mathcal{E}(M) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{E}(M)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{E}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\,\mathcal{E}(M) = 0$$

5^0. *Для алгебры $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на многообразии Штейна M, следующие условия эквивалентны:*

(i) многообразие M нульмерно;

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{O}(M)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\,\mathcal{O}(M) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{O}(M)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{O}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\,\mathcal{O}(M) = 0$$

6^0. *Для алгебры $\mathcal{R}(M)$ регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии M, следующие условия эквивалентны:*

(i) многообразие M нульмерно;

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{R}(M)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{R}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\,\mathcal{R}(M) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{R}(M)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{R}(M)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\,\mathcal{R}(M) = 0$$

7^0. *Для алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ мер Радона на локально-компактной группе G следующие условия эквивалентны:*

(i) группа G компактна;

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{C}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{C}^\star(G)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{C}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\, \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

8^0. *Для алгебры $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений на группе Ли G следующие условия эквивалентны:*

(i) группа G компактна;

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{E}^\star(G)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{E}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\, \mathcal{E}^\star(G) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{E}^\star(G)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{E}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\, \mathcal{E}^\star(G) = 0$$

9^0. *Для алгебры $\mathcal{O}^\star(G)$ голоморфных потоков на группе Штейна G следующие условия эквивалентны:*

(i) группа G редуктивна (то есть, является комплексификацией некоторой компактной вещественной группы Ли);

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{O}^\star(G)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}^\star(G) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{O}^\star(G)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{O}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\, \mathcal{O}^\star(G) = 0$$

10^0. *Для алгебры $\mathcal{R}^\star(G)$ регулярных потоков на аффинной алгебраической группе G следующие условия эквивалентны:*

(i) группа G редуктивна (то есть, является комплексификацией некоторой компактной вещественной группы Ли);

(ii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{R}^\star(G)$ относительно поля $\mathbb{C} \subseteq \mathcal{R}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\, \mathcal{R}^\star(G) = 0$$

(iii) гомологическая размерность алгебры $\mathcal{R}^\star(G)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{R}^\star(G)$ равна нулю:

$$\mathrm{dh}^{B}\, \mathcal{R}^\star(G) = 0$$

Относительная гомологическая размерность алгебры матриц $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Докажем пример 2^0. Обозначим $X = \mathbb{C}^n$, $\quad A = \mathcal{L}(X)$, и заметим, что в силу конечномерности пространства X справедливы равенства в ${}_{\mathbb{C}}\mathfrak{Ste}$

$$A = X^\star \overset{\mathbb{C}}{\odot} X = X^\star \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$$

Их можно рассматривать как изоморфизмы левых A-модулей, если (с помощью теорем 12.30 и 12.31) наделить $X^\star \overset{\mathbb{C}}{\odot} X$ и $X^\star \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ структурой A-модулей по формулам

$$\alpha \cdot (f \odot x) = f \odot \alpha(x), \qquad \alpha \cdot (f \circledast x) = f \circledast \alpha(x),$$

Отсюда следует, что для всякого пространства $Y \in \mathfrak{Ste}$ соответствующий свободный A-модуль имеет вид

$$A \overset{\mathbb{C}}{\circledast} Y = X^\star \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X \overset{\mathbb{C}}{\circledast} Y = Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X^\star \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$$

причем из (16.3) следует, что умножение на элементы $\alpha \in \mathcal{L}(X)$ задается формулой

$$\alpha \cdot (y \circledast f \circledast x) = y \circledast f \circledast \alpha(x), \qquad y \in Y, f \in X^\star, x \in X$$

Возьмем теперь произвольный модуль $Y \in {}_A\mathfrak{Ste}$ и рассмотрим канонический A-эпиморфизм, описанный в примере 16.7

$$\pi : A \overset{\mathbb{C}}{\circledast} Y \to Y$$

Если обозначить $E = Y \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X^\star$, то мы получим A-эпиморфизм

$$\pi : E \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X \to Y,$$

причем умножение на $\alpha \in A = \mathcal{L}(X)$ в $E \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ задается равенством

$$\alpha \cdot (e \circledast x) = e \circledast \alpha(x)$$

Теперь по теореме 12.31(ii) кообраз $\operatorname{Coim} \pi$ морфизма π, как непосредственный фактор-модуль для $E \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ должен иметь вид

$$\operatorname{Coim} \pi = H \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X,$$

где H – непосредственное фактор-пространство для E а умножение на $\alpha \in A = \mathcal{L}(X)$ определяется формулой

$$\alpha \cdot (h \circledast x) = h \circledast \alpha(x)$$

Таким образом, возникает биморфизм в ${}_A\mathfrak{Ste}$

$$\operatorname{im} \pi \circ \operatorname{red} \pi : H \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X \to Y,$$

причем, в силу примера 16.14(ii), $H \overset{\mathbb{C}}{\circledast} X$ – проективный модуль относительно $\mathbb{C}$. Это означает, что имеется проективная резольвента нулевой длины

$$0 \leftarrow Y \leftarrow P \leftarrow 0$$

Дальше рассуждения повторяют окончание примера 2^0 § 15(e). □

Относительная гомологическая размерность функциональных алгебр. Примеры $3^0 - 6^0$ доказываются одинаково, поэтому мы покажем только доказательство примера 3^0.

Доказательство. 1. Докажем вначале импликацию $(i) \Rightarrow (iii)$. Пусть M – дискретное пространство. Тогда $\mathcal{C}(M) = \mathbb{C}^M$. Заметим, что для всякого семейства стереотипных пространств $\{X^i, i \in M\}$ произведение $\prod_{i \in M} X^i$ будет $\mathbb{C}^M$-модулем. И наоборот, всякий $\mathbb{C}^M$-модуль X имеет вид $\prod_{i \in M} X^i$, где пространства X^i могут быть определены по формуле

$$X^i = \{a \cdot x; x \in X, a \in \mathcal{C}(M) = \mathbb{C}^M \mid \operatorname{supp} a \subseteq \{i\}\}$$

Морфизмы же $\mathbb{C}^M$-модулей имеют вид

$$\varphi = \prod_{i \in M} \varphi^i \ : \ \prod_{i \in M} X^i \to \prod_{i \in M} Y^i$$

Докажем, что всякий $\mathbb{C}^M$-модуль X проективен над любой подалгеброй $B \subseteq \mathbb{C}^M$. Пусть $\mathbb{C}^M$-эпиморфизм $\pi : Y \to X$ - допустим над B, то есть существует B-морфизм $\rho : X \to Y$ такой, что

$$\pi \circ \rho = \operatorname{id}_X$$

Для любых $x \in X, y \in Y$ обозначим через x^i и y^i проекции x и y на X^i и Y^i. Поскольку π является $\mathbb{C}^M$-морфизмом, должно выполняться тождество

$$\pi(y)^i = \pi(y^i)$$

Отсюда следует, что

$$\forall i, j \in M \quad \forall x \in X^i \quad \pi(\rho(x)^j) = \begin{cases} 0, \ j \neq i \\ x, \ j = i \end{cases} \tag{16.7}$$

Действительно, если $x \in X^i$, то

$$x^j = \begin{cases} 0, \ j \neq i \\ x, \ j = i \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \pi(\rho(x)^j) = [\pi(\rho(x))]^j = x^j = \begin{cases} 0, \ j \neq i \\ x, \ j = i \end{cases}$$

Если теперь положить

$$\sigma = \prod_{i \in M} \sigma^i \ : \ \prod_{i \in M} X^i \to \prod_{i \in M} Y^i \quad \Big| \quad \forall x \in X^i \quad \sigma(x) = \rho(x)^i$$

то $\sigma : X \to Y$ будет $\mathbb{C}^M$-морфизмом, и

$$\forall x \in X^i \quad \pi(\sigma(x)) = \pi(\rho(x)^i) = (16.7) = x$$

откуда

$$\forall x \in X \quad \pi(\sigma(x)) = x$$

Мы получили, что всякий B-допустимый $\mathbb{C}^M$-эпиморфизм $\pi : Y \to X$ является $\mathbb{C}^M$-ретракцией. Значит, в частности, стандартный эпиморфизм $\pi : \mathbb{C}^M \overset{B}{\circledast} X \to X$ всегда является $\mathbb{C}^M$-ретракцией, откуда по теореме 16.13, получаем, что X – проективный модуль относительно B.

2. Импликация $(iii) \Rightarrow (ii)$ очевидна.

3. Теперь докажем импликацию $(ii) \Rightarrow (i)$. Зафиксируем точку $a \in M$ и наделим поле $\mathbb{C}$ структурой $\mathcal{C}(M)$-модуля по формуле

$$\forall u \in \mathcal{C}(M) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad u \cdot \lambda = u(a) \cdot \lambda$$

Пусть $\mathbb{C}_a$ обозначает поле $\mathbb{C}$ с такой структурой $\mathcal{C}(M)$-модуля. Если $\operatorname{dh}^{\mathbb{C}} \mathcal{C}(M) = 0$, то всякий $\mathcal{C}(M)$-модуль будет проективен. В частности, модуль $\mathbb{C}_a$ тоже проективен. Значит, мы можем рассмотреть диаграмму (15.6)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(M) \arrow[rr, "\delta_a"] & & \mathbb{C}_a \\ & \mathbb{C}_a \arrow[ul, dashed, "?"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}_a}"'] & \end{tikzcd} ,$$

(в которой $\delta_a(u) = u(a)$), из которой можно будет заключить, что существует $\mathcal{C}(M)$-морфизм $\mu : \mathbb{C}_a \to \mathcal{C}(M)$ такой, что

$$\delta_a \circ \mu = \mathrm{id}_{\mathbb{C}_a}$$

Ясно, что $\mu \neq 0$. Поэтому, как легко заметить, числа $\lambda \neq 0$ при таком отображении будут превращаться в ненулевые функции $\mu_i(\lambda) \neq 0$ с носителями в точке a:

$$\operatorname{supp} \mu_i(\lambda) \subseteq \{a\}$$

Это возможно только если a – изолированная точка в M. Мы показали, что любая точка $a \in M$ – изолирована в M, то есть M – дискретное пространство. $\square$

Относительная гомологическая размерность групповых алгебр. Примеры 7^0–10^0 доказываются одинаково, поэтому мы покажем только доказательство примера 7^0.

Доказательство. 1. Докажем импликацию $(i) \Rightarrow (iii)$. Пусть G – компактная группа. Убедимся, что гомологическая размерность групповой алгебры мер $\mathcal{C}^\star(G)$ относительно любой подалгебры $B \subseteq \mathcal{C}^\star(G)$ равна нулю

$$\operatorname{dh}^B \mathcal{C}^\star(G) = 0$$

Это эквивалентно тому, что всякий стереотипный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль X является инъективным и проективным относительно B. В силу принципа двойственности, нам достаточно доказать инъективность X. Для этого, пользуясь примером 16.5, построим допустимый относительно B $\mathcal{C}^\star(G)$-мономорфизм $\sigma : X \to Q$ в некоторый инъективный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль Q, то есть

$$\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}_X$$

для некоторого B-морфизма $\varphi : Q \to X$. Тогда если глядеть на X и Q как на G-модули, и положить

$$\pi(y) = \int_G t \cdot \{\varphi(t^{-1} \cdot y)\} \mu(dt), \qquad y \in Q$$

где μ – нормированная мера Хаара ($\mu(G) = 1$), то мы получим, что $\pi : Q \to X$ есть G-морфизм (и, следовательно, $\mathcal{C}^\star(G)$-морфизм), потому что $\forall\, a \in G \quad \forall\, y \in Q$

$$\pi(a \cdot y) = \int_G t \cdot \{\varphi(t^{-1} \cdot a \cdot y)\}\mu(dt) = [t^{-1} \cdot a = s^{-1},\ t = a \cdot s] =$$
$$= \int_G a \cdot s \cdot \{\varphi(s^{-1} \cdot y)\}\mu(dt) = a \cdot \int_G s \cdot \{\varphi(s^{-1} \cdot y)\}\mu(dt) = a \cdot \pi(y).$$

А, с другой стороны,

$$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X,$$

потому что $\forall\, x \in X$

$$\pi(\sigma(x)) = \int_G t \cdot \{\varphi(t^{-1} \cdot \sigma(x))\}\mu(dt) = (\sigma \quad \text{есть } G\text{-морфизм}) = \int_G t \cdot \{\varphi(\sigma(t^{-1} \cdot x))\}\mu(dt) =$$
$$= (\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X) = \int_G t \cdot t^{-1} \cdot x\mu(dt) = \int_G x\mu(dt) = x$$

Таким образом, X является инъективным относительно B, по теореме 16.12.

2. Импликация $(iii) \Rightarrow (ii)$ очевидна.

3. Докажем $(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\mathrm{dh}^{\mathbb{C}}\, \mathcal{C}^\star(G) = 0$, тогда всякий стереотипный $\mathcal{C}^\star(G)$-модуль будет инъективен относительно $\mathbb{C}$. В частности, мы можем наделить $\mathbb{C}$ структурой стереотипного $\mathcal{C}^\star(G)$-модуля как в лемме 15.22, и рассмотреть диаграмму (15.8)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{C}}"'] & & \mathcal{C}(G) \arrow[dl, dashed, "?"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}.$$

Это даст нам ненулевое непрерывное инвариантное среднее $M : \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$, а это, в свою очередь, будет означать, что G – компактная группа. □

Литература

[1] Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.

[2] Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.

[3] Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

[4] Enflo P. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math. 1973, 130:309-317.

[5] Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1979.

[6] Бурбаки Н. Общая топология: топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. III-VIII. М.: Наука, 1969.

[7] Zelazko W. Topological groups and algebras. Inst. Math. Polish. Ac. Sci. Warszawa, 1967-1968.

[8] Beckenstein E., Narici L., Suffel C. Topological algebras. North Holland. Amsterdam, 1977.

[9] Mallios A. Topological algebras. North Holland. Amsterdam, 1986.

[10] MacLane S. Categories for the working mathematician. Springer, Berlin, 1971.

[11] Kelly G. Basic consepts of enriched category theory. London Math. Soc. Note Ser, 1982. No. 64.

[12] Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А., Шеврин Л.Н., Шульгейфер Е.Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1991.

[13] Taylor J.L. Homology and cohomology for topological algebras. Adv. Math. 1972, 9: 137-182.

[14] Dubuc E.J., Porta H. Convenient categories of topological algebra. B. Am. Math. S., 1971, 77(6):975-979.

[15] Акбаров С.С. Двойственность Понтрягина в теории топологических векторных пространств. Математические заметки. 1995, 57(3):463-466.

[16] Акбаров С.С. Двойственность Понтрягина в теории топологических модулей. Функциональный Анализ и его приложения, 1995, 29(4):68-72.

[17] Акбаров С.С. Свойство стереотипной аппроксимации и проблема однозначности следа. Функциональный Анализ и его приложения, 1998, 33(2):68-73.

[18] Акбаров С.С. Абсолютная теория гомологий стереотипных алгебр. Функциональный Анализ и его приложения, 2000, 34(1):76-79.

[19] Акбаров С.С. Стереотипные групповые алгебры. Математические заметки, 1999, 66(6):941-944.

[20] Акбаров С.С. Стереотипные алгебры с отражением и теорема о бикоммутанте. Математические заметки, 1999, 66(5):789-792.

[21] Akbarov S.S. Stereotype spaces, algebras, homologies: an outline. In: “Topological homology”, Editor: A.Ya.Helemskii, Nova Science Publishers, 2000,1-29.

[22] Акбаров С.С. Стереотипные локально выпуклые пространства. Известия РАН, серия Математическая, 2000, 64(4):3-46.

[23] Smith M.F. The Pontrjagin duality theorem in linear spaces. Annals of Mathematics, 1952, 56(2):248-253.

[24] Брудовский Б.С. О k - и c - рефлексивности. Литовский Математический Сборник, 1967, 7(1):17-21.

[25] Waterhouse W.C. Dual groups of vector spaces. Pacific J. Math., 1968, 26(1):193-196.

[26] Brauner K. Duals of Frechet spaces and a generalization of the Banach-Dieudonne theorem. Duke Math. Jour. 1973, 40(4):845-855.

[27] Хелемский А.Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. М.: МГУ, 1986.

[28] Хелемский А.Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. М.: Наука, 1989.

[29] Бурбаки Н. Гомологическая алгебра. Х. М.: Наука, 1987.

[30] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.

[31] Helemskii A.Ya. 31 problems of the homology of the algebras of analysis. In: Linear and Complex Analysis Book, Part I, Lect. Notes Math. Springer-Verlag, 1994, 1573.

[32] Пирковский А.Ю. К проблеме существования достаточного количества инъективных модулей Фреше над ненормируемыми алгебрами Фреше. Известия РАН, Серия Математическая, 1998, 62(4):137-154.

[33] Szankowski A. $B(H)$ does not have the approximation property. Act. Math., 1981, 147:89-108.

[34] Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires. Mem. Am. Math. Soc., 1955, 16.

[35] Litvinov G.L. Approximation property of locally convex spaces and the problem of uniqueness of the trace of linear operator. Selecta Matematica Sovietica, 1992, 1:25-40.

[36] Литвинов Г.Л. Ядерный оператор. Математическая энциклопедия, 1985, 5.

[37] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

[38] Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981.

[39] Смолянов О.Г. Пространство $\mathcal{D}(X)$ не является наследственно полным. Изв. АН СССР Сер. Математическая, 1971, 35:686-696.

[40] Jarchow H. Locally convex spaces. B.G.Teubner, Stuttgart, 1981.

[41] Пич А. Ядерные локально-выпкулые пространства. М.: Мир, 1967.

[42] Акбаров С.С. Гладкая структура и дифференциальные операторы на локально-компактной группе. Известия РАН, Серия Математическая, 1995, 59(1):3-48.

[43] Ф.Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.

[44] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985.

[45] Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: УРСС, 1995.

[46] Chari V., Pressley A. A guide to quantum groups. Cambridge university press, 1995.

[47] Litvinov G.L. Representations of groups in locally convex spaces and topological group algebras. Selecta Mathematica Sovietica, 1988, 7(2):101-182.

[48] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т.1. М.: Наука, 1975.

[49] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. I-III. М.: Мир, 1976.

[50] Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.

[51] Бурбаки Н. Алгебра: модули, кольца, формы. VII-IX. М.: Наука, 1966.

[52] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969.

Оглавление