ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ ГРУПП ШТЕЙНА С АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СВЯЗНОЙ КОМПОНЕНТОЙ ЕДИНИЦЫ[1]

С.С.Акбаров

24 декабря 2009 г.

[1]Настоящая работа представляет собой вариант статьи автора, вышедшей в 2008 году в ФПМ: С. С. Акбаров. Голоморфные функции экспоненциального типа и двойственность для групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, *Фундаментальная и прикладная математика* 2008, 14(1): 3-178. (Английский перевод: S. S. Akbarov. Holomorphic functions of exponential type and duality for Stein groups with algebraic connected component of identity, *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, 162(4): 459-586.)

Введение

С 1930-х годов, когда Л. С. Понтрягин опубликовал свою знаменитую теорему двойственности для абелевых локально компактных групп [27], воображение специалистов по гармоническому анализу время от времени занимает следующая задача: *как обобщить двойственность Понтрягина на неабелевы локально компактные группы, чтобы двойственный объект имел ту же природу, что и исходный?*

Как известно, первые попытки обобщения понтрягинской двойственности не удовлетворяли этому требованию: в теории М. Г. Крейна, например, объектом $\widehat{G}$, двойственным к группе G, является блок-алгебра [20] (а не группа, как у Понтрягина). Видимо, в этом проявляется какая-то глубокая особенность человеческой психологии, но такой невинный штрих, как асимметрия между G и $\widehat{G}$ в теории представлений – штрих, который можно было бы сравнить с различием между левым и правым в анатомии – привел к многочисленным и (из-за меняющихся со временем представлений о том, что следует понимать под группой) не прекращающимся до сих пор попыткам построить теорию двойственности, которая, помимо того, что охватывала бы "все на свете группы", сохраняла бы понтрягинскую симметрию между исходным объектом и двойственным к нему.

На категорном языке, единственном, приспособленном для устремлений подобного уровня умозрительности, корректно сформулировать эту задачу можно с помощью следующих двух определений.

1. Условимся контравариантный функтор $A \mapsto A^* : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ на заданной категории $\mathfrak{K}$ называть *функтором двойственности на* $\mathfrak{K}$, если его квадрат, то есть ковариантный функтор $A \mapsto (A^*)^* : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$, изоморфен тождественному функтору $\mathsf{id}_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{K} \arrow[dr, "*"] & \\ \mathfrak{K} \arrow[ur, "*"] \arrow[rr, "\mathsf{id}_{\mathfrak{K}}"'] & & \mathfrak{K} \end{tikzcd} \tag{A}$$

Примером функтора двойственности является как раз переход $G \mapsto G^\bullet$ к двойственной по Понтрягину абелевой локально компактной группе: естественным изоморфизмом между $G^{\bullet\bullet}$ и G будет отображение

$$i_G : G \to G^{\bullet\bullet} \quad \Big| \quad i_G(x)(\chi) = \chi(x), \qquad x \in G,\ \chi \in G^\bullet$$

Наоборот, скажем, в категории банаховых пространств функтор $X \mapsto X^*$ перехода к сопряженному банахову пространству не является двойственностью (потому что существуют нерефлексивные банаховы пространства).

2. Пусть нам даны:

   (a) три категории $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, с двумя полными и точными ковариантными функторами $A : \mathfrak{K} \to \mathfrak{L}$ и $B : \mathfrak{L} \to \mathfrak{M}$, определяющими цепочку вложений:

   $$\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L} \subset \mathfrak{M},$$

   (b) два функтора двойственности $K \mapsto K^\bullet : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ и $M \mapsto M^* : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ такие, что функторы $K \mapsto B(A(K^\bullet))$ и $K \mapsto \Big(B(A(K))\Big)^*$ изоморфны:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[r, "*"] & \mathfrak{M} \\ \mathfrak{L} \arrow[u, "B"] & \mathfrak{L} \arrow[u, "B"'] \\ \mathfrak{K} \arrow[u, "A"] \arrow[r, "\bullet"] & \mathfrak{K} \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd} \tag{B}$$

   Такую конструкцию мы будем называть *обобщением двойственности* $\bullet$ *с категории* $\mathfrak{K}$ *на категорию* $\mathfrak{L}$.

Вооружившись этими терминами, мы можем сформулировать задачу, о которой идет речь, так: *существуют ли обобщения двойственности Понтрягина с категории абелевых локально компактных групп на категорию произвольных локально компактных групп, и если да, то какие?* Диаграмма категорий (B) при такой постановке вопроса принимает вид

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{M} \arrow[r, "*"] & \mathfrak{M} \\
\boxed{\text{локально компактные группы}} \arrow[u] & \boxed{\text{локально компактные группы}} \arrow[u] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы}\\ \text{локально компактные группы}\end{array}} \arrow[u] \arrow[r, "\bullet"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы}\\ \text{локально компактные группы}\end{array}} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{C}
$$

А руководящим примером для нее является теория двойственности для конечных групп, которую можно рассматривать, как обобщение понтрягинской двойственности с категории абелевых конечных групп на категорию всех конечных групп:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{конечномерные алгебры}\\ \text{Хопфа}\end{array}} \arrow[r, "H\mapsto H^*"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{конечномерные алгебры}\\ \text{Хопфа}\end{array}} \\
\boxed{\text{конечные группы}} \arrow[u, "\begin{array}{c}\mathbb{C}_G\\ \uparrow\\ G\end{array}"] & \boxed{\text{конечные группы}} \arrow[u, "\begin{array}{c}\mathbb{C}_G\\ \uparrow\\ G\end{array}"'] \\
\boxed{\text{абелевы конечные группы}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"] \arrow[r, "G\mapsto G^\bullet"] & \boxed{\text{абелевы конечные группы}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"']
\end{tikzcd}
\tag{D}
$$

(здесь операция $G \mapsto \mathbb{C}_G$ есть переход к групповой алгебре, а $H \mapsto H^*$ – переход к двойственной алгебре Хопфа). Этот пример, помимо прочего, иллюстрирует другую ключевую идею "общей теории двойственности": если мы хотим свести представления групп к представлениям алгебр, и как следствие, требуем, чтобы категория $\mathfrak{M}$ состояла из ассоциативных алгебр, тогда эти алгебры H должны обладать дополнительной структурой, которая позволила бы наделить двойственный объект H^* естественной структурой ассоциативной алгебры. Естественными объектами такого сорта в общей алгебре являются алгебры Хопфа. Как следствие, в "теории двойственности" конструкции обычно напоминают алгебры Хопфа, хотя как правило ими не являются, за исключением тривиальных ситуаций, когда, например, алгебра конечномерна.

Задача обобщения двойственности Понтрягина в формулировке, представленной диаграммой (C), была решена в 1973 году независимо Л. И. Вайнерманом и Г. И. Кацем с одной стороны ([43], [44], [45]), и М. Эноком и Ж.-М. Шварцем с другой ([11], [12], [13]). Построенная ими теория алгебр Каца явилась итогом серии попыток различных математиков расширить категорию абелевых локально компактных групп, с историей которых (как и с самой теорий алгебр Каца) можно познакомиться по монографии Энока и Шварца [10]. Работа в этом направлении продолжилась и после статей Вайнермана, Каца, Энока и Шварца 1973 года, поскольку, с одной стороны, в теорию вносились улучшения (подробности, опять же, в [10]), а с другой, после открытия в 1980-х годах квантовых групп, сразу же приобретших широкую популярность, понтрягинскую двойственность стали обобщать и на этот класс, причем эта работа не окончена и поныне – возникшая на этой волне теория локально компактных квантовых групп в настоящее время активно разрабатывается усилиями С. Л. Вороновича, С. Ваэса, А. Ван Дэле, Л. Вайнермана, Й. Кустерманса, В. Пуца, П. Солтана и других (представление о ней можно получить по коллективной монографии [28]). Ключевой в этих исследованиях стала предложенная А. Ван Дэле в 1990-х идея мультипликаторной алгебры Хопфа (см. [41, 42]).

Несмотря на активную работу и впечатляющий энтузиазм, демонстрируемый математиками, занимающимися этой темой, предлагаемые ими теории обладают серьезным недостатком: *в них всюду объемлющие категории $\mathfrak{M}$ состоят из объектов, формально не являющихся алгебрами Хопфа.* Алгебры Каца, например, хотя и выбираются как подкласс среди образований, именуемых алгебрами Хопфа-фон Неймана, в действительности алгебрами Хопфа не являются, потому что с категорной точки зрения в определении алгебр Хопфа-фон Неймана используются сразу два тензорных произведения – одно (проективное тензорное произведение банаховых пространств) для операции умножения, другое (тензорное произведение алгебр фон Неймана) для коумножения. В теории локально компактных квантовых групп ситуация в этом отношении еще менее обнадеживает, потому что там претензия, что коумножение должно действовать в тензорное произведение, вовсе отбрасывается: в соответствии с упоминавшейся оригинальной идеей Ван Дэле о мультипликаторных алгебрах Хопфа, коумножение здесь определяется как оператор из A в алгебру $M(A \otimes A)$ мультипликаторов на тензорном произведении $A \otimes A$ (под таковым подразумевается минимальное тензорное произведение C^*-алгебр, см. [21, 28]).

В настоящей работе мы предлагаем новый подход к обобщению понтрягинской двойственности, свободный от этого недостатка: в нем объемлющая категория $\mathfrak{M}$ состоит из "настоящих" алгебр Хопфа, конечно, в категорном смысле, то есть определенных так же, как и обычные алгебры Хопфа, но с заменой в определении категории векторных пространств на заданную симметрическую (в более общей ситуации – заузленную) моноидальную категорию (такие алгебры Хопфа называются иногда моноидами Хопфа, см. [29, 35, 36, 49]).

Мы ставим себе целью не собственно обобщение понтрягинской двойственности на класс локально компактных групп, как это представлено диаграммой (C), а решение аналогичной задачи в классе комплексных групп. Дело в том, что из четырех главных областей математики, где проявляет себя идея инвариантного интегрирования –

– общей топологии (где группами с инвариантным интегралом будут как раз локально компактные группы),

– дифференциальной геометрии (где эту роль выполняют группы Ли),

– комплексного анализа (здесь группами с интегралом можно считать редуктивные комплексные группы Ли) и

– алгебраической геометрии (опять же с редуктивными комплексными группами),

– по крайней мере в трех первых имеет смысл задача обобщения понтрягинской двойственности. В топологии она принимает вид диаграммы (C), в дифференциальной геометрии можно ставить задачу обобщения понтрягинской двойственности с абелевых компактно порожденных групп Ли, скажем, на все компактно порожденные группы Ли, в комплексном же анализе можно рассматривать задачу обобщения понтрягинской двойственности с класса абелевых компактно порожденных групп Штейна на класс редуктивных комплексных групп (под редуктивной группой мы, следуя [46], понимаем комплексификацию компактной вещественной группы Ли).

Нам удается решить третью из этих проблем. Мы начинаем наши построения с алгебры $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на комплексной группе Ли G, поскольку это естественная функциональная алгебра в комплексном анализе (в трех других упомянутых дисциплинах эта роль принадлежит алгебре $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций, алгебре $\mathcal{E}(G)$ гладких функций и алгебре $\mathcal{R}(G)$ многочленов). Идея, которую мы предлагаем в качестве эвристической гипотезы, и подтверждение которой мы видим в результатах нашей работы, состоит в том, что каждой из первых трех математических дисциплин в нашем списке – общей топологии, дифференциальной геометрии и комплексному анализу – с точки зрения рассматриваемого в ней класса топологических алгебр, по-видимому, соответствует какой-то класс полунорм, внутренне связанный с этим классом алгебр. Какими должны быть эти полунормы в общей топологии и в дифференциальной геометрии мы пока сказать не можем, но с комплексным анализом – и этот тезис подсказан нам результатами А. Ю. Пирковского об оболочках Аренса-Майкла топологических алгебр (см. [26]) – внутренне связан класс субмультипликативных полунорм, то есть полунорм, определенных неравенством

$$p(x \cdot y) \leqslant p(x) \cdot p(y).$$

Чтобы придать точный смысл словам "внутренне связан", нужно ввести в рассмотрение два функтора и определяемую ими категорию алгебр Хопфа:

1) *Оболочка Аренса-Майкла* $A \mapsto A^{\heartsuit}$. Алгебры, топология которых порождается субмультипликативными полунормами и удовлетворяет дополнительному условию полноты, называются алгебрами Аренса-Майкла (мы говорим о них подробно в § 5). Всякой топологической алгебре A соответствует "ближайшая к ней снаружи" алгебра Аренса-Майкла, которая называется оболочкой Аренса-Майкла алгебры A и которую мы обозначаем $A^{\heartsuit}$ (она представляет из себя пополнение A относительно системы непрерывных субмультипликативных полунорм на ней).

2) *Переход к сопряженной стереотипной алгебре Хопфа* $H \mapsto H^{\star}$. В работе [1] автором подробно рассматривались симметрические моноидальные категории $(\mathfrak{Ste}, \odot)$ и $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$ стереотипных пространств (с инъективным $\odot$ и проективным $\circledast$ тензорным произведением). Алгебры Хопфа в этих категориях называются соответственно инъективными и проективными стереотипными алгебрами Хопфа. Операция $H \mapsto H^{\star}$ перехода к сопряженному стереотипному пространству устанавливает антиэквивалентность между этими категориями алгебр Хопфа.

3) *Категория голоморфно рефлексивных алгебр Хопфа.* Функторы $\heartsuit$ и $\star$ позволяют рассмотреть категорию проективных и одновременно инъективных стереотипных алгебр Хопфа H, у которых, последовательное применение операций $\heartsuit$ и $\star$ всякий раз приводит к инъективной и одновременно проективной алгебре Хопфа и, если начинать с $\heartsuit$, то на четвертом шаге эта цепочка возвращает к исходной алгебре Хопфа (конечно, с точностью до изоморфизма). Эту замкнутую цепочку операций мы изображаем диаграммой, которую можно назвать *диаграммой рефлексивности*,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & H^\heartsuit \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ H^\star \arrow[u, mapsto, "\star"] & (H^\heartsuit)^\star \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"'] \end{tikzcd} \tag{E}$$

а такие алгебры Хопфа H мы называем *голоморфно рефлексивными* (аккуратное определение дается в §5(e)). Функтором двойственности в категории таких алгебр Хопфа, понятно, будет операция $H \mapsto (H^\heartsuit)^\star$.

Так вот, главный результат нашей работы, объясняющий смысл наших намеков о “полунормах, внутренне связанных с комплексным анализом”, состоит в том, что алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ аналитических функционалов на компактно порожденной группе Штейна G с алгебраической связной компонентой единицы является голоморфно рефлексивной алгеброй Хопфа. Для доказательства этого факта мы вводим в рассмотрение алгебру $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ голоморфных функций экспоненциального типа на группе G, являющуюся подалгеброй в алгебре $\mathcal{O}(G)$ всех голоморфных функций на G. Диаграмма рефлексивности (E) для $\mathcal{O}^\star(G)$ имеет вид:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\star(G) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"'] \end{tikzcd} \tag{F}$$

Для случая абелевых групп операция $\heartsuit$ оказывается естественно изоморфной обычному преобразованию Фурье, и поэтому диаграмма приобретает вид:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\star(G) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit", "\text{преобразование Фурье}"'] & \mathcal{O}(G^\bullet) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ \mathcal{O}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}^\star(G^\bullet) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"', "\text{преобразование Фурье}"] \end{tikzcd} \tag{G}$$

(двойственная группа $G^\bullet$ для абелевой компактно порожденной группы Штейна G определяется как группа гомоморфизмов из G в мультипликативую группу $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел). Это, в частности, определяет изоморфизм функторов

$$\mathcal{O}^\star(G^\bullet) \cong \left(\left(\mathcal{O}^\star(G)\right)^\heartsuit\right)^\star,$$

который в свою очередь позволяет решить задачу обобщения понтрягинской двойственности в комплексном случае, и получаемая нами диаграмма категорий (B) выглядит так:

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{голоморфно рефлексивные}\\ \text{алгебры Хопфа}\end{array}} \arrow[r, "H\mapsto (H^{\heartsuit})^\star"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{голоморфно рефлексивные}\\ \text{алгебры Хопфа}\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{компактно порожденные}\\ \text{группы Штейна}\\ \text{с алгебраической}\\ \text{компонентой единицы}\end{array}} \arrow[u, "\begin{array}{c}\mathcal{O}^\star(G)\\ \upmapsto\\ G\end{array}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{компактно порожденные}\\ \text{группы Штейна}\\ \text{с алгебраической}\\ \text{компонентой единицы}\end{array}} \arrow[u, "\begin{array}{c}\mathcal{O}^\star(G)\\ \upmapsto\\ G\end{array}"'] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы компактно порожденные}\\ \text{группы Штейна}\end{array}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"] \arrow[r, "G\mapsto G^\bullet"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы компактно порожденные}\\ \text{группы Штейна}\end{array}} \arrow[u, "\mathfrak{e}"']
\end{tikzcd}
\tag{H}
$$

Поскольку всякая редуктивная комплексная группа алгебраична, это действительно будет решением третьей из упомянутых выше проблем.

В дополнение к этому мы показываем, что определяемая нами голоморфная двойственность не ограничивается классом компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, но продолжается также и на квантовые группы. В качестве примера мы рассматриваем квантовую группу '$az + b$' (квантовых аффинных преобразований комплексной плоскости, см. [48, 40, 47, 28]), про которую мы доказываем, что она является голоморфно рефлексивной алгеброй Хопфа в смысле данного определения.

Автор выражает искреннюю признательность О. Ю. Аристову, Д. Н. Ахиезеру, А. Ван Дэле, Ф. Гоше, Е. Б. Кацову, Ю. Н. Кузнецовой, Т. Мащеку, С. Ю. Немировскому, А. Ю. Пирковскому, В. Л. Попову, П. Солтану, А. Хаклберри, А. Я. Хелемскому за бесчисленные консультации и помощь в работе над этой статьей. Ю. Н. Кузнецовой, кроме того, принадлежит идея доказательства предложений 4.1, 7.12 и леммы 7.9.

§ 0 Стереотипные пространства

Стереотипные пространства, о которых идет речь в этом параграфе, подробно рассматривались автором в [1] (см. также [2, 3]).

(a) Определение и основные примеры

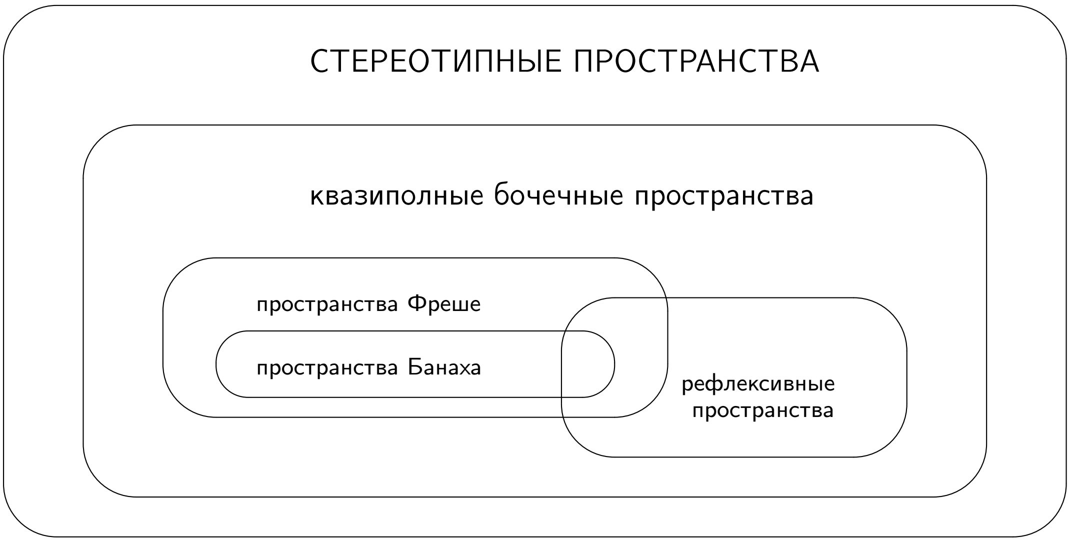
Пусть X – локально выпуклое пространство над $\mathbb{C}$. Обозначим через $X^\star$ пространство линейных непрерывных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X. Пространство X называется *стереотипным*, если естественное отображение

$$\mathsf{i}_X : X \to (X^\star)^\star \quad \big| \quad \mathsf{i}_X(x)(f) = f(x), \quad x \in X, f \in X^\star$$

является изоморфизмом локально выпуклых пространств. Очевидно, справедлива

Теорема 0.1. *Если X – стереотипное пространство, то $X^\star$ – тоже стереотипное пространство.*

Как оказывается, стереотипные пространства образуют весьма широкий класс, что можно проиллюстрировать следующей диаграммой:



Пространства Фреше и банаховы пространства представляют для нас особый интерес в этой картине, поэтому мы рассмотрим их более подробно.

Пример 0.1 (пространства Фреше и Браунера). Всякое пространство Фреше X является стереотипным. Его сопряженное пространство $Y = X^\star$ также будет стереотипным по теореме 0.1. При этом, если $\{U_n\}$ – счетная локальная база в X, то поляры $K_n = U_n^\circ$ являются компактами в Y, причем образуют *фундаментальную систему компактов*: каждый компакт $T \subseteq Y$ содержится в некотором компакте K_n (отсюда следует, между прочим, что Y не может быть пространством Фреше, если X бесконечномерно). Пространства Y, сопряженные (в смысле определения §2) к пространствам Фреше X впервые рассматривались К.Браунером в [7], и мы будем называть их *пространствами Браунера*. Характеристические свойства этих пространств полезно собрать в одном предложении.

Предложение 0.1. *Для локально-выпуклого пространства Y следующие условия эквивалентны:*

(i) Y является пространством Браунера;

(ii) Y полно, является пространством Келли (то есть всякое множество $M \subseteq Y$, оставляющее замкнутый след $M \cap K$ на любом компакте $K \subseteq Y$, замкнуто в Y) и обладает счетной фундаментальной системой компактов K_n: для всякого компакта $T \subset Y$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$ [1] что $T \subseteq K_n$;

(iii) Y является стереотипным и обладает счетной фундаментальной системой компактов K_n: для всякого компакта $T \subset Y$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$ что $T \subseteq K_n$;

(iv) Y является стереотипным и обладает счетной исчерпывающей системой компактов K_n: $\bigcup_{n=1}^\infty K_n = Y$.

Доказательство. Здесь счетную фундаментальную систему компактов в Y образуют поляры $K_n = {}^\circ U_n$ окрестностей нуля U_n, образующих счетную локальную базу в сопряженном пространстве Фреше $Y^\star$. По модулю этого замечания все утверждения предложения 0.1 очевидны, кроме одного – что пространство Браунера Y всегда является пространством Келли. Этот результат принадлежит К.Браунеру и выводится в его статье [7] как следствие теоремы Банаха-Дьедонне (см. [17]). □

Следствие 0.1. *Если Y – пространство Браунера с фундаментальной системой компактов K_n, то линейное отображение $\varphi : Y \to Z$ в произвольное локально выпуклое пространство Z непрерывно в том и только в том случае, если оно непрерывно на компактах K_n.*

Пример 0.2 (пространства Банаха и Смит). Это частные случаи пространств Фреше и Браунера. Если X – пространство Банаха, то X и $Y = X^\star$ являются стереотипными пространствами. При этом шар B в Y имеет полярой так называемый *универсальный компакт* $K = B^\circ$ в Y, то есть такой компакт,

[1] Всюду в статье символ $\mathbb{N}$ обозначает расширенное множество натуральных чисел: $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, ...\}$.

который поглощает любой другой компакт T в Y. Пространства $Y = X^\star$, сопряженные к пространствам Банаха X первой рассматривала М.Ф.Смит в [31], поэтому мы называем их *пространствами Смит*. Их характеристические свойства собраны в следующем предложении

Предложение 0.2. *Для локально выпуклого пространства Y следующие условия эквивалентны:*

(i) Y является пространством Смит;

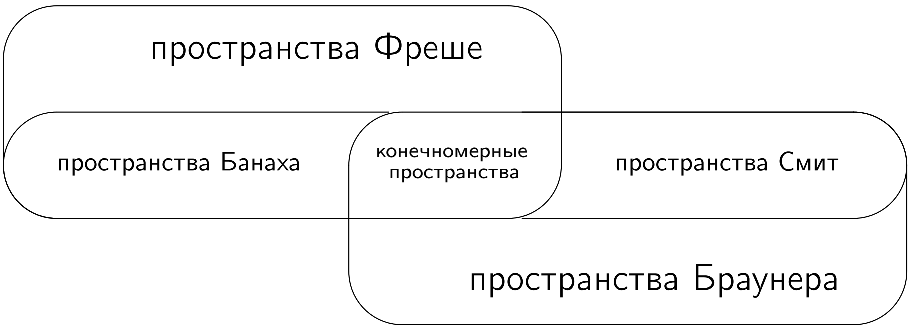
(ii) Y полно, является пространством Келли и обладает универсальным компактом K: для любого компакта $T \subset X$ найдется $\lambda \in \mathbb{C}$ такое что $T \subseteq \lambda K$;

(iii) Y является стереотипным пространством и обладает универсальным компактом;

(iv) Y является стереотипным пространством и обладает компактной бочкой.

Следствие 0.2. *Если Y – пространство Смит с универсальным компактом K, то линейное отображение $\varphi : Y \to Z$ в произвольное локально выпуклое пространство Z непрерывно в том и только в том случае, если оно непрерывно на компакте K.*

Связи между классами пространств Фреше, Браунера, Банаха и Смит можно проиллюстрировать следующей диаграммой (в которой переход к сопряженному классу получается поворотом на 180°):



(b) Пространство Смит, порожденное компактом

Если X – стереотипное пространство, и K – абсолютно выпуклый компакт в X, то через $\mathbb{C}K$ условимся обозначать линейное подпространство в X, порожденное множеством K:

$$\mathbb{C}K = \bigcup_{\lambda>0} \lambda K \tag{0.1}$$

Наделим пространство $\mathbb{C}K$ *топологией Келли, порожденной компактами* λK: множество $M \subseteq \mathbb{C}K$ считается замкнутым в $\mathbb{C}K$, если в пересечении с каждым компактом λK оно дает замкнутое (в X, или, что равносильно, в λK) подмножество $M \cap \lambda K$.

Теорема 0.2. *Топология Келли на $\mathbb{C}K$, порожденная компактами λK, является единственной топологией на $\mathbb{C}K$, превращающей $\mathbb{C}K$ в пространство Смит с универсальным компактом K.*

Доказательство. Обозначим через $(\mathbb{C}K)'$ пространство всех *линейных* функционалов на $\mathbb{C}K$, непрерывных на компакте K:

$$f \in (\mathbb{C}K)' \quad \Longleftrightarrow \quad f : \mathbb{C}K \to \mathbb{C} \quad \& \quad f|_K \in C(K)$$

Ясно, что $(\mathbb{C}K)'$ будет банаховым пространством относительно нормы

$$||f|| = \max_{x\in K} |f(x)|$$

(это формально превращает $(\mathbb{C}K)'$ в замкнутое подпространство в $C(K)$). Заметим, что функционалы $f \in (\mathbb{C}K)'$ разделяют точки компакта K, потому что те из них, которые получаются ограничением на $\mathbb{C}K$ функционалов $g \in X^\star$ уже обладают этим свойством:

$$\forall x, y \in K \qquad \Big(x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \exists g \in X^\star \quad g(x) \neq g(y) \Big)$$

Отсюда следует, что топология σ на K, порожденная функционалами $f \in (\mathbb{C}K)'$, совпадает с исходной топологией τ этого компакта (потому что σ хаусдорфова и мажорируется τ). Это в свою очередь означает, что топология пространства $(\mathbb{C}K)'$ есть топология равномерной сходимости на $(\mathbb{C}K)'$-слабых абсолютно выпуклых компактах вида λK (которые образуют насыщенную систему в $\mathbb{C}K$). Поэтому по теореме Макки-Аренса [32], система $((\mathbb{C}K)')^\star$ линейных непрерывных функционалов на $(\mathbb{C}K)'$ должна совпадать с $\mathbb{C}K$:

$$\mathbb{C}K = ((\mathbb{C}K)')^\star$$

Мы получаем, что $\mathbb{C}K$ можно отождествить с пространством линейных непрерывных функционалов на $(\mathbb{C}K)'$, и как следствие, наделить его топологией сопряженного (в стереотипном смысле) пространства к банахову пространству $(\mathbb{C}K)'$:

$$\mathbb{C}K \cong ((\mathbb{C}K)')^\star \tag{0.2}$$

Эта топология превращает $\mathbb{C}K$ в пространство Смит, и по предложению 0.2 она совпадает с описанной нами топологией Келли на $\mathbb{C}K$, порожденной компактами λK.

Обозначим эту топологию на $\mathbb{C}K$ какой-нибудь буквой, например, $\varkappa$, и покажем, что она единственная обладает таким свойством, что $\mathbb{C}K$ с этой топологией будет пространством Смит с универсальным компактом K. Действительно, если ρ – какая-то другая топология на $\mathbb{C}K$ с тем же свойством, то тождественное отображение

$$(\mathbb{C}K)_\rho \to (\mathbb{C}K)_\varkappa$$

будет непрерывно на компакте K (потому что оно сохраняет топологию K), и значит по следствию 0.2, оно будет непрерывным отображением пространств Смит. Точно также, обратное отображение

$$(\mathbb{C}K)_\varkappa \to (\mathbb{C}K)_\rho$$

будет непрерывно, и это значит, что топологии $\varkappa$ и ρ совпадают. □

Следствие 0.3. *Топология пространства $\mathbb{C}K$ может быть описана эквивалентным образом как топология равномерной сходимости на сходящихся к нулю последовательностях функционалов $\{f_k\} \subset (\mathbb{C}K)'$, то есть как топология, порожденная полунормами вида:*

$$p_{\{f_k\}}(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$$

где f_k – произвольная последовательность линейных функционалов на $\mathbb{C}K$, непрерывных на K, такая, что $\max_{t\in K} |f_k(t)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Предложение 0.3. *Для любых двух абсолютно выпуклых компактов $K, L \subseteq X$ таких что*

$$K \subseteq L,$$

естественное вложение порожденных ими пространств Смит

$$\iota_K^L : \mathbb{C}K \to \mathbb{C}L$$

будет непрерывным отображением.

Доказательство. Отображение ι_K^L непрерывно на компакте K и значит, по следствию 0.2, непрерывно на всем $\mathbb{C}K$. □

(c) Пространство Браунера, порожденное расширяющейся последовательностью компактов

Последовательность абсолютно выпуклых компактов K_n в стереотипном пространстве X назовем *расширяющейся*, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad K_n + K_n \subseteq K_{n+1}$$

Для всякой такой последовательности компактов множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{C}} \lambda K_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

будет векторным подпространством в X. Наделим его *топологией Келли, порожденной компактами K_n*: множество $M \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ считается замкнутым в $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, если в пересечении с каждым компактом K_n оно дает замкнутое (в X, или, что равносильно, в K_n) подмножество $M \cap K_n$. Доказательство следующего утверждения с очевидными изменениями копирует теорему 0.2:

Теорема 0.3. *Топология Келли на $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, порожденная компактами K_n, является единственной топологией на $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, превращающей это пространство в пространство Браунера с фундаментальной системой компактов $\{K_n\}$.*

Следствие 0.4. *Топология пространства $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ может быть описана эквивалентным образом как топология равномерной сходимости на сходящихся к нулю последовательностях функционалов $\{f_k\} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)'$, то есть как топология, порожденная полунормами вида:*

$$p_{\{f_k\}}(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k(x)|$$

где f_k – произвольная последовательность линейных функционалов на $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, непрерывных на каждом K_n, такая, что $\forall n \ \max_{t\in K_n} |f_k(t)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

(d) Проективные системы Банаха и инъективные системы Смит

Пусть X – локально выпуклое пространство. Стандартная в теории топологических векторных пространств конструкция ставит в соответствие произвольной абсолютно выпуклой окрестности нуля U в X некое банахово пространство, которое удобно обозначать X/U и называть *фактор-пространством пространства X по окрестности нуля U*. Определяется оно так: сначала рассматривается множество

$$\mathsf{Ker}\, U = \bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon \cdot U,$$

называемое *ядром окрестности нуля U*, про которое доказывается, что оно является замкнутым подпространством в X (это следует из того, что U абсолютно выпукло); затем рассматривается фактор-пространство $X/\mathsf{Ker}\, U$, которое наделяется (не фактор-топологией, как можно было бы ожидать, а) топологией нормированного пространства с единичным шаром $U + \mathsf{Ker}\, U$; это пространство не всегда будет полно, поэтому его пополняют, и это пополнение объявляется конечным результатом:

$$X/U := (X/\mathsf{Ker}\, U)^{\blacktriangledown} \tag{0.3}$$

(здесь $\blacktriangledown$ означает пополнение).

Теорема 0.4. *Пусть X – стереотипное пространство. Для всякого абсолютно выпуклого компакта $K \subseteq X$ порожденное им пространство Смит $\mathbb{C}K$ связано с фактор-пространством $X^\star/K^\circ$ сопряженного пространства $X^\star$ по окрестности нуля K° формулой*

$$(\mathbb{C}K)^\star = X^\star/K^\circ \tag{0.4}$$

Пусть X – стереотипное пространство и пусть $\mathcal{K}$ – *расширяющаяся* система абсолютно выпуклых компактов в X, то есть удовлетворяющая условию:

$$\forall K, L \in \mathcal{K} \qquad \exists M \in \mathcal{K} \qquad K \cup L \subseteq M$$

По предложению 0.3, для любых двух компактов $K, L \in \mathcal{K}$ таких что $K \subseteq L$, порожденные ими пространства Смит связаны естественным линейным непрерывным отображением $\iota_K^L : \mathbb{C}K \to \mathbb{C}L$. Поскольку, очевидно, для трех компактов $K \subseteq L \subseteq M$ соответствующие отображения связаны равенством

$$\iota_L^M \circ \iota_K^L = \iota_K^M,$$

возникающая система отображений $\{\iota_K^L;\ K, L \in \mathcal{K} : K \subseteq L\}$ является инъективной системой в категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств. Как у любой вообще инъективной системы в $\mathfrak{Ste}$, у нее должен быть предел – им будет псевдопополнение ее локально выпуклого инъективного предела [1, Теорема 4.21]:

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\underset{K\to\infty}{\underrightarrow{\lim}}\ \mathbb{C}K = \left(\mathfrak{LCS}\text{-}\underset{K\to\infty}{\underrightarrow{\lim}}\ \mathbb{C}K\right)^{\triangledown}$$

Двойственная конструкция также часто используется в теории топологических векторных пространств и выглядит так. Пусть X – стереотипное пространство и пусть $\mathcal{U}$ – *сужающаяся* система абсолютно выпуклых замкнутых окрестностей нуля в X, то есть удовлетворяющая следующему условию:

$$\forall U, V \in \mathcal{U} \qquad \exists W \in \mathcal{U} \qquad W \subseteq U \cap V$$

Для любых двух окрестностей нуля $U, V \in \mathcal{U}$ таких что $V \subseteq U$, порожденные ими банаховы пространства $X/\operatorname{Ker} U$ и $X/\operatorname{Ker} V$ связаны естественным линейным непрерывным отображением $\pi_U^V : X/\operatorname{Ker} V \to X/\operatorname{Ker} U$, причем для любых трех окрестностей $W \subseteq V \subseteq U$ соответствующие отображения связаны равенством

$$\pi_U^V \circ \pi_V^W = \pi_U^W,$$

Это означает, что система отображений $\{\pi_U^V;\ U, V \in \mathcal{U} : V \subseteq U\}$ является проективной системой в категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств. Ее пределом будет псевдонасыщение ее локально выпуклого проективного предела [1, Теорема 4.21]:

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varprojlim_{0\leftarrow U} X/U = \left(\mathfrak{LCS}\text{-}\varprojlim_{0\leftarrow U} X/U\right)^{\vartriangle}$$

Из (0.4) следует

Теорема 0.5. *Если $\mathcal{K}$ – расширяющаяся система абсолютно выпуклых компактов в стереотипном пространстве X, то система поляр $\mathcal{U} = \{K^\circ;\ K \in \mathcal{K}\}$ будет сужающейся системой абсолютно выпуклых окрестностей нуля в сопряженном пространстве $X^\star$. Пределы этих систем двойственны друг другу:*

$$\left(\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K\right)^\star = \mathfrak{Ste}\text{-}\varprojlim_{0\leftarrow U} X^\star/K^\circ \tag{0.5}$$

Пример 0.3. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$ – система всех вообще абсолютно выпуклых компактов в X. Тогда пределом инъективной системы $\{\iota_K^L;\ K, L \in \mathcal{K} : K \subseteq L\}$ в категории стереотипных пространств будет насыщение[2] пространства X:

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K = X^\blacktriangle$$

Пример 0.4. Двойственным образом, если $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ – множество всех абсолютно выпуклых окрестностей нуля в X, то пределом проективной системы $\{\pi_U^V;\ U, V \in \mathcal{U} : V \subseteq U\}$ в категории стереотипных пространств является пополнение пространства X:

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varprojlim_{0\leftarrow U} X/U = X^\blacktriangledown$$

Теорема 0.6. *Если K_n – расширяющаяся последовательность абсолютно выпуклых компактов в стереотипном пространстве X, то предел инъективной системы $\mathbb{C}K_n$ в категории стереотипных пространств совпадает с локально выпуклым пределом этой системы и с пространством Браунера, порожденным последовательностью K_n:*

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{n\to\infty} \mathbb{C}K_n = \mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{n\to\infty} \mathbb{C}K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}K_n \tag{0.6}$$

(e) Банахово представление пространства Смит

Если X – банахово пространство (с нормой $||\cdot||_X$), то условимся символом X^* обозначать его *сопряженное банахово пространство* в обычном смысле, то есть пространство линейных непрерывных функционалов на X с нормой

$$||f||_{X^*} = \sup_{||x||_X \leqslant 1} |f(x)|$$

а если $\varphi : X \to Y$ – непрерывное линейное отображение банаховых пространств, то символ $\varphi^* : Y^* \to X^*$ обозначает сопряженное отображение:

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in Y^*$$

Естественное отображение из X в X^{**} будет обозначаться s_X:

$$s_X : X \to X^{**}$$

Пусть Y – пространство Смит с универсальным компактом T. Обозначим через Y^{B} нормированное пространство, носителем которого является Y, а единичным шаром – T.

[2]Насыщение $X^\blacktriangle$ локально выпуклого пространства X было определено в [1, 1.2].

Теорема 0.7. *Справедлива формула*
$$Y^{\mathsf{B}} \cong (Y^\star)^* \tag{0.7}$$
из которой следует, что пространство Y^{B} является (полным и поэтому) банаховым пространством.

Доказательство. Обозначим $X = Y^\star$, тогда Y будет пространством линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве X с топологией равномерной сходимости на компактах в X. Универсальный компакт T в Y будет полярой единичного шара B в X. Если мы наделяем Y топологией, в которой T будет единичным шаром, то это все равно, что задать на Y топологию сопряженного к X нормированного пространства: $Y^{\mathsf{B}} = X^* = (Y^\star)^*$. Поскольку сопряженное к банахову пространству всегда банахово, мы получаем, что Y^{B} тоже банахово. $\square$

Пространство Y^{B} мы называем *банаховым представлением* пространства Смит Y. Отметим, что естественное отображение
$$\iota_Y : Y^{\mathsf{B}} \to Y, \quad \iota_Y(y) = y$$
универсально в следующем смысле: для любого банахова пространства Z и всякого линейного непрерывного отображения $\varphi : Z \to Y$ найдется единственное линейное непрерывное отображение $\chi : Z \to Y^{\mathsf{B}}$, замыкающее диаграмму:
$$\begin{tikzcd}
Y^{\mathsf{B}} \arrow[rr, "\iota_Y"] & & Y \\
& Z \arrow[ul, dashed, "\chi"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Если $\varphi : X \to Y$ – линейное непрерывное отображение пространств Смит, то универсальный компакт S в X оно переводит в компакт $\varphi(S)$ в Y, который, как любой другой компакт, обязан содержаться в некоторой гомотетии универсального компакта T в Y:
$$\varphi(S) \subseteq \lambda T, \qquad \lambda > 0$$

Это означает, что отображение φ, рассматриваемое как отображение соответствующих банаховых представлений $X^{\mathsf{B}} \to Y^{\mathsf{B}}$, также будет непрерывно. Мы будем обозначать это отображение символом φ^{B}:
$$\varphi^{\mathsf{B}} : X^{\mathsf{B}} \to Y^{\mathsf{B}}$$
и называть его *банаховым представлением отображения* φ. Очевидно, φ^{B} представляется в виде
$$\varphi^{\mathsf{B}} \cong (\varphi^\star)^* \tag{0.8}$$
и замыкает диаграмму
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] & Y \\
X^{\mathsf{B}} \arrow[u, "\iota_X"] \arrow[r, "\varphi^{\mathsf{B}}"'] & Y^{\mathsf{B}} \arrow[u, "\iota_Y"']
\end{tikzcd}$$

(f) Инъективные системы пространств Банаха, порожденные компактами

В теории топологических векторных пространств часто используется следующая конструкция. Если B – ограниченное абсолютно выпуклое замкнутое множество в локально выпуклом пространстве X, то символом X_B обозначают пространство $\bigcup_{\lambda>0} \lambda B$, наделенное топологией нормированного пространства с единичным шаром B. Если X_B оказывается полным (то есть банаховым) пространством, то множество B называется *банаховым диском*. Из теоремы 0.7 следует

Предложение 0.4. *Всякий абсолютно выпуклый компакт K в стереотипном пространстве X является банаховым диском, а порожденное этим диском банахово пространство X_K является банаховым представлением пространства Смит $\mathbb{C}K$:*
$$X_K = (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}$$

Если $\mathcal{K}$ – расширяющаяся система абсолютно выпуклых компактов в стереотипном пространстве X, то, как мы уже говорили, она порождает инъективную систему пространств Смит
$$\{\mathbb{C}K\}_{K\in\mathcal{K}}, \qquad \iota_K^L : \mathbb{C}K \to \mathbb{C}L \qquad (K, L \in \mathcal{K}, \quad K \subseteq L).$$

Специалисты по топологическим векторным пространством предпочитают рассматривать вместо такой системы Смит, систему пространств Банаха, порожденных дисками $K \in \mathcal{K}$:

$$\{(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}\}_{K\in\mathcal{K}}, \qquad (\iota_K^L)^{\mathsf{B}} : (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \to (\mathbb{C}L)^{\mathsf{B}} \qquad (K, L \in \mathcal{K}, \quad K \subseteq L)$$

Следующий результат показывает, что пределы таких систем совпадают в важном случае, когда инъекции $\iota_K^L : \mathbb{C}K \to \mathbb{C}L$ представляют собой компактные отображения.

Теорема 0.8. *Пусть $\mathcal{K}$ – расширяющаяся система абсолютно выпуклых компактов в стереотипном пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны*

(i) для всякого компакта $K \in \mathcal{K}$ найдется такой компакт $L \in \mathcal{K}$, что $K \subseteq L$ и отображение пространств Смит $\iota_K^L : \mathbb{C}K \to \mathbb{C}L$ компактно,

(ii) для всякого компакта $K \in \mathcal{K}$ найдется такой компакт $L \in \mathcal{K}$, что $K \subseteq L$ и отображение пространств Банаха $(\iota_K^L)^{\mathsf{B}} : (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \to (\mathbb{C}L)^{\mathsf{B}}$ компактно,

и если они выполняются, то локально выпуклые инъективные пределы систем $\{\mathbb{C}K\}_{K\in\mathcal{K}}$ и $\{(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}\}_{K\in\mathcal{K}}$ совпадают,

$$\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K = \mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \tag{0.9}$$

и то же справедливо для их стереотипных инъективных пределов:

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K = \mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \tag{0.10}$$

Если вдобавок к (i)-(ii) *система $\mathcal{K}$ счетна (или содержит счетную конфинальную подсистему), то все эти четыре предела равны*

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K = \mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K = \mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} = \mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \tag{0.11}$$

и определяют пространство Браунера.

Доказательству этой теоремы мы предпошлем несколько вспомогательных предложений.

Прежде всего отметим, что под *компактным отображением* стереотипных пространств мы понимаем то же, что обычно – линейное непрерывное отображение $\varphi : X \to Y$ такое, что

$$\varphi(U) \subseteq T$$

для некоторой окрестности нуля $U \subseteq X$ и некоторого компакта $T \subseteq Y$.

Предложение 0.5. *Пусть X и Y – пространства Смит и $\varphi : X \to Y$ – линейное непрерывное отображение. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varphi : X \to Y$ – компактное отображение;

(ii) $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ – компактное отображение;

(iii) $\varphi^{\mathsf{B}} : X^{\mathsf{B}} \to Y^{\mathsf{B}}$ – компактное отображение.

Доказательство. Эквивалентность (i)⇔(ii) очевидна, а (ii)⇔(iii) следует из представления (0.8) и классического результата о компактных отображениях [30, Теорема 4.19]. □

Предложение 0.6. *Если $\varphi : X \to Y$ – компактное отображение банаховых пространств, то его (сильное) второе сопряженное отображение $\varphi^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ переводит X^{**} в Y:*

$$\varphi^{**}(X^{**}) \subseteq Y \tag{0.12}$$

Доказательство. Пусть B – единичный шар в X и T – компакт в Y такой что

$$\varphi(B) \subseteq T$$

По теореме о биполяре, B будет X^*-слабо плотен в единичном шаре $B^{\circ\circ}$ пространства X^{**}. Поэтому для всякого $z \in B^{\circ\circ}$ можно выбрать направленность $z_i \in B$ сходящуюся X^*-слабо к z

$$B \ni z_i \overset{X^*\text{-слабо}}{\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}} z \in B^{\circ\circ} \tag{0.13}$$

Поскольку φ, как всякий компактный оператор, переводит X^*-слабые направленности Коши в сильные направленности Коши, получается, что $\varphi(z_i)$ будет направленностью Коши в компакте T, значит она сходится к некоторому $y \in T$.

$$\varphi(z_i) \underset{i\to\infty}{\overset{Y}{\longrightarrow}} y$$

Отсюда следует:

$$\forall g \in Y^* \qquad \varphi^{**}(z_i)(g) = \varphi * (g)(z_i) = g(\varphi(z_i)) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} g(y) = \mathsf{i}_Y(y)(g) \tag{0.14}$$

(где $\mathsf{i}_Y : Y \to Y^{**}$ – естественное вложение).

С другой же стороны, из (0.13) получаем также

$$\forall f \in X^* \qquad f(z_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(z)$$

и, в частности, это должно быть верно для функционалов $f = \varphi * (g) = g \circ \varphi$, где $g \in Y^*$:

$$\forall g \in Y^* \qquad \varphi^{**}(z_i)(g) = \varphi * (g)(z_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \varphi * (g)(z) = \varphi^{**}(z)(g) \tag{0.15}$$

Из (0.14) и (0.15) получаем

$$\varphi^{**}(z) = y$$

То есть $\varphi^{**}(z) \in Y$. Поскольку это верно для всякой точки $z \in B^{\circ\circ}$, справедливо (0.12). $\square$

Предложение 0.7. *Пусть $\varphi : X \to Y$ – линейное непрерывное отображение стереотипных пространств. Для всякого абсолютно выпуклого замкнутого множества $V \subseteq Y$ справедлива формула*

$$\varphi^{-1}(V) = {}^\circ\Big(\varphi^\star(V^\circ)\Big) \tag{0.16}$$

Доказательство.

$$x \in {}^\circ\Big(\varphi^\star(V^\circ)\Big) \iff \forall g \in V^\circ \quad |\varphi^\star(g)(x)| = |g(\varphi(x))| \leqslant 1 \iff$$
$$\iff \varphi(x) \in {}^\circ(V^\circ) = V \iff x \in \varphi^{-1}(V)$$

$\square$

Предложение 0.8. *Пусть $\sigma : X \to Y$ компактное отображение пространств Смит, и V – абсолютно выпуклая замкнутая окрестность нуля в банаховом представлении Y^{B} пространства Y. Тогда ее прообраз $(\sigma^{\mathsf{B}})^{-1}(V) = \sigma^{-1}(V)$ является окрестностью нуля в пространстве X (а не только в его банаховом представлении X^{B}).*

$$\begin{tikzcd} X^{\mathsf{B}} \arrow[r, "\sigma^{\mathsf{B}}"] \arrow[d, "\iota_X"'] & Y^{\mathsf{B}} \arrow[d, "\iota_Y"] \\ X \arrow[r, "\sigma"] & Y \end{tikzcd}$$

Доказательство. По формуле (0.8), σ^{B} можно считать отображением пространств, сильно сопряженных к банаховым пространствам $X^\star$ и $Y^\star$:

$$\sigma^{\mathsf{B}} = (\sigma^\star)^* : (X^\star)^* \to (Y^\star)^*$$

Рассмотрим сильное сопряженное отображение $(\sigma^{\mathsf{B}})^* = (\sigma^\star)^{**} : (Y^\star)^{**} \to (X^\star)^{**}$. Поскольку $\sigma^\star$ компактно, по предложению 0.6,

$$(\sigma^\star)^{**}\Big((Y^\star)^{**}\Big) \subseteq X^\star$$

Наглядно это можно изобразить в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd} (X^\star)^{**} & (Y^\star)^{**} \arrow[l, "(\sigma^\star)^{**}"'] \arrow[dl, dashed] \\ X^\star \arrow[u, "\mathsf{i}_X"] & Y^\star \arrow[l, "\sigma^\star"] \arrow[u, "\mathsf{i}_Y"'] \end{tikzcd}$$

Теперь получаем:

$$V \text{ – окрестность нуля в } Y^{\mathsf{B}} = (Y^\star)^*$$

$$\Downarrow$$

$$V^\circ \text{ – ограниченное множество в } (Y^\star)^{**}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma^\star)^{**}(V^\circ) \text{ – вполне ограниченное множество в } (X^\star)^{**}$$
$$\text{(потому что } (\sigma^\star)^{**} \text{ – компактное отображение)} \quad \& \quad (\sigma^\star)^{**}(V^\circ) \subseteq X^\star$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma^\star)^{**}(V^\circ) \text{ – вполне ограниченное множество в } X^\star$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma^{\mathsf{B}})^{-1}(V) = (0.16) = {}^\circ\Big((\sigma^{\mathsf{B}})^*(V^\circ)\Big) = {}^\circ\Big((\sigma^\star)^{**}(V^\circ)\Big) \text{ – окрестность нуля в } X$$

□

Доказательство теоремы 0.8. Равносильность (i) и (ii) есть непосредственное следствие предложения 0.5. Формула (0.9) затем следует из предложения 0.8: если U – замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в $\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}$, то есть $U = \{U_K;\ K \in \mathcal{K}\}$ – система окрестностей нуля в пространствах $(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}$, подчиненных условию

$$\forall K, L \in \mathcal{K} \qquad \Big(K \subseteq L \quad \Longrightarrow \quad U_K = (\iota_K^L)^{-1}(U_L)\Big)$$

то из предложения 0.8 следует, что все эти окрестности будут окрестностями нуля в пространствах $\mathbb{C}K$. Это доказывает непрерывность отображения

$$\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} \mathbb{C}K \to \mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty} (\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}$$

Непрерывность обратного отображения очевидна. Таким образом, топологии на этих пространствах совпадают, и отсюда следует, что эти пределы равны, то есть выполняется (0.9). Из нее в свою очередь следует (0.10). Наконец, если $\mathcal{K}$ счетно, то по теореме 0.6 локально выпуклые пределы совпадают со стереотипными, и поэтому справедливы равенства (0.11) . □

(g) Ядерные стереотипные пространства

Отображение стереотипных пространств $\varphi : X \to Y$ мы называем *ядерным*, если оно удовлетворяет следующим равносильным условиям:

(i) существуют последовательности

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X^\star} 0, \qquad b_n \xrightarrow[n\to\infty]{Y} 0, \qquad \lambda_n \geqslant 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

такие, что

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot f_n(x) \cdot b_n, \qquad x \in X; \tag{0.17}$$

(ii) существуют вполне ограниченные последовательности $\{f_n\}$ в $X^\star$, $\{b_n\}$ в Y, и числовая последовательность $\lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ такие, что выполняется (0.17);

(iii) существуют ограниченные последовательности $\{f_n\}$ в $X^\star$, $\{b_n\}$ в Y, и числовая последовательность $\lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ такие, что выполняется (0.17).

(iv) существуют равностепенно непрерывная на X последовательность функционалов $\{f_n\} \subseteq X^\star$, последовательность векторов $\{b_n\}$, содержащаяся в некотором банаховом диске $B \subset Y$, и числовая последовательность $\lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ такие, что выполняется (0.17).

Ясно, что ядерное отображение всегда непрерывно.

Доказательство. Импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) здесь очевидны, докажем сначала импликацию (iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть выполняется (iii), то есть в формуле (0.17) последовательности $\{f_n\} \subset X^\star$ и $\{b_n\} \subset Y$ считаются просто ограниченными. Тогда подобрав числовую последовательность $\sigma_n > 0$ так, чтобы

$$\sigma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \sigma_n < \infty$$

(это всегда можно сделать, например, обозначив $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = C$, затем разбив последовательность λ_n на блоки $\sum_{n_k<n\leqslant n_{k+1}} \lambda_n \leqslant \frac{C}{2^k}$, $k \geqslant 0$, $n_0 = 0$, и положив $\sigma_n = k+1$ при $n_k < n \leqslant n_{k+1}$), можно будет поменять f_n, b_n, λ_n на последовательности

$$\widetilde{f_n} := \frac{f_n}{\sqrt{\sigma_n}}, \qquad \widetilde{b_n} := \frac{b_n}{\sqrt{\sigma_n}}, \qquad \widetilde{\lambda_n} := \lambda_n \cdot \sigma_n,$$

потому что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\lambda_n} \cdot \widetilde{f_n}(x) \cdot \widetilde{b_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot \sigma_n \cdot \frac{f_n(x)}{\sqrt{\sigma_n}} \cdot \frac{b_n}{\sqrt{\sigma_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot f_n(x) \cdot b_n = \varphi(x)$$

и при этом из ограниченности f_n и b_n будет следовать, что $\widetilde{f_n}$ и $\widetilde{b_n}$ стремятся к нулю

$$\widetilde{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \widetilde{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\lambda_n} < \infty$$

то есть выполняется (i).

Теперь остается показать, что условия (i)-(iii) равносильны условию (iv), то есть стандарному определению ядерного отображения [32, 17]. Здесь очевидна импликация (iv)$\Rightarrow$(iii). А с другой стороны, справедливо (ii)$\Rightarrow$(iv): из (ii) следует, что последовательность функционалов $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на X, как вполне ограниченная в $X^\star$ [1, теорема 2.5], а последовательность $\{b_n\}$ принадлежит банахову диску $T = \overline{\mathsf{absconv}}\{b_n\}$ по теореме 0.4, и таким образом, выполняется (iv). $\square$

Теорема 0.9. *Отображение стереотипных пространств $\varphi : X \to Y$ тогда и только тогда ядерно, когда его сопряженное отображение $\varphi^\star : Y^\star \to X^\star$ ядерно.*

Отображение стереотипных пространств $\varphi : X \to Y$ мы называем *квазиядерным*, если для всякого компакта $T \subset Y^\star$ существуют равностепенно непрерывная на X последовательность функционалов $\{f_n\} \subseteq X^\star$ и числовая последовательность $\lambda_n \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ такие, что

$$\max_{g\in T} |g\Big(\varphi(x)\Big)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f_n(x)| \tag{0.18}$$

Если X и Y – банаховы пространства, то квазиядерность $\varphi : X \to Y$ означает выполнение неравенства

$$||\varphi(x)||_Y \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |f_n(x)| \tag{0.19}$$

где $||\cdot||_Y$ – норма в Y, f_n – ограниченная последовательность функционалов на X, λ_n – суммируемая числовая последовательность.

Лемма 0.1. *Пусть $\varphi : X \to Y$ – непрерывное отображение банаховых пространств, и пусть $\varphi^* : Y^* \to X^*$ его банахово сопряженное отображение. Тогда*

– *если φ ядерно, то φ^* тоже ядерно,*

– *если φ^* ядерно, то φ квазиядерно.*

Доказательство. Первое утверждение здесь очевидно (и известно, см. [25, 3.1.8]) и влечет за собой второе: если $\varphi^* : Y^* \to X^*$ ядерно, то $\varphi^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ тоже ядерно, и поэтому квазиядерно. Отсюда следует, что φ тоже квазиядерно, поскольку его можно считать ограничением (и коограничением) квазиядерного отображения φ^{**} на подпространство $X \subseteq X^{**}$ (и $Y \subseteq Y^{**}$). $\square$

Стереотипное пространство X мы, как обычно, называем *ядерным* [25], если любое его непрерывное линейное отображение в произвольное банахово пространство $X \to Y$ ядерно.

Теорема 0.10 (Браунер, [7]). *Пространство Браунера X ядерно в том и только в том случае, если ядерно сопряженное пространство Фреше $X^\star$.*

Теорема 0.11. *Пусть $\mathcal{K}$ – расширяющаяся система абсолютно выпуклых компактов в стереотипном пространстве X. Тогда следующие условия эквивалентны*

(i) для всякого компакта $K\in\mathcal{K}$ найдется такой компакт $L\in\mathcal{K}$, что $K\subseteq L$ и отображение пространств Смит $\iota_K^L:\mathbb{C}K\to\mathbb{C}L$ ядерно,

(ii) для всякого компакта $K\in\mathcal{K}$ найдется такой компакт $L\in\mathcal{K}$, что $K\subseteq L$ и отображение пространств Банаха $(\iota_K^L)^{\mathsf{B}}:(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}\to(\mathbb{C}L)^{\mathsf{B}}$ ядерно,

и если они выполняются, то локально выпуклые инъективные пределы систем $\{\mathbb{C}K\}_{K\in\mathcal{K}}$ и $\{(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}\}_{K\in\mathcal{K}}$ совпадают,

$$\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}\mathbb{C}K=\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \tag{0.20}$$

и то же справедливо для их стереотипных инъективных пределов:

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}\mathbb{C}K=\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}. \tag{0.21}$$

Если вдобавок к (i)-(ii) *система $\mathcal{K}$ счетна (или содержит счетную конфинальную подсистему), то все эти четыре предела равны*

$$\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}\mathbb{C}K=\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}\mathbb{C}K=\mathfrak{LCS}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}}=\mathfrak{Ste}\text{-}\varinjlim_{K\to\infty}(\mathbb{C}K)^{\mathsf{B}} \tag{0.22}$$

и определяют ядерное пространство Браунера.

Доказательство. Здесь все утверждения следуют из теоремы 0.8, за исключением эквивалентности (i) и (ii).

(i)$\Longrightarrow$(ii). Если ι_K^L ядерно, то $(\iota_K^L)^\star$ ядерно по теореме 0.9, значит $(\iota_K^L)^{\mathsf{B}}=((\iota_K^L)^\star)^*$ ядерно по лемме 0.1.

(i)$\Longrightarrow$(ii). Для данного компакта K выберем компакт $L\supseteq K$ так, чтобы $(\iota_K^L)^{\mathsf{B}}$ было ядерно, а затем таким же образом выберем компакт $M\supseteq L$, чтобы $(\iota_L^M)^{\mathsf{B}}$ было тоже ядерно. Тогда из ядерности $(\iota_K^L)^{\mathsf{B}}=((\iota_K^L)^\star)^*$ и $(\iota_L^M)^{\mathsf{B}}=((\iota_L^M)^\star)^*$ по лемме 0.1 следует, что $(\iota_K^L)^\star$ и $(\iota_L^M)^\star$ квазиядерны. Отсюда $(\iota_K^L)^\star\circ(\iota_L^M)^\star$ будет ядерно как композиция квазиядерных отображений [25, 3.3.2]. Теперь по теореме 0.9, $\iota_L^M\circ\iota_K^L=\iota_K^M$ будет ядерно, как стереотипное сопряженное отображение. $\square$

(h) Пространства $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$

Пространства $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$, о которых пойдет речь в этом пункте, принято упоминать в учебниках по топологическим векторным пространствам в качестве предмета для упражнений ([5, Глава IV,§1, Упр. 11,13], [32, Глава IV, Упр. 6]). Мы приведем здесь некоторые их свойства для дальнейших ссылок.

Пространство функций $\mathbb{C}^M$. Пусть M – произвольное множество. Обозначим через $\mathbb{C}^M$ локально выпуклое пространство всех комплекснозначных функций на M,

$$u\in\mathbb{C}^M \quad\Longleftrightarrow\quad u:M\to\mathbb{C}$$

с поточечными алгебраическими операциями, и топологией поточечной сходимости на M, то есть топологией, порожденной системой полунорм

$$|u|_N=\sup_{x\in N}|u(x)| \tag{0.23}$$

где N – произвольное конечное множество в M. Пространство $\mathbb{C}^M$ будем называть *пространством функций на множестве M*. Можно заметить, что пространство функций $\mathbb{C}^M$ изоморфно прямому произведению $\mathsf{card}\,M$ копий поля $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}^M\cong\mathbb{C}^{\mathsf{card}\,M}$$

и поэтому $\mathbb{C}^M$ всегда ядерно (ядерность наследуется прямыми произведениями [32, Теорема 7.4]).

Теорема 0.12. *Для локально выпуклого пространства X над полем $\mathbb{C}$ следующие условия эквивалентны:*

(a) $X \cong \mathbb{C}^M$ *для некоторого множества* M*;*

(b) X *является полным пространством со слабой топологией*[3]*;*

(c) X *является пространством минимального типа*[4].

Теорема 0.13. $\mathbb{C}^M$ *будет пространством Фреше тогда и только тогда, когда множество* M *не более чем счетно.*

Пространство точечных зарядов $\mathbb{C}_M$. Пусть снова M – произвольное множество. Обозначим символом $\mathbb{C}_M$ пространство всех числовых семейств $\{\alpha_x;\ x \in M\}$, индексированных элементами M, и удовлетворяющих условию финитности (все числа α_x, кроме конечного набора должны быть равны нулю):

$$\alpha \in \mathbb{C}_M \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \{\alpha_x;\ x \in M\}, \quad \alpha_x \in \mathbb{C}, \quad \mathsf{card}\{x \in M :\ \alpha_x \neq 0\} < \infty \tag{0.24}$$

(понятно, что семейства $\{\alpha_x;\ x \in M\}$ можно с таким же успехом считать функциями $\alpha : M \to \mathbb{C}$ с конечным носителем). Пространство $\mathbb{C}_M$ наделяется топологией, порождаемой полунормами вида

$$|\alpha|_r = \sup_{|u| \leqslant r} |\langle u, \alpha \rangle| = \sum_{x \in G} r(x) \cdot |\alpha_x| \tag{0.25}$$

где $r : G \to \mathbb{R}_+$ – произвольная положительная функция на M. Пространство $\mathbb{C}_M$ мы будем называть *пространством точечных зарядов* на множестве M (а его элементы – точечными зарядами на M). Можно заметить, что пространство $\mathbb{C}_M$ изоморфно локально выпуклой прямой сумме $\mathsf{card}\, M$ копий поля $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}_M \cong \mathbb{C}_{\mathsf{card}\, M}.$$

Как следствие, $\mathbb{C}_M$ будет ядерно если и только если M имеет не более чем счетную мощность (ядерность наследуется счетными прямыми суммами [32, Теорема 7.4], а если M несчетно, то вложение $\mathbb{C}_M \to \ell_1(M)$ будет неядерным отображением).

Теорема 0.14. *Для локально выпуклого пространства* X *над полем* $\mathbb{C}$ *следующие условия эквивалентны:*

(a) $X \cong \mathbb{C}_M$ *для некоторого множества* M*;*

(b) X *является кополным*[5] *пространством Макки, в котором каждый компакт конечномерен;*

(c) *топология пространства* X *максимальна в классе локально выпуклых топологий на* X *(то есть на* X *не существует более сильной локально выпуклой топологии).*

Следующая теорема, в существенной части принадлежит С.Какутани и В.Кли [18]:

Теорема 0.15. $\mathbb{C}_M$ *будет пространством Браунера тогда и только тогда, когда множество* M *не более чем счетно. В этом (и только в этом) случае топология* $\mathbb{C}_M$ *совпадает с так называемой* конечной топологией *на* $\mathbb{C}_M$ *(множество* A *считается замкнутым в конечной топологии, если оно оставляет замкнутый след на каждом конечномерном подпространстве* $F \subseteq \mathbb{C}_M$*, то есть, если* $A \cap F$ *замкнуто в* F*).*

Двойственность между $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$.

Теорема 0.16. *Билинейная форма*

$$\langle u, \alpha \rangle = \sum_{x \in M} u(x) \cdot \alpha_x, \qquad u \in \mathbb{C}^M,\ \alpha \in \mathbb{C}_M \tag{0.26}$$

превращает $\mathbb{C}^M$ *и* $\mathbb{C}_M$ *в дуальную пару* $\langle \mathbb{C}^M, \mathbb{C}_M \rangle$ *стереотипных пространств:*

[3] Локально выпуклое пространство X называется *пространством со слабой топологией*, если его топология порождена полунормами вида $|x|_f = |f(x)|$, где f – всевозможные линейные непрерывные функционалы на X.

[4] Локально выпуклое пространство X называется *пространством минимального типа*, если его топология обладает тем свойством, что на X не существует более слабой отделимой локально выпуклой топологии.

[5] Мы называем локально выпуклое пространство X *кополным*, если всякий линейный функционал $f : X \to \mathbb{C}$, непрерывный на каждом компакте $K \subset X$, автоматически непрерывен на X.

(i) *всякий точечный заряд $\alpha \in \mathbb{C}_M$ порождает линейный непрерывный функционал f на $\mathbb{C}^M$ по формуле*

$$f(u) = \langle u, \alpha\rangle, \qquad u \in \mathbb{C}^M$$

причем отображение $\alpha \mapsto f$ является изоморфизмом локально выпуклых пространств

$$\mathbb{C}_M \cong (\mathbb{C}^M)^\star;$$

(ii) *наоборот, всякая функция $u \in \mathbb{C}^M$ порождает линейный непрерывный функционал f на $\mathbb{C}_M$ по формуле*

$$f(\alpha) = \langle u, \alpha\rangle, \qquad \alpha \in \mathbb{C}_M$$

причем отображение $u \mapsto f$ является изоморфизмом локально выпуклых пространств

$$\mathbb{C}^M \cong (\mathbb{C}_M)^\star.$$

Базисы в $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$. *Базисом* в топологическом векторном пространстве X над полем $\mathbb{C}$ мы условимся называть всякое такое семейство векторов $\{e_i;\ i \in I\}$ в X, что любой вектор $x \in X$ можно единственным образом представить в виде суммы сходящегося в X ряда

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i \tag{0.27}$$

коэффициенты которого $\lambda_i = \lambda_i(x)$ непрерывно зависят от $x \in X$. Суммируемость ряда (0.27) при этом понимается в смысле Бурбаки [6]: для всякой окрестности нуля U в X найдется конечное множество $J \subseteq I$ такое, что для любого его конечного надмножества K, $J \subseteq K \subseteq I$ выполняется включение

$$x - \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot e_i \in U$$

(из этого определения следует, что для сходимости ряда (0.27) число ненулевых слагаемых в нем не обязано быть конечным или счетным).

Теорема 0.17. *Характеристические функции $\{1_x;\ x \in G\}$ одноэлементных множеств $\{x\} \subseteq M$:*

$$1_x(y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}, \qquad y \in M \tag{0.28}$$

образуют базис в топологическом векторном пространстве $\mathbb{C}^M$: всякая функция $u \in \mathbb{C}^M$ однозначно раскладывается в ряд

$$u = \sum_{x\in M} u(x) \cdot 1_x \tag{0.29}$$

коэффициенты которого $u(x) \in \mathbb{C}$ непрерывно зависят от $u \in \mathbb{C}^M$.

Теорема 0.18. *Характеристические функции одноэлементных множеств $\{x\} \subseteq M$, которые в этом случае удобно обозначать символами Кронекера $\{\delta^x;\ x \in G\}$:*

$$\delta^x(y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}, \qquad y \in M \tag{0.30}$$

образуют базис в топологическом векторном пространстве $\mathbb{C}_M$: всякий точечный заряд $\alpha \in \mathbb{C}_M$ однозначно раскладывается в ряд

$$\alpha = \sum_{x\in M} \alpha_x \cdot \delta^x \tag{0.31}$$

коэффициенты которого $\alpha_x \in \mathbb{C}$ непрерывно зависят от $\alpha \in \mathbb{C}_M$.

Теорема 0.19. *Справедливо равенство*

$$\langle 1_x, \delta^y\rangle = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

означающее, что базисы $\{1_x;\ x \in M\}$ (в $\mathbb{C}^M$) и $\{\delta^x;\ x \in M\}$ (в $\mathbb{C}_M$) сопряжены друг другу.

Теорема 0.20. *В пространствах $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$ любые два базиса можно отобразить друг на друга с помощью некоторого автоморфизма (линейного гомеоморфизма пространства на себя).*

§ 1 Стереотипные алгебры Хопфа

(a) Тензорные произведения и структура моноидальной категории на $\mathfrak{Ste}$

Если X и Y – два стереотипных пространства, то символом $Y : X$ обозначается множество всех линейных непрерывных отображений $\varphi : X \to Y$, наделенное топологией равномерной сходимости на вполне ограниченных множествах в X. А символом $Y \oslash X$ – псевдонасыщение этого пространства:

$$Y \oslash X = (Y : X)^{\vartriangle}$$

(операция псевдонасыщения $\vartriangle$ представляет собой некое специальное усиление топологии исходного пространства – см. [1, §1]). Пространство $Y \oslash X$ всегда стереотипно (если X и Y стереотипны).

В категории $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств имеются два естественных тензорных произведения:

– проективное стереотипное тензорное произведение, определяемое равенством

$$X \circledast Y = (X^\star \oslash Y)^\star;$$

для которого элементарный тензор $x \circledast y \in X \circledast Y$ $(x \in X,\ y \in Y)$ определяется формулой

$$x \circledast y(\varphi) = \varphi(y)(x), \qquad \varphi \in X^\star \oslash Y; \tag{1.1}$$

– инъективное стереотипное тензорное произведение, определяемое равенством

$$X \odot Y = X \oslash Y^\star;$$

соответствующий элементарный тензор $x \odot y \in X \odot Y$ $(x \in X,\ y \in Y)$ определяется формулой

$$x \odot y(f) = f(y) \cdot x, \qquad f \in Y^\star. \tag{1.2}$$

Эти операции связаны друг с другом естественными изоморфизмами функторов

$$\mathsf{d} : (X \circledast Y)^\star \cong X^\star \odot Y^\star, \qquad \mathsf{e} : (X \odot Y)^\star \cong X^\star \circledast Y^\star$$

Теорема 1.1. *Тождества*

$$\mathsf{a}^{\circledast}_{X,Y,Z}\Big((x \circledast y) \circledast z\Big) = x \circledast (y \circledast z) \qquad x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z \tag{1.3}$$

$$\mathsf{l}^{\circledast}_X(\lambda \circledast x) = \lambda \cdot x = \mathsf{r}^{\circledast}_X(x \circledast \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in X \tag{1.4}$$

$$\mathsf{c}^{\circledast}_X(x \circledast y) = y \circledast x \qquad x \in X, \quad y \in Y \tag{1.5}$$

однозначно определяют естественные преобразования функторов в категории $\mathfrak{Ste}$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{a}^{\circledast}_{X,Y,Z} : (X \circledast Y) \circledast Z \to X \circledast (Y \circledast Z)\\
&\mathsf{l}^{\circledast}_X : \mathbb{C} \circledast X \to X\\
&\mathsf{r}^{\circledast}_X : X \circledast \mathbb{C} \to X\\
&\mathsf{c}^{\circledast}_{X,Y} : X \circledast Y \to Y \circledast X
\end{aligned}$$

необходимо являющиеся изоморфизмами функторов и задающие на $\mathfrak{Ste}$ *структуру симметрической моноидальной категории [4, 23] относительно бифунктора* $\circledast$.

Перед формулировкой следующей теоремы нам будет полезно договориться обозначить каким-нибудь специальным символом, например, h, отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^\star$, которое каждому числу $\lambda \in \mathbb{C}$ ставит в соответствие линейный функционал на $\mathbb{C}$, действующий как умножение на λ:

$$\mathsf{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star \quad \Big| \quad \mathsf{h}(\lambda)(\mu) = \lambda \cdot \mu \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}) \tag{1.6}$$

Очевидно, $\mathsf{h} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$ является изоморфизмом (конечномерных) стереотипных пространств.

Теорема 1.2. *Формулы*

$$\mathsf{a}^{\odot}_{X,Y,Z} = \Big(\mathsf{i}_X \odot (\mathsf{i}_Y \odot \mathsf{i}_Z) \circ 1_{X^{\star\star}} \odot \mathsf{d}^{-1}_{Y^\star, Z^\star} \circ \mathsf{d}^{-1}_{X^\star, Y^\star \circledast Z^\star} \circ (\mathsf{a}^{\circledast}_{X^\star, Y^\star, Z^\star})^\star \circ$$

$$\circ\, \mathsf{d}_{X^\star \circledast Y^\star, Z^\star} \circ \mathsf{d}_{X^\star, Y^\star} \odot 1_{Z^{\star\star}} \circ (\mathsf{i}_{X^\star}^{-1} \odot \mathsf{i}_{Y^\star}^{-1}) \odot \mathsf{i}_{Z^\star}^{-1} \Big)^\star$$

$$\mathsf{l}^\odot_X = \left(\mathsf{h}^{-1} \odot \mathsf{i}_X^{-1} \circ \mathsf{d}_{\mathbb{C}, X^\star} \circ (\mathsf{l}^\circledast_{X^\star})^\star \circ \mathsf{i}_X\right)^{-1}$$

$$\mathsf{r}^\odot_X = \left(\mathsf{i}_X^{-1} \odot \mathsf{h}^{-1} \circ \mathsf{d}_{X^\star, \mathbb{C}} \circ (\mathsf{r}^\circledast_{X^\star})^\star \circ \mathsf{i}_X\right)^{-1}$$

$$\mathsf{c}^\odot_{X,Y} = \left(\mathsf{i}_X^{-1} \odot \mathsf{i}_Y^{-1} \circ \mathsf{d}_{X^\star, Y^\star} \circ (\mathsf{c}^\circledast_{X^\star, Y^\star})^\star \circ (\mathsf{d}_{Y^\star, X^\star})^{-1} \circ \mathsf{i}_Y \odot \mathsf{i}_X\right)^{-1}$$

определяют изоморфизмы функторов в категории $\mathfrak{Ste}$

$$\begin{aligned} &\mathsf{a}^\odot_{X,Y,Z} : (X \odot Y) \odot Z \to X \odot (Y \odot Z) \\ &\mathsf{l}^\odot_X : \mathbb{C} \odot X \to X \\ &\mathsf{r}^\odot_X : X \odot \mathbb{C} \to X \\ &\mathsf{c}^\odot_{X,Y} : X \odot Y \to Y \odot X \end{aligned}$$

удовлетворяющие тождествам

$$\mathsf{a}^\odot_{X,Y,Z}\Big((x \odot y) \odot z\Big) = x \odot (y \odot z) \qquad x \in X, \quad y \in Y, \quad z \in Z \tag{1.7}$$

$$\mathsf{l}^\odot_X(\lambda \odot x) = \lambda \cdot x = \mathsf{r}^\odot_X(x \odot \lambda) \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \in X \tag{1.8}$$

$$\mathsf{c}^\odot_X(x \odot y) = y \odot x \qquad x \in X, \quad y \in Y \tag{1.9}$$

и задающие на $\mathfrak{Ste}$ *структуру симметрической моноидальной категории [4] относительно бифунктора* $\odot$.

Следующий факт отмечался в [1, Теорема 7.9]: тождество

$$@_{X,Y}(x \circledast y) = x \odot y, \qquad x \in X, \quad y \in Y \tag{1.10}$$

определяет естественное преобразование бифунктора $\circledast$ в бифунктор $\odot$

$$@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y,$$

называемое *преобразованием Гротендика.*

Теорема 1.3. *Если X и Y – пространства Фреше (соответственно, пространства Браунера), то*

(i) стереотипные тензорные произведения пространства $X \circledast Y$ и $X \odot Y$ также будут пространствами Фреше (соответственно, пространством Браунера),

(ii) если хотя бы одно из пространств X или Y ядерно, то преобразование Гротендика $@_{X,Y} : X \circledast Y \to X \odot Y$ будет изоморфизмом стереотипных пространств

$$X \circledast Y \overset{@_{X,Y}}{\cong} X \odot Y,$$

(iii) если оба пространства X и Y ядерны, то пространство $X \circledast Y \cong X \odot Y$ также ядерно.

Доказательство. Тот факт, что пространства $X \circledast Y$ и $X \odot Y$ будут пространствами Фреше (соответственно, пространствами Браунера), отмечался в [1, Теоремы 7.22, 7.23]). Если X или Y ядерно, то изоморфизм $X \circledast Y \cong X \odot Y$ является следствием того факта, что для пространств Фреше, одно из которых обладает свойством классической аппроксимации, тензорные произведения $\circledast$ и $\odot$ совпадают с обычным проективным $\hat{\otimes}$ и инъективным $\check{\otimes}$ тензорным произведениями [1, Теоремы 7.17, 7.21]. Наконец, если оба X и Y ядерны, то в случае, когда X и Y – пространства Фреше, их произведение $X \circledast Y \cong X \odot Y \cong X \hat{\otimes} Y$ будет ядерно, поскольку ядерность сохраняется проективным тензорным произведением [25, 5.4.2]. Если же X и Y – пространства Браунера, то по уже доказанному, пространство Фреше $X^\star \odot Y^\star$ будет ядерно, и значит, по теореме Браунера 0.10, пространство $X \circledast Y \cong (X^\star \odot Y^\star)^\star$ также будет ядерным. □

В качестве следствия получается

Теорема 1.4. *Категории $\mathfrak{NFre}$ ядерных пространств Фреше и $\mathfrak{NBra}$ ядерных пространств Браунера являются симметрическими моноидальными категориями относительно бифункторов $\circledast$ и $\odot$ (совпадающих на каждой из этих категорий).*

(b) Стереотипные алгебры Хопфа

Алгебры, коалгебры и алгебры Хопфа в симметрической моноидальной категории. Напомним [23], что *алгеброй* или *моноидом* в симметрической моноидальной категории $(\mathfrak{K},\otimes,I,\mathsf{a},\mathsf{r},\mathsf{l},\mathsf{c})$ называется тройка (A,μ,ι), где A – объект в $\mathfrak{K}$, а $\mu: A\otimes A\to A$ (умножение) и $\iota: I\to A$ (единица) – морфизмы, подчиненные аксиомам ассоциативности и единицы

$$\begin{tikzcd} (A\otimes A)\otimes A \arrow[rr, "\mathsf{a}_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu\otimes 1"'] & & A\otimes(A\otimes A) \arrow[d, "1\otimes\mu"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\mu"] & A & A\otimes A \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\otimes A \arrow[r, "\mathsf{l}_A"] \arrow[dr, "\iota\otimes 1"'] & A & A\otimes I \arrow[l, "\mathsf{r}_A"'] \arrow[dl, "1\otimes\iota"] \\ & A\otimes A \arrow[u, "\mu"] & \end{tikzcd}\ . \tag{1.11}$$

Любым двум моноидам (A,μ_A,ι_A) и (B,μ_B,ι_B) можно поставить в соответствие моноид $(A\otimes B,\mu_{A\otimes B},\iota_{A\otimes B})$, в котором структурные морфизмы определяются формулами

$$\mu_{A\otimes B}:=\mu_A\otimes\mu_B\circ\theta_{A,B,A,B},\qquad \iota_{A\otimes B}:=\iota_A\otimes\iota_B\circ\mathsf{l}_I^{-1} \tag{1.12}$$

$$\begin{tikzcd} (A\otimes B)\otimes(A\otimes B) \arrow[rr, "\theta_{A,B,A,B}"'] \arrow[dr, dashed, "\mu_{A\otimes B}"'] & & (A\otimes A)\otimes(B\otimes B) \arrow[dl, "\mu_A\otimes\mu_B"] \\ & A\otimes B & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\mathsf{l}_I^{-1}"] \arrow[dr, dashed, "\iota_{A\otimes B}"'] & & I\otimes I \arrow[dl, "\iota_A\otimes\iota_B"] \\ & A\otimes B & \end{tikzcd}$$

а θ – изоморфизм функторов

$$\Big((A,B,C,D)\mapsto(A\otimes B)\otimes(C\otimes D)\Big)\overset{\theta}{\rightarrowtail}\Big((A,B,C,D)\mapsto(A\otimes C)\otimes(B\otimes D)\Big) \tag{1.13}$$

единственный, в силу теоремы когерентности [23] для тензорных категорий, в классе изоморфизмов функторов, получаемых как комбинации структурных изоморфизмов a, l, r, c, a^{-1}, l^{-1}, r^{-1}, c^{-1} тензорной категории $\mathfrak{K}$.

Двойственным образом вводится понятие *коалгебры* или *комоноида* в симметрической моноидальной категории $\mathfrak{K}$: так называется произвольная тройка $(A,\varkappa,\varepsilon)$, в которой A – объект категории $\mathfrak{K}$, а $\varkappa: A\to A\otimes A$ (коумножение) и $\varepsilon: A\to I$ (коединица) – морфизмы, подчиненные двойственным условиям коассоциативности и коединицы:

$$\begin{tikzcd} (A\otimes A)\otimes A \arrow[rr, "\mathsf{a}_{A,A,A}"] & & A\otimes(A\otimes A) \\ A\otimes A \arrow[u, "\varkappa\otimes 1_A"] & A \arrow[l, "\varkappa"'] \arrow[r, "\varkappa"] & A\otimes A \arrow[u, "1_A\otimes\varkappa"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} I\otimes A & A \arrow[l, "\mathsf{l}_A^{-1}"'] \arrow[r, "\mathsf{r}_A^{-1}"] \arrow[d, "\varkappa"] & A\otimes I \\ & A\otimes A \arrow[ul, "\varepsilon\otimes 1_A"] \arrow[ur, "1_A\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}\ . \tag{1.14}$$

Как и в случае с моноидами, тензорное произведение $A\otimes B$ любых двух комоноидов $(A,\varkappa_A,\varepsilon_A)$ и $(B,\varkappa_B,\varepsilon_B)$ в $\mathfrak{K}$ обладает естественной структурой комоноида в категории $\mathfrak{K}$ со структурными морфизмами

$$\varkappa_{A\otimes B}:=\theta_{A,A,B,B}\circ\varkappa_A\otimes\varkappa_B,\qquad \varepsilon_{A\otimes B}:=\lambda_I\circ\varepsilon_A\otimes\varepsilon_B$$

Алгеброй Хопфа (другой термин – *моноид Хопфа*) в симметрической моноидальной категории $\mathfrak{K}$ называется пятерка $(H,\mu,\iota,\varkappa,\varepsilon,\sigma)$, в которой H – объект категории $\mathfrak{K}$, а морфизмы

$\mu: H\otimes H\to H$	(умножение),
$\iota: I\to H$	(единица),
$\varkappa: H\to H\otimes H$	(коумножение),
$\varepsilon: H\to I$	(коединица),
$\sigma: H\to H$	(антипод)

удовлетворяют следующим условиям:

1) тройка (H,μ,ι) образует моноид в $\mathfrak{K}$,

2) тройка $(H,\varkappa,\varepsilon)$ образует комоноид в $\mathfrak{K}$,

3) коммутативны следующие диаграммы,

$$\begin{tikzcd}
& & H \arrow[drr, "\varkappa"] & & \\
H\otimes H \arrow[urr, "\mu"] \arrow[dr, "\varkappa\otimes\varkappa"'] & & & & H\otimes H \\
& (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[rr, "\theta_{H,H,H,H}"'] & & (H\otimes H)\otimes(H\otimes H) \arrow[ur, "\mu\otimes\mu"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.15}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mathsf{l}_I^{-1}"] \arrow[d, "\iota"'] & I\otimes I \arrow[d, "\iota\otimes\iota"] \\
H \arrow[r, "\varkappa"'] & H\otimes H
\end{tikzcd} ; \qquad
\begin{tikzcd}
H\otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[d, "\varepsilon"] \\
I\otimes I \arrow[r, "\mathsf{l}_I"'] & I
\end{tikzcd} ; \tag{1.16}$$

$$\begin{tikzcd}
& H \arrow[dr, "\varepsilon"] & \\
I \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "1_I"'] & & I
\end{tikzcd} ; \tag{1.17}$$

означающие, что морфизмы $\varkappa : H \to H \otimes H$ и $\varepsilon : H \to I$ являются гомоморфизмами моноидов, а морфизмы $\mu : H \otimes H \to H$ и $\iota : I \to H$ – гомоморфизмами комоноидов в категории $\mathfrak{K}$ (здесь θ – по-прежнему, преобразование (1.13));

4) коммутативна диаграмма, называемая аксиомой антипода:

$$\begin{tikzcd}
& H\otimes H \arrow[r, "\sigma\otimes 1_H"] & H\otimes H \arrow[dr, "\mu"] & \\
H \arrow[ur, "\varkappa"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & I \arrow[r, "\iota"] & H \\
& H\otimes H \arrow[r, "1_H\otimes\sigma"] & H\otimes H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd} \tag{1.18}$$

Если выполнены только условия 1)-3), то четверка $(H, \mu, \iota, \varkappa, \varepsilon)$ называется *биалгеброй* в категории $\mathfrak{K}$.

Проективные и инъективные стереотипные алгебры. В соответствии с общим определением, *проективной* (соответственно, *инъективной*) *стереотипной алгеброй* называется алгебра в симметрической моноидальной категории стереотипных пространств $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$ (соответственно, $(\mathfrak{Ste}, \odot)$).

Для случая проективных алгебр это определение допускает простую переформулировку [1, §10]:

Предложение 1.1. *Структура проективной стереотипной алгебры на стереотипном пространстве A эквивалентна структуре ассоциативной алгебры на A (с единицей), в которой умножение $(x, y) \mapsto x \cdot y$ удовлетворяет следующим эквивалентным условиям непрерывности:*

(i) для всякого компакта K в A и любой окрестности нуля U в A найдется окрестность нуля V в A такая, что

$$K \cdot V \subseteq U \quad \& \quad V \cdot K \subseteq U$$

(ii) для всякого компакта K в A и любой стремящейся к нулю направленности $a_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ направленности $x \cdot a_i$ и $a_i \cdot x$ стремятся к нулю в A равномерно по $x \in K$.

Пример 1.1. Примерами проективных стереотипных алгебр являются банаховы алгебры, алгебры Фреше, а также стереотипная алгебра $\mathcal{L}(X)$ операторов на произвольном стереотипном пространстве X.

Пример 1.2. Примерами инъективных стереотипных алгебр являются функциональные пространства $\mathcal{C}(M)$, $\mathcal{E}(M)$, $\mathcal{O}(M)$, $\mathcal{R}(M)$ непрерывных, гладких, голоморфных функций и многочленов (подробности см. в [1, §10]).

Стереотипные алгебры Хопфа. Снова следуя общему определению, мы называем

– *проективной стереотипной алгеброй Хопфа* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории стереотипных пространств $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$;

– *инъективной стереотипной алгеброй Хопфа* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории стереотипных пространств $(\mathfrak{Ste}, \odot)$;

– *ядерной алгеброй Хопфа-Фреше* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории ядерных пространств Фреше $\mathfrak{NFre}$;

– *ядерной алгеброй Хопфа-Браунера* алгебру Хопфа в симметрической моноидальной категории ядерных пространств Браунера $\mathfrak{NBra}$.

Пусть кроме того, стереотипное пространство H обладает тем свойством, что преобразования Гротендика для пары $(H;H)$, для тройки $(H;H;H)$ и для четверки $(H;H;H;H)$ являются изоморфизмами стереотипных пространств:

$$\begin{aligned}
&@_{H,H} : H \circledast H \cong H \odot H,\\
&@_{H,H,H} : H \circledast H \circledast H \cong H \odot H \odot H\\
&@_{H,H,H,H} : H \circledast H \circledast H \circledast H \cong H \odot H \odot H \odot H
\end{aligned}$$

(это всегда так, если H – ядерное пространство Фреше или ядерное пространство Браунера). Тогда, очевидно, задание структуры проективной стереотипной алгебры Хопфа на H эквивалентно заданию структуры инъективной стереотипной алгебры Хопфа на H: структурные элементы алгебр Хопфа в $(\mathfrak{Ste}, \circledast)$ и $(\mathfrak{Ste}, \odot)$ (мы отличаем их индексами $\circledast$ и $\odot$) будут или совпадать

$$\iota_\circledast = \iota_\odot, \qquad \varepsilon_\circledast = \varepsilon_\odot, \qquad \sigma_\circledast = \sigma_\odot$$

или будут связаны диаграммами

$$\begin{tikzcd}
H \circledast H \arrow[rr, "@_{H,H}"] \arrow[dr, "\mu_\circledast"'] & & H \odot H \arrow[dl, "\mu_\odot"] \\
& H &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \circledast H \arrow[rr, "@_{H,H}"] & & H \odot H \\
& H \arrow[ul, "\varkappa_\circledast"] \arrow[ur, "\varkappa_\odot"'] &
\end{tikzcd}$$

Такие (одновременно проективные и инъективные) алгебры Хопфа мы будем называть *жесткими стереотипными алгебрами Хопфа.*

Пример 1.3. Понятно, что любая ядерная алгебра Хопфа-Фреше и любая ядерная алгебра Хопфа-Браунера будут жесткими стереотипными алгебрами Хопфа.

Двойственность стереотипных алгебр Хопфа.

Теорема 1.5 (о двойственности в классе стереотипных алгебр Хопфа). *Структура инъективной (проективной, жесткой) алгебры Хопфа на стереотипном пространстве H автоматически задает структуру проективной (инъективной, жесткой) алгебры Хопфа на сопряженном стереотипном пространстве $H^\star$ – структурные элементы алгебры Хопфа на $H^\star$ определяются как сопряженные отображения структурных элементов алгеъры Хопфа на H:*

$$\begin{aligned}
&\mu_{H^\star} = (\varkappa_H)^\star, && \iota_{H^\star} = (\varepsilon_H)^\star,\\
&\varkappa_{H^\star} = (\mu_H)^\star, && \varepsilon_{H^\star} = (\iota_H)^\star,\\
&\sigma_{H^\star} = (\sigma_H)^\star, &&
\end{aligned}$$

Пример 1.4. Любая обычная алгебра Хопфа H (то есть алгебра Хопфа в категории векторных пространств с обычным алгебраическим тензорным произведением $\otimes$) становится жесткой алгеброй Хопфа, если ее наделить сильнейшей локально выпуклой топологией. Сопряженное пространство $H^\star$ будет пространством минимального типа (в смысле теоремы 0.12) и, так же как и H, жесткой алгеброй Хопфа. Это, между прочим, иллюстрирует одно из достоинств стереотипной теории: здесь нет необходимости сужать пространство линейных функционалов, чтобы сделать из него алгебру Хопфа, как это делается обычно (см. напр. [9, 1.5] или [8, 4.1.D]) – пространство $H^\star$, будучи пространством всех линейных функционалов (автоматически непрерывных, в силу выбора топологии на H), является полноценной алгеброй Хопфа, только чтобы это увидеть, нужно вместо обычного алгебраического тензорного произведения $\otimes$ взять какое-нибудь стереотипное, $\circledast$ или $\odot$.

Дуальные пары. Пусть H – инъективная, а M – проективная стереотипные алгебры Хопфа. Условимся говорить, что H и M образуют *дуальную пару алгебр Хопфа*, если задана невырожденная непрерывная (в смысле [1, Section 5.6]) билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times M \to \mathbb{C}$, которая алгебраические операции в H превращает в двойственные операции в M:

$$\begin{aligned} &\langle \mu_H(U), \alpha\rangle = \langle U, \varkappa_M(\alpha)\rangle, && \langle 1_H, \alpha\rangle = \varepsilon_A(\alpha),\\ &\langle \varkappa_H(u), A\rangle = \langle u, \mu_M(A)\rangle, && \varepsilon_H(u) = \langle u, 1_M\rangle,\\ &\langle \sigma_H(u), \alpha\rangle = \langle u, \sigma_M(\alpha)\rangle \end{aligned}$$

($u \in H$, $U \in H \odot H$, $\alpha \in M$, $A \in M \circledast M$). Если $\langle H, M\rangle$ – дуальная пара стереотипных алгебр Хопфа, причем H – инъективная, а M – проективная, то умножение в H мы по умолчанию будем обозначать точкой $\cdot$ а в M – снежинкой $*$:

$$\mu_H(u \odot v) = u \cdot v, \qquad \mu_M(\alpha \circledast \beta) = \alpha * \beta$$

Пример 1.5. Примером дуальной пары является, конечно, пара $\langle H, H^\star\rangle$, в которой H – произвольная инъективная стереотипная алгебра Хопфа, а под $\langle\cdot,\cdot\rangle$ понимается каноническая форма

$$\langle a, \alpha\rangle := \alpha(a), \qquad a \in H,\ \alpha \in H^\star$$

Ниже в вычислениях мы без объяснений используем обозначение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для этой формы.

(c) Руководящий пример: алгебры Хопфа $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$

Напомним, что в § 0(h) мы определили пространства $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$ функций и точечных зарядов на множестве M. Если множество M представляет собой группу, то пространства $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$ естественным образом превращаются в дуальную пару жестких алгебр Хопфа.

Алгебра $\mathbb{C}^G$ функций на G. Пусть G – произвольная группа (необязательно конечная) и пусть $\mathbb{C}^G$ – пространство (комплекснозначных) функций на G, определенное в § 0(h),

$$u \in \mathbb{C}^G \quad \Longleftrightarrow \quad u : G \to \mathbb{C}$$

с заданной на нем топологией поточечной сходимости (порожденной полунормами (0.23)). Мы наделим $\mathbb{C}^G$ дополнительно структурой алгебры с поточечными алгебраическими операциями, и тождественной единицей

$$(u \cdot v)(x) = u(x) \cdot v(x), \qquad 1_{\mathbb{C}^G}(x) = 1 \qquad (x \in G). \tag{1.19}$$

Напомним, что выше формулой (0.28) мы определяли характеристические функции 1_x одноэлементных множеств в G. Умножение в $\mathbb{C}^G$ переписывается в разложении по базису $\{1_x;\ x \in G\}$ формулой

$$u \cdot v = \left(\sum_{x\in G} u(x) \cdot 1_x\right) \cdot \left(\sum_{x\in G} v(x) \cdot 1_x\right) = \sum_{x\in G} u(x) \cdot v(x) \cdot 1_x \tag{1.20}$$

а на элементах этого базиса задается формулой

$$1_x \cdot 1_y = \begin{cases} 1_x, & x = y\\ 0 & x \neq y \end{cases} \tag{1.21}$$

Алгебра $\mathbb{C}_G$ точечных зарядов на G. Снова пусть G – произвольная группа и пусть $\mathbb{C}_G$ – пространство точечных зарядов на G, определенное в § 0(h),

$$\alpha \in \mathbb{C}_G \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \{\alpha_x;\ x \in G\}, \quad \alpha_x \in \mathbb{C}, \quad \mathsf{card}\{x \in G : \alpha_x \neq 0\} < \infty$$

наделенное топологией, порожденной полунормами (0.25) (по теореме 0.14, это эквивалентно сильнейшей локально выпуклой топологии на $\mathbb{C}_G$). Мы наделяем $\mathbb{C}_G$ структурой алгебры с умножением

$$(\alpha * \beta)_y = \sum_{x\in G} \alpha_x \cdot \beta_{x^{-1}\cdot y}.$$

Выше формулой (0.30) мы определяли характеристические функции одноэлементных множеств в G, которые, будучи рассматриваемы как элементы $\mathbb{C}_G$ мы обозначаем δ^x. Единицей в $\mathbb{C}_G$ будет характеристическая функция δ^e, сосредоточенная в единице e группы G:

$$\delta^e_x = \begin{cases} 1, & x = e \\ 0 & x \neq e \end{cases}$$

Умножение в алгебре $\mathbb{C}_G$ переписывается в разложении по базису $\{\delta^x;\ x \in G\}$ формулой

$$\alpha * \beta = \left(\sum_{x\in G} \alpha_x \cdot \delta^x\right) * \left(\sum_{y\in G} \beta_y \cdot \delta^y\right) = \sum_{x,y\in G} \alpha_x \cdot \beta_y \cdot \delta^{x\cdot y} = \sum_{z\in G} \left(\sum_{x\in G} \alpha_x \cdot \beta_{x^{-1}\cdot z}\right) \cdot \delta^z \tag{1.22}$$

а на элементах этого базиса задается формулой

$$\delta^x * \delta^y = \delta^{x\cdot y}. \tag{1.23}$$

$\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$ как стереотипные алгебры Хопфа. Пусть, для произвольных множеств S и T и функций $u : S \to \mathbb{C}$ и $v : T \to \mathbb{C}$ символ $u \boxdot v$ обозначает функцию на декартовом произведении $S \times T$, определенную равенством

$$(u \boxdot v)(s,t) := u(s) \cdot v(t), \qquad s \in S, \quad t \in T \tag{1.24}$$

Определение структуры алгебры Хопфа в бесконечномерных алгебрах $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$ основывается на следующем наблюдении.

Теорема 1.6. *Формула*

$$\rho_{S,T}(u \boxdot v) = u \odot v \tag{1.25}$$

определяет изоморфизм топологических векторных пространств

$$\rho_{S,T} : \mathbb{C}^{S\times T} \cong \mathbb{C}^S \odot \mathbb{C}^T$$

Такое соответствие будет изоморфизмом функторов,

$$\Big((S;T) \mapsto \mathbb{C}^{S\times T}\Big) \overset{\rho_{S,T}}{\rightarrowtail} \Big((S;T) \mapsto \mathbb{C}^S \odot \mathbb{C}^T\Big),$$

потому что для любых отображений $\pi : S \to S'$, $\sigma : T \to T'$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{S\times T} \arrow[r, "\rho_{S,T}"] & \mathbb{C}^S \odot \mathbb{C}^T \\ \mathbb{C}^{S'\times T'} \arrow[r, "\rho_{S',T'}"] \arrow[u, "\mathsf{id}_{\mathbb{C}} \oslash (\pi\times\sigma)"] & \mathbb{C}^{S'} \odot \mathbb{C}^{T'} \arrow[u, "(\mathsf{id}_{\mathbb{C}} \oslash \pi)\odot(\mathsf{id}_{\mathbb{C}} \oslash \sigma)"'] \end{tikzcd}$$

в которой отображения $\mathsf{id}_{\mathbb{C}} \oslash ?$ определяются формулой

$$\mathsf{id}_{\mathbb{C}} \oslash \pi : \mathbb{C}^{S'} \to \mathbb{C}^S, \qquad \mathsf{id}_{\mathbb{C}} \oslash \pi(v) = v \circ \pi$$

Эта теорема позволяет определить на $\mathbb{C}^G$ структурные элементы стереотипной алгебры Хопфа относительно $\odot$: умножение $\mu : \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G$ сначала определяется на пространстве функций на декартовом произведении $G \times G$,

$$\widetilde{\mu} : \mathbb{C}^{G\times G} \to \mathbb{C}^G \quad \Big| \quad \widetilde{\mu}(v)(t) = v(t,t)$$

а затем переносится на тензорный квадрат с помощью изоморфизма $\rho_{G,G}$:

$$\mu = \widetilde{\mu} \circ \rho_{G,G}.$$

Точно так же коумножение $\varkappa : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G$ сначала определяется со значениями в пространстве функций на декартовом квадрате

$$\widetilde{\varkappa} : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^{G\times G} \quad \Big| \quad \widetilde{\varkappa}(u)(s,t) = u(s \cdot t)$$

а затем переносится на тензорный квадрат с помощью изоморфизма $\rho_{G,G}$:

$$\varkappa = \rho_{G,G} \circ \widetilde{\varkappa}.$$

Остальные структурные элементы алгебры Хопфа на $\mathbb{C}^G$ очевидны:

$$\begin{array}{rll}
\text{единица:} & \iota : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^G, & \iota(\lambda)(t) = \lambda \\
\text{коединица:} & \varepsilon : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}, & \varepsilon(u) = u(1_G) \\
\text{антипод:} & \sigma : \mathbb{C}^G \to \mathbb{C}^G, & \sigma(u)(t) = u(t^{-1})
\end{array}$$

Эти определения удобно иллюстрировать картинкой:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[dd, "\rho_{G,G}"] \arrow[dr, "\widetilde{\mu}"] & & \\
\mathbb{C} \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{C}^G \arrow[ur, "\widetilde{\varkappa}"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & \mathbb{C}^G \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{C} \\
 & & \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \arrow[ur, "\mu"'] & &
\end{tikzcd} \tag{1.26}$$

На пространстве $\mathbb{C}_G$ точечных зарядов на G структура алгебры Хопфа относительно тензорного произведения $\circledast$ задается двойственным образом по теореме 1.5, как на пространстве, сопряженном к $\mathbb{C}^G$ в смысле билинейной формы (0.26). Следующая теорема показывает, что такие определения действительно задают структуру алгебры Хопфа на $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$:

Теорема 1.7. *Для всякой группы G*

- *пространство $\mathbb{C}^G$ функций на G является инъективной (и, более того, жесткой) стереотипной алгеброй Хопфа, причем если группа G счетна, то $\mathbb{C}^G$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше;*

- *пространство $\mathbb{C}_G$ точечных зарядов на G является проективной (и, более того, жесткой) стереотипной алгеброй Хопфа, причем если группа G счетна, то $\mathbb{C}_G$ является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера;*

Алгебры Хопфа $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$ образуют дуальную пару относительно билинейной формы (0.26)*, а алгебраические операции в них действуют на базисы $\{1_x\}$ и $\{\delta^x\}$ формулами:*

$$\mathbb{C}^G: \qquad 1_x \cdot 1_y = \begin{cases} 1_x, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \qquad 1_{\mathbb{C}^G} = \sum_{x\in G} 1_x \qquad \sigma(1_x) = 1_{x^{-1}} \tag{1.27}$$

$$\varkappa(1_x) = \sum_{y\in G} 1_y \odot 1_{x\cdot y^{-1}} \qquad \varepsilon(1_x) = \begin{cases} 1, & x = e \\ 0, & x \neq e \end{cases} \tag{1.28}$$

$$\mathbb{C}_G: \qquad \delta^x * \delta^y = \delta^{x\cdot y} \qquad 1_{\mathbb{C}_G} = \delta^e \qquad \sigma(\delta^x) = \delta^{x^{-1}} \tag{1.29}$$

$$\varkappa(\delta^x) = \delta^x \circledast \delta^x \qquad \varepsilon(\delta^x) = 1 \tag{1.30}$$

Доказательство. Формулы (1.27)-(1.30) проверяются непосредственно. Жесткость следует из [1, (7.37)]:

$$\mathbb{C}^I \circledast \mathbb{C}^J \cong \mathbb{C}^{I\times J} \cong \mathbb{C}^I \odot \mathbb{C}^J, \qquad \mathbb{C}_I \circledast \mathbb{C}_J \cong \mathbb{C}_{I\times J} \cong \mathbb{C}_I \odot \mathbb{C}_J.$$

Структура алгебры Хопфа на $\mathbb{C}_G$ порождается структурой алгебры Хопфа на $\mathbb{C}^G$ по теореме 1.5. Таким образом, нам нужно лишь доказать что $\mathbb{C}^G$ является алгеброй Хопфа относительно $\odot$.

1. Проверим диаграмму (1.15). Сначала подставляем всюду $\mathbb{C}^G$ вместо H и $\odot$ вместо $\otimes$, а затем надстроим ее до следующей призмы:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \mathbb{C}^G \arrow[rrrrd, "\widetilde{\varkappa}"] \arrow[dddd, "\mathsf{id}_{\mathbb{C}^G}"] & & & & \\
\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[rrrru, "\widetilde{\mu}"] \arrow[rrd, "\widetilde{\widetilde{\varkappa}}"] \arrow[dddd, "\rho_{G,G}"'] & & & & & & & & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[dddd, "\rho_{G,G}"] \\
 & & \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[rrrr, "\widetilde{\theta}"] \arrow[d, "\rho_{G\times G,G\times G}"] & & & & \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[rru, "\widetilde{\widetilde{\mu}}"] \arrow[d, "\rho_{G\times G,G\times G}"] & & \\
 & & \mathbb{C}^{G\times G}\odot\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[dd, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"] & & & & \mathbb{C}^{G\times G}\odot\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[rrd, "\widetilde{\mu}\odot\widetilde{\mu}"] \arrow[dd, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"'] & & \\
 & & & & \mathbb{C}^G \arrow[rrrrd, "\varkappa"] & & & & \\
\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G \arrow[rruu, "\widetilde{\varkappa}\odot\widetilde{\varkappa}"] \arrow[rrrru, "\mu"] \arrow[rrd, "\varkappa\odot\varkappa"] & & & & & & & & \mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G \\
 & & \big(\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G\big)\odot\big(\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G\big) \arrow[rrrr, "\theta"] & & & & \big(\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G\big)\odot\big(\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G\big) \arrow[rru, "\mu\odot\mu"] & &
\end{tikzcd}$$

Здесь $\theta = \theta_{\mathbb{C}^G,\mathbb{C}^G,\mathbb{C}^G,\mathbb{C}^G}$ – изоморфизм функторов из (1.13), а оставшиеся морфизмы определяются равенствами:

$$\widetilde{\theta}w(a,b,c,d) = w(a,c,b,d), \quad \widetilde{\widetilde{\varkappa}}v(a,b,c,d) = v(a\cdot b, c\cdot d), \quad \widetilde{\widetilde{\mu}}v(a,b) = v(a,a,b,b)$$

Чтобы доказать коммутативность нижнего основания, достаточно проверить коммутативность всех остальных граней призмы. Дальние боковые грани

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] \arrow[d, "\rho_{G,G}"'] & \mathbb{C}^G \arrow[d, "\mathsf{id}_{\mathbb{C}^G}"] \\
\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G \arrow[r, "\mu"] & \mathbb{C}^G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^G \arrow[r, "\widetilde{\varkappa}"] \arrow[d, "\mathsf{id}_{\mathbb{C}^G}"'] & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[d, "\rho_{G,G}"] \\
\mathbb{C}^G \arrow[r, "\varkappa"] & \mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G
\end{tikzcd}$$

– представляют собой просто искаженные треугольники в диаграмме (1.26).

В левой ближней грани

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[r, "\widetilde{\widetilde{\varkappa}}"] \arrow[dd, "\rho_{G,G}"'] & \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[d, "\rho_{G\times G,G\times G}"] \\
 & \mathbb{C}^{G\times G}\odot\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[d, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"] \\
\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G \arrow[ru, "\widetilde{\varkappa}\odot\widetilde{\varkappa}"] \arrow[r, "\varkappa\odot\varkappa"'] & \big(\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G\big)\odot\big(\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G\big)
\end{tikzcd}$$

– нижний треугольник есть попросту помноженный на себя операцией $\odot$ левый треугольник в (1.26), а коммутативность внутреннего четырехугольника проверяется подстановкой в качестве аргумента функции $u \boxdot v \in \mathbb{C}^{G\times G}$, где $u, v \in \mathbb{C}^G$ – двигаясь сначала вниз, а потом направо и вверх, она превратится в $\widetilde{\varkappa}(u)\odot\widetilde{\varkappa}(v)$:

$$\begin{aligned}
& u \boxdot v \in \mathbb{C}^{G\times G} \\
\mapsto \quad & u \odot v \in \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \\
\mapsto \quad & (\widetilde{\varkappa}\odot\widetilde{\varkappa})(u\odot v) = \widetilde{\varkappa}(u)\odot\widetilde{\varkappa}(v) \in \mathbb{C}^{G\times G}\odot\mathbb{C}^{G\times G}
\end{aligned}$$

– а если ее перемещать сначала вправо, а потом вниз, то получится то же самое:

$$\begin{aligned}
& u \boxdot v \in \mathbb{C}^{G\times G} \\
\mapsto \quad & \widetilde{\widetilde{\varkappa}}(u\boxdot v) = \widetilde{\varkappa}(u)\boxdot\widetilde{\varkappa}(v) \in \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} :
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\widetilde{\varkappa}}(u \boxdot v)(a,b,c,d) = (u \boxdot v)(a\cdot b, c\cdot d) = u(a\cdot b)\cdot v(c\cdot d) = \widetilde{\varkappa}(u)(a,b)\cdot\widetilde{\varkappa}(v)(c,d) =$$
$$= \big(\widetilde{\varkappa}(u) \boxdot \widetilde{\varkappa}(v)\big)(a,b,c,d)$$
$$\mapsto \quad \rho_{G\times G, G\times G}\left(\widetilde{\varkappa}(u) \boxdot \widetilde{\varkappa}(v)\right) = (1.25) = \widetilde{\varkappa}(u)) \odot \widetilde{\varkappa}(v) \in \mathbb{C}^{G\times G} \odot \mathbb{C}^{G\times G}.$$

Коммутативность центральной ближней боковой грани:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] \arrow[d, "\rho_{G\times G,G\times G}"'] & \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[d, "\rho_{G\times G,G\times G}"] \\
\mathbb{C}^{G\times G} \odot \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[d, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"'] & \mathbb{C}^{G\times G} \odot \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[d, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"] \\
\big(\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G\big) \odot \big(\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G\big) \arrow[r, "\theta"] & \big(\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G\big) \odot \big(\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G\big)
\end{tikzcd}$$

– проверяется подстановкой в качестве аргумента функции $(u \boxdot v) \boxdot (p \boxdot q) \in \mathbb{C}^{G\times G}$, движение которой по диаграмме будет, в силу (1.25), выглядеть так:

$$\begin{tikzcd}
(u \boxdot v) \boxdot (p \boxdot q) \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}"] \arrow[d, mapsto, "\rho_{G\times G,G\times G}"'] & (u \boxdot p) \boxdot (v \boxdot q) \arrow[d, mapsto, "\rho_{G\times G,G\times G}"] \\
(u \boxdot v) \odot (p \boxdot q) \arrow[d, mapsto, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"'] & (u \boxdot p) \odot (v \boxdot q) \arrow[d, mapsto, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"] \\
(u \odot v) \odot (p \odot q) \arrow[r, mapsto, "\theta"] & (u \odot p) \odot (v \odot q)
\end{tikzcd}$$

В правой ближней грани

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[r, "\widetilde{\widetilde{\mu}}"] \arrow[d, "\rho_{G\times G,G\times G}"'] & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[dd, "\rho_{G,G}"] \\
\mathbb{C}^{G\times G} \odot \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[d, "\rho_{G,G}\odot\rho_{G,G}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\mu}\odot\widetilde{\mu}"] & \\
\big(\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G\big) \odot \big(\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G\big) \arrow[r, "\mu\odot\mu"'] & \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G
\end{tikzcd}$$

– нижний треугольник есть попросту помноженный на себя операцией $\odot$ правый треугольник в (1.26), а коммутативность внутреннего четырехугольника проверяется подстановкой в качестве аргумента функции $u \boxdot v \in \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)}$, где $u, v \in \mathbb{C}^{G\times G}$ – двигаясь сначала вниз, а потом направо и вниз, мы получим:

$$u \boxdot v \in \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)}$$
$$\mapsto \quad \rho_{G\times G,G\times G}(u \boxdot v) = u \odot v \in \mathbb{C}^{G\times G} \odot \mathbb{C}^{G\times G}$$
$$\mapsto \quad (\widetilde{\mu} \odot \widetilde{\mu})(u \odot v) = \widetilde{\mu}(u) \odot \widetilde{\mu}(v) \in \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G$$

– а если двигаться сначала вправо, а потом вниз, то получится то же самое:

$$u \boxdot v \in \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)}$$
$$\mapsto \quad \widetilde{\widetilde{\mu}}(u \boxdot v) = \widetilde{\mu}(u) \boxdot \widetilde{\mu}(v) \in \mathbb{C}^{G\times G} :$$
$$\widetilde{\widetilde{\mu}}(u \boxdot v)(a,b) = (u \boxdot v)(a,a,b,b) = u(a,a)\cdot v(b\cdot b) = \widetilde{\mu}(u)(a)\cdot\widetilde{\mu}(v)(b) = \big(\widetilde{\mu}(u) \boxdot \widetilde{\mu}(v)\big)(a,b)$$
$$\mapsto \quad \rho_{G,G}\left(\widetilde{\mu}(u) \boxdot \widetilde{\mu}(v)\right) = (1.25) = \widetilde{\mu}(u)) \odot \widetilde{\mu}(v) \in \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G.$$

Остается проверить коммутативность верхней грани призмы.

$$
\begin{tikzcd}
& & \mathbb{C}^{G} \arrow[drr, "\widetilde{\varkappa}"] & & \\
\mathbb{C}^{G\times G} \arrow[urr, "\widetilde{\mu}"] \arrow[dr, "\widetilde{\widetilde{\varkappa}}"] & & & & \mathbb{C}^{G\times G} \\
& \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[rr, "\widetilde{\theta}"] & & \mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)} \arrow[ur, "\widetilde{\widetilde{\mu}}"] &
\end{tikzcd}
$$

Функция $v\in\mathbb{C}^{G\times G}$, двигаясь по верхним двум ребрам пятиугольника, претерпит следующие превращения:

$$
\begin{aligned}
& v\in\mathbb{C}^{G\times G}\\
\mapsto\quad & \widetilde{\mu}v\in\mathbb{C}^{G}, \qquad \widetilde{\mu}v(a)=v(a,a)\\
\mapsto\quad & \widetilde{\varkappa}\left(\widetilde{\mu}v\right)\in\mathbb{C}^{G\times G}, \qquad \widetilde{\varkappa}\left(\widetilde{\mu}v\right)(a,b)=\widetilde{\mu}v(a\cdot b)=v(a\cdot b,a\cdot b)
\end{aligned}
$$

– и результат будет тем же, как если бы мы последовательно перемещали ее по нижним трем ребрам:

$$
\begin{aligned}
& v\in\mathbb{C}^{G\times G}\\
\mapsto\quad & \widetilde{\widetilde{\varkappa}}v\in\mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)}, \qquad \widetilde{\widetilde{\varkappa}}v(a,b,c,d)=v(a\cdot b,c\cdot d)\\
\mapsto\quad & \widetilde{\theta}\left(\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v\right)\in\mathbb{C}^{(G\times G)\times(G\times G)}, \qquad \widetilde{\theta}\left(\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v\right)(a,b,c,d)=\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v(a,c,b,d)=v(a\cdot c,b\cdot d)\\
\mapsto\quad & \widetilde{\widetilde{\mu}}\left(\widetilde{\theta}\left(\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v\right)\right)\in\mathbb{C}^{G\times G}, \qquad \widetilde{\widetilde{\mu}}\left(\widetilde{\theta}\left(\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v\right)\right)(a,b)=\widetilde{\theta}\left(\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v\right)(a,a,b,b)=\widetilde{\widetilde{\varkappa}}v(a,b,a,b)=v(a\cdot b,a\cdot b)
\end{aligned}
$$

2. После этого проверяем диаграммы (1.16), которые для алгебры $\mathbb{C}^G$ принимают следующий вид:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[r, "\mathsf{l}_{\mathbb{C}}^{-1}"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathbb{C}\odot\mathbb{C} \arrow[d, "\iota\odot\iota"] \\
\mathbb{C}^{G} \arrow[r, "\varkappa"] & \mathbb{C}^{G}\odot\mathbb{C}^{G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{G}\odot\mathbb{C}^{G} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon\odot\varepsilon"'] & \mathbb{C}^{G} \arrow[d, "\varepsilon"] \\
\mathbb{C}\odot\mathbb{C} \arrow[r, "\mathsf{l}_{\mathbb{C}}"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

Для этого в первой диаграмме в качестве аргумента подставляем призвольное число $\zeta\in\mathbb{C}$, а во второй – элементарный тензор $u\odot v\in\mathbb{C}^G\odot\mathbb{C}^G$, и применяем тождества (1.8):

$$
\begin{tikzcd}
\zeta=\zeta\cdot 1_{\mathbb{C}} \arrow[r, mapsto, "\mathsf{l}_{\mathbb{C}}^{-1}"] \arrow[d, mapsto, "\iota"'] & \zeta\cdot 1_{\mathbb{C}}\odot 1_{\mathbb{C}} \arrow[d, mapsto, "\iota\odot\iota"] \\
\zeta\cdot 1_{\mathbb{C}^G} \arrow[r, mapsto, "\varkappa"] & \zeta\cdot 1_{\mathbb{C}^G}\odot 1_{\mathbb{C}^G}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u\odot v \arrow[r, mapsto, "\mu"] \arrow[d, mapsto, "\varepsilon\odot\varepsilon"'] & u\cdot v \arrow[d, mapsto, "\varepsilon"] \\
u(1_G)\odot v(1_G) \arrow[r, mapsto, "\mathsf{l}_{\mathbb{C}}"] & u(1_G)\cdot v(1_G)
\end{tikzcd}
$$

3. Остается проверить диаграмму (1.18), которая для $\mathbb{C}^G$ приобретает следующий вид:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}^{G}\odot\mathbb{C}^{G} \arrow[r, "\sigma\odot 1_{\mathbb{C}^G}"] & \mathbb{C}^{G}\odot\mathbb{C}^{G} \arrow[dr, "\mu"] & \\
\mathbb{C}^{G} \arrow[ur, "\varkappa"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & & \mathbb{C} \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{C}^{G} \\
& \mathbb{C}^{G}\odot\mathbb{C}^{G} \arrow[r, "1_{\mathbb{C}^G}\odot\sigma"] & \mathbb{C}^{G}\odot\mathbb{C}^{G} \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
\tag{1.31}
$$

Ее нужно дополнить до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[rr, "\sigma_1"] \arrow[d, "\rho_{G,G}"] & & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[d, "\rho_{G,G}"'] \arrow[ddr, bend left, "\widetilde{\mu}"] & \\
 & \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \arrow[rr, "\sigma\odot 1_{\mathbb{C}^G}"] & & \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \arrow[dr, "\mu"] & \\
\mathbb{C}^G \arrow[uur, bend left, "\widetilde{\varkappa}"] \arrow[ur, "\varkappa"] \arrow[dr, "\varkappa"'] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{\varkappa}"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \mathbb{C} \arrow[rr, "\iota"] & & \mathbb{C}^G \\
 & \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \arrow[rr, "1_{\mathbb{C}^G}\odot\sigma"] & & \mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G \arrow[ur, "\mu"'] & \\
 & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[rr, "\sigma_2"] \arrow[u, "\rho_{G,G}"'] & & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[u, "\rho_{G,G}"] \arrow[uur, bend right, "\widetilde{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

в которой отображения σ_1 и σ_2 определяются равенствами

$$\sigma_1(v)(s,t) := v(s^{-1},t), \qquad \sigma_2(v)(s,t) := v(s,t^{-1})$$

Здесь будут очевидно коммутативными все треугольники и прямоугольники, примыкающие к границам рисунка, поэтому для доказательства коммутативности двух внутренних пятиугольников (составляющих (1.31)) достаточно проверить коммутативность диаграммы, получающейся при выбрасывании вершин $\mathbb{C}^G \odot \mathbb{C}^G$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[rr, "\sigma_1"] & & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[dr, "\widetilde{\mu}"] & \\
\mathbb{C}^G \arrow[ur, "\widetilde{\varkappa}"] \arrow[dr, "\widetilde{\varkappa}"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & \mathbb{C} \arrow[rr, "\iota"] & & \mathbb{C}^G \\
 & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[rr, "\sigma_2"] & & \mathbb{C}^{G\times G} \arrow[ur, "\widetilde{\mu}"'] &
\end{tikzcd}$$

Это делается прямым вычислением: образом произвольной функции $u \in \mathbb{C}^G$ при любом перемещении по диаграмме будет функция $u(1_G)\cdot 1_{\mathbb{C}^G} \in \mathbb{C}^G$. Действительно,

– двигаясь по верхним стрелкам, получаем вот что:

$$\begin{aligned}
& u \in \mathbb{C}^G \\
\mapsto\quad & \widetilde{\varkappa}(u) \in \mathbb{C}^{G\times G}, \qquad \widetilde{\varkappa}(u)(s,t) = u(s\cdot t) \\
\mapsto\quad & \sigma_1(\widetilde{\varkappa}(u)) \in \mathbb{C}^{G\times G}, \qquad \sigma_1(\widetilde{\varkappa}(u))(s,t) = \widetilde{\varkappa}(u)(s^{-1},t) = u(s^{-1}\cdot t) \\
\mapsto\quad & \widetilde{\mu}\Big(\sigma_1(\widetilde{\varkappa}(u))\Big) \in \mathbb{C}^G, \qquad \widetilde{\mu}\Big(\sigma_1(\widetilde{\varkappa}(u))\Big)(s) = \sigma_1(\widetilde{\varkappa}(u))(s,s) = \widetilde{\varkappa}(u)(s^{-1},s) = u(s^{-1}\cdot s) = u(1_G)
\end{aligned}$$

– двигаясь горизонтально через центр шестиугольника, получаем то же самое:

$$\begin{aligned}
& u \in \mathbb{C}^G \\
\mapsto\quad & \varepsilon(u) \in \mathbb{C}, \qquad \varepsilon(u) = u(1_G)\cdot 1_{\mathbb{C}} \\
\mapsto\quad & \iota(\varepsilon(u)) \in \mathbb{C}^G, \qquad \iota(\varepsilon(u)) = u(1_G)\cdot 1_{\mathbb{C}^G}
\end{aligned}$$

– и, двигаясь по нижним стрелкам, приходим к тому же ответу:

$$u \in \mathbb{C}^G$$

$$\begin{aligned}
&\mapsto \quad \widetilde{\varkappa}(u)\in\mathbb{C}^{G\times G}, \qquad \widetilde{\varkappa}(u)(s,t)=u(s\cdot t)\\
&\mapsto \quad \sigma_2(\widetilde{\varkappa}(u))\in\mathbb{C}^{G\times G}, \qquad \sigma_2(\widetilde{\varkappa}(u))(s,t)=\widetilde{\varkappa}(u)(s,t^{-1})=u(s\cdot t^{-1})\\
&\mapsto \quad \widetilde{\mu}\Big(\sigma_2(\widetilde{\varkappa}(u))\Big)\in\mathbb{C}^{G}, \qquad \widetilde{\mu}\Big(\sigma_2(\widetilde{\varkappa}(u))\Big)(s)=\sigma_1(\widetilde{\varkappa}(u))(s,s)=\widetilde{\varkappa}(u)(s,s^{-1})=u(s\cdot s^{-1})=u(1_G)
\end{aligned}$$

□

(d) Обозначения Свидлера и свойство стереотипной аппроксимации

Удобным инструментом доказательств в теории алгебр Хопфа являются обозначения Свидлера [19]. Эта техника применима и в стереотипной теории, по крайней мере, в ситуации, когда стереотипная алгебра Хопфа H, как локально выпуклое пространство обладает стереотипной аппроксимацией (см. [1]).

Объяснением этому служит следующая

Теорема 1.8. *Если H – инъективная (проективная) коалгебра со свойством стереотипной аппроксимации, то для всякого $x\in H$*

(i) коумножение $\varkappa(x)$ можно приблизить в топологии H конечными суммами вида

$$\sum_{i=1}^n x_i'\odot x_i'' \qquad \left(\sum_{i=1}^n x_i'\circledast x_i''\right)$$

(ii) тождество

$$\langle\varkappa(x),\alpha\circledast\beta\rangle=0 \qquad \Big(\langle\varkappa(x),\alpha\odot\beta\rangle=0\Big), \qquad \alpha,\beta\in H^\star$$

эквивалентно равенству

$$\varkappa(x)=0$$

Доказательство. Это следует из определения стереотипной аппроксимации [1, §9]. □

Если теперь H, скажем, инъективная коалгебра со свойством стереотипной аппроксимации, то для элемента $x\in H$ символ $\sum_{(x)} x'\odot x''$ обозначает класс направленностей вида $\sum_{i=1}^{n_\nu} x'_{\nu,i}\odot x''_{\nu,i}$, сходящихся к $\varkappa(x)$:

$$\varkappa(x) \underset{\infty\leftarrow\nu}{\longleftarrow} \sum_{i=1}^{n_\nu} x'_{\nu,i}\odot x''_{\nu,i} \tag{1.32}$$

а запись

$$\varkappa(x)=\sum_{(x)} x'\odot x'' \tag{1.33}$$

нужно понимать так, что в правой части стоит какая-нибудь из этих направленностей, только индексы опущены, а стрелка заменена равенством.

Формулы вроде коумножения антипода

$$\varkappa(\sigma(x))=\sum_{(x)}\sigma(x'')\odot\sigma(x')$$

интерпретируются так: для всякой направленности $\sum_{i=1}^{n_\nu} x'_{\nu,i}\odot x''_{\nu,i}$, для которой справедливо (1.32), автоматически будет справедливо и

$$\varkappa(\sigma(x)) \underset{\infty\leftarrow\nu}{\longleftarrow} \sum_{i=1}^{n_\nu}\sigma(x''_{\nu,i})\odot\sigma(x'_{\nu,i})$$

В доказательстве также можно использовать запись (1.33):

$$\begin{aligned}
\langle\varkappa(\sigma(x)),\alpha\circledast\beta\rangle&=\langle\sigma(x),\alpha*\beta\rangle=\langle x,\sigma^\star(\alpha*\beta)\rangle=\langle x,\sigma^\star(\beta)*\sigma^\star(\alpha)\rangle=\langle\varkappa(x),\sigma^\star(\beta)\circledast\sigma^\star(\alpha)\rangle=\\
&=\left\langle\sum_{(x)}x'\odot x'',\sigma^\star(\beta)\circledast\sigma^\star(\alpha)\right\rangle=\sum_{(x)}\langle x'\odot x'',\sigma^\star(\beta)\circledast\sigma^\star(\alpha)\rangle=\sum_{(x)}\langle x',\sigma^\star(\beta)\rangle\cdot\langle x'',\sigma^\star(\alpha)\rangle=\\
&=\sum_{(x)}\langle\sigma(x'),\beta\rangle\cdot\langle\sigma(x''),\alpha\rangle=\sum_{(x)}\langle\sigma(x'')\odot\sigma(x'),\alpha\circledast\beta\rangle=\left\langle\sum_{(x)}\sigma(x'')\odot\sigma(x'),\alpha\circledast\beta\right\rangle
\end{aligned}$$

Как пример применения этих обобщенных обозначений Свидлера рассмотрим следующую ситуацию. В теории квантовых групп прямая проверка диаграммы антипода (1.18), то есть тождества

$$\mu\Big((\sigma\otimes 1)(\varkappa(x))\Big)=\varepsilon(x)\cdot 1_H=\mu\Big((1\otimes\sigma)(\varkappa(x))\Big),\qquad x\in H \tag{1.34}$$

часто приводит к громоздким вычислениям. В таких случаях бывает полезно одно наблюдение, принадлежащее Альфонсу ван Дэле [39]. Применительно к нашим стереотипным алгебрам оно выглядит так:

Лемма 1.1. *Если H – стереотиная биалгебра (неважно, проективная или инъективная) со стереотипной аппроксимацией, σ – ее (непрерывный) антигомоморфизм и равенства* (1.34) *верны для двух элементов $x\in H$ и $y\in H$, то они верны и для их произведения $x\cdot y$.*

Доказательство. Оба равенства для $x\cdot y$ доказываются прямой подстановкой, например, левое получается так (мы используем знак тензорного произведения $\otimes$, который можно заменять на $\circledast$ или $\odot$):

$$\mu\Big((\sigma\otimes 1)(\varkappa(x\cdot y))\Big)=\mu\Big((\sigma\otimes 1)(\varkappa(x)\cdot\varkappa(y))\Big)=\mu\left((\sigma\otimes 1)\left(\sum_{(x)}x'\otimes x''\cdot\sum_{(y)}y'\otimes y''\right)\right)=$$
$$=\sum_{(x),(y)}\mu\Big((\sigma\otimes 1)\,(x'\cdot y'\otimes x''\cdot y'')\Big)=\sum_{(x),(y)}\mu\Big(\sigma(x'\cdot y')\otimes x''\cdot y''\Big)=\sum_{(x),(y)}\mu\Big(\sigma(y')\cdot\sigma(x')\otimes x''\cdot y''\Big)=$$
$$=\sum_{(x),(y)}\sigma(y')\cdot\sigma(x')\cdot x''\cdot y''=\sum_{(y)}\sigma(y')\cdot\left(\sum_{(x)}\sigma(x')\cdot x''\right)\cdot y''=\sum_{(y)}\sigma(y')\cdot\varepsilon(x)\cdot 1_H\cdot y''=$$
$$=\varepsilon(x)\cdot 1_H\cdot\sum_{(y)}\sigma(y')\cdot y''=\varepsilon(x)\cdot 1_H\cdot\varepsilon(y)\cdot 1_H\cdot=\varepsilon(x\cdot y)\cdot 1_H\cdot$$

□

(e) Групповые элементы

Предложение 1.2. *Для элемента $a\in H$ стереотиной алгебры Хопфа H со стереотипной аппроксимацией следующие условия эквивалентны:*

(i) $\varkappa(a)=a\odot a\qquad(\varkappa(a)=a\circledast a)$*;*

(ii) функционал $\langle a,\cdot\rangle:H^\star\to\mathbb{C}$ мультипликативен:

$$\langle a,\alpha*\beta\rangle=\langle a,\alpha\rangle\cdot\langle a,\beta\rangle \tag{1.35}$$

(iii) оператор $\mathsf{M}_a^\star:H^\star\to H^\star$, сопряженный к оператору умножения на элемент a,

$$\mathsf{M}_a(x):=a\cdot x$$

является гомоморфизмом стереотипной алгебры $H^\star$.

Доказательство. Эквивалентность (i) и (ii) очевидна. Покажем, что (i) $\Longleftrightarrow$ (iii). Если a удовлетворяет (i), то

$$\langle x,\mathsf{M}_a^\star(\alpha*\beta)\rangle=\langle\mathsf{M}_a(x),\alpha*\beta\rangle=\langle a\cdot x,\alpha*\beta\rangle=\langle\varkappa(a\cdot x),\alpha\circledast\beta\rangle=\langle\varkappa(a)\cdot\varkappa(x),\alpha\circledast\beta\rangle=$$
$$=\left\langle a\odot a\cdot\sum_{(x)}x'\odot x'',\alpha\circledast\beta\right\rangle=\left\langle\sum_{(x)}(a\cdot x')\odot(a\cdot x''),\alpha\circledast\beta\right\rangle=\sum_{(x)}\langle a\cdot x',\alpha\rangle\cdot\langle a\cdot x'',\beta\rangle=$$
$$=\sum_{(x)}\langle x',\mathsf{M}_a^\star(\alpha)\rangle\cdot\langle x'',\mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle=\left\langle\sum_{(x)}x'\odot x'',\mathsf{M}_a^\star(\alpha)\circledast\mathsf{M}_a^\star(\beta)\right\rangle=\langle\varkappa(x),\mathsf{M}_a^\star(\alpha)\circledast\mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle=$$
$$=\langle x,\mathsf{M}_a^\star(\alpha)*\mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle$$

Это верно для всякого $x\in H$, поэтому

$$\mathsf{M}_a^\star(\alpha*\beta)=\mathsf{M}_a^\star(\alpha)*\mathsf{M}_a^\star(\beta) \tag{1.36}$$

Наоборот, если выполняется (1.36), то

$$\langle \varkappa(a), \alpha \circledast \beta\rangle = \langle a, \alpha * \beta\rangle = \langle 1, \mathsf{M}_a^\star(\alpha * \beta)\rangle = \langle 1, \mathsf{M}_a^\star(\alpha) * \mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle = \langle \varkappa(1), \mathsf{M}_a^\star(\alpha) \circledast \mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle = \\ = \langle 1 \odot 1, \mathsf{M}_a^\star(\alpha) \circledast \mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle = \langle 1, \mathsf{M}_a^\star(\alpha)\rangle \cdot \langle 1, \mathsf{M}_a^\star(\beta)\rangle = \langle a, \alpha\rangle \cdot \langle a, \beta\rangle = \langle a \odot a, \alpha \circledast \beta\rangle$$

и поскольку это верно для любых α, β, должно выполняться (i). □

Элемент a инъективной (проективной) стереотипной алгебры Хопфа H называется *групповым*, если $a \neq 0$ и a удовлетворяет условиям (i)-(ii)-(iii) предложения 1.2. Множество групповых элементов в H обозначается $\mathsf{G}(H)$. Как и в чисто алгебраическом случае (см. [37]), $\mathsf{G}(H)$ является группой относительно умножения в H, поскольку обладает следующими свойствами:

1°. $\forall a \in \mathsf{G}(H) \quad \varepsilon(a) = 1.$

2°. $\forall a \in \mathsf{G}(H) \quad a^{-1} = \sigma(a) \in \mathsf{G}(H).$

3°. $\forall a, b \in \mathsf{G}(H) \quad a \cdot b \in \mathsf{G}(H).$

Доказательство. Утверждение 1° доказывается применением аксиомы коумножения

$$1 \odot a = \mathsf{l}_H^{-1}(a) = (1.14) = (\varepsilon \odot \mathsf{id}_H)(\varkappa(a)) = (\varepsilon \odot \mathsf{id}_H)(a \odot a) = \varepsilon(a) \odot a \quad\Longrightarrow\quad \varepsilon(a) = 1$$

В 2° применяется тот факт, что $\sigma^\star$ – антигомоморфизм: с одной стороны, $\varkappa(\sigma(a)) = \sigma(a) \odot \sigma(a)$, потому что

$$\langle \varkappa(\sigma(a)), \alpha \circledast \beta\rangle = \langle \sigma(a), \alpha * \beta\rangle = \langle a, \sigma^\star(\alpha * \beta)\rangle = \langle a, \sigma^\star(\beta) * \sigma^\star(\alpha)\rangle = \langle \varkappa(a), \sigma^\star(\beta) \circledast \sigma^\star(\alpha)\rangle = \\ = \langle a \odot a, \sigma^\star(\beta) \circledast \sigma^\star(\alpha)\rangle = \langle a, \sigma^\star(\beta)\rangle \cdot \langle a, \sigma^\star(\alpha)\rangle = \langle \sigma(a), \beta\rangle \cdot \langle \sigma(a), \alpha\rangle = \langle \sigma(a) \odot \sigma(a), \alpha \circledast \beta\rangle$$

а, с другой, $\varepsilon(\sigma(a)) = \langle \sigma(a), 1_H\rangle = \langle a, \sigma^\star(1_H)\rangle = \langle a, 1_H\rangle = \varepsilon(a) = 1$. Вместе это означает, что $\sigma(a) \in \mathsf{G}(H)$. Кроме того,

$$\sigma(a) \cdot a = \mu(\sigma(a) \odot a) = \mu\Big((\sigma \odot \mathsf{id}_H)(a \odot a)\Big) = \mu\Big((\sigma \odot \mathsf{id}_H)(\varkappa(a))\Big) = (1.18) = \varepsilon(a) \cdot 1_H = (\text{свойство } 1^\circ) = 1_H$$

и, точно так же, $a \cdot \sigma(a) = 1_H$. Значит, $\sigma(a) = a^{-1}$.

Наконец, 3°: если $a, b \in \mathsf{G}(H)$, то, во-первых, $\varkappa(a \cdot b) = \varkappa(a) \cdot \varkappa(b) = a \odot a \cdot b \odot b = (a \cdot b) \odot (a \cdot b)$, и, во-вторых, $\varepsilon(a \cdot b) = \varepsilon(a) \cdot \varepsilon(b) = 1$. Отсюда $a \cdot b \in \mathsf{G}(H)$. □

Напомним, что элемент a алгебры A называется *центральным*, если он коммутирует со всеми остальными элементами:

$$\forall x \in A \quad a \cdot x = x \cdot a$$

Предложение 1.3. *Если a – групповой и, вдобавок, центральный элемент в алгебре Хопфа H, то*

1) справедливы равенства

$$\mathsf{M}_a \circ \sigma \circ \mathsf{M}_a = \sigma, \qquad \sigma \circ \mathsf{M}_a = \mathsf{M}_{a^{-1}} \circ \sigma \tag{1.37}$$

$$\mathsf{M}_a^\star \circ \sigma^\star \circ \mathsf{M}_a^\star = \sigma^\star, \qquad \sigma^\star \circ \mathsf{M}_a^\star = \mathsf{M}_{a^{-1}}^\star \circ \sigma^\star \tag{1.38}$$

2) если H обладает стереотипной аппроксимацией, то справедливы тождества

$$\varkappa\Big(\mathsf{M}_a^\star(\alpha)\Big) = \sum_{(\alpha)} \mathsf{M}_a^\star(\alpha') \circledast \alpha'' = \sum_{(\alpha)} \alpha' \circledast \mathsf{M}_a^\star(\alpha''), \qquad \alpha \in H^\star \tag{1.39}$$

$$\varkappa\Big((\mathsf{M}_a^\star)^{i+j}(\alpha)\Big) = \sum_{(\alpha)} (\mathsf{M}_a^\star)^i(\alpha') \circledast (\mathsf{M}_a^\star)^j(\alpha''), \qquad \alpha \in H^\star, \quad i, j \in \mathbb{N} \tag{1.40}$$

Доказательство. 1. Для всякого $x \in H$ имеем

$$(\mathsf{M}_a \circ \sigma \circ \mathsf{M}_a)(x) = a \cdot \sigma(a \cdot x) = a \cdot \sigma(x) \cdot \sigma(a) = a \cdot \sigma(x) \cdot a^{-1} = \sigma(x) \cdot a \cdot a^{-1} = \sigma(x)$$

2. Для любых $u, v \in H$, $\alpha \in H^\star$

$$\langle u\odot v,\varkappa(\mathsf{M}_a^\star(\alpha))\rangle=\langle u\cdot v,\mathsf{M}_a^\star(\alpha)\rangle=\langle a\cdot u\cdot v,\alpha\rangle=\langle (a\cdot u)\odot v,\varkappa(\alpha)\rangle=\left\langle (a\cdot u)\odot v,\sum_{(\alpha)}\alpha'\circledast\alpha''\right\rangle=$$
$$=\sum_{(\alpha)}\langle (a\cdot u)\odot v,\alpha'\circledast\alpha''\rangle=\sum_{(\alpha)}\langle (a\cdot u),\alpha'\rangle\cdot\langle v,\alpha''\rangle=\sum_{(\alpha)}\langle u,\mathsf{M}_a^\star(\alpha')\rangle\cdot\langle v,\alpha''\rangle=\sum_{(\alpha)}\langle u\odot v,\mathsf{M}_a^\star(\alpha')\circledast\alpha''\rangle=$$
$$=\left\langle u\odot v,\sum_{(\alpha)}\mathsf{M}_a^\star(\alpha')\circledast\alpha''\right\rangle$$

По теореме 1.8 это означает выполнение первого равенства в (1.39). Остальные доказываются аналогично. □

§ 2 Многообразия Штейна: прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$ и ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$

В этом параграфе мы обсудим некоторые свойства пространств голоморфных функций на комплексных многообразиях. Для наглядности нам будет полезно условие, чтобы глобальные функции разделяли точки многообразия, поэтому мы формулируем результаты для многообразий Штейна. Мы используем терминологию учебников [34, 38, 14].

(a) Многообразия Штейна

Пусть M – комплексное многообразие. Символом $\mathcal{O}(M)$ мы обозначаем алгебру всех голоморфных функций на M (с обычными поточечными операциями и топологией равномерной сходимости на компактах в M). Хорошо известно [38], что, как топологическое векторное пространство, $\mathcal{O}(M)$ является пространством Монтеля.

Многообразие M называется *многообразием Штейна* [34], если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

1) *голоморфная отделимость:* для любых двух точек $x\ne y\in M$ найдется функция $u\in\mathcal{O}(M)$ такая, что
$$u(x)\ne u(y)$$

2) *голоморфная униформизация:* для любой точки $x\in M$ найдутся функции $u_1,...,u_n\in\mathcal{O}(M)$, образующие локальные координаты многообразия M в окрестности x;

3) *голоморфная выпуклость:* для любого компакта $K\subseteq M$ его *голоморфно выпуклая оболочка*, то есть множество
$$\hat{K}=\{x\in M:\ \forall u\in\mathcal{O}(M)\ |u(x)|\leqslant\max_{y\in K}|u(y)|\}$$
является компактом в M.

Многообразиями Штейна будут комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ и всевозможные области голоморфности в $\mathbb{C}^n$. Простейший пример комплексного многообразия, не являющегося многообразием Штейна – *комплексный тор*, то есть факторгруппа комплексной плоскости $\mathbb{C}$ по решетке $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$.

(b) Внешние огибающие на M и прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$

Операции ▪ и ▫. В этом пункте нас будут интересовать вещественные функции f на многообразии M, ограниченные снизу единицей,
$$f\geqslant 1,$$
то есть принимающие значения в множестве $[1,+\infty)$. Естественно, мы будем использовать запись $f:M\to[1;+\infty)$. Функцию $f:M\to[1;+\infty)$ мы, как обычно, называем локально ограниченной, если для всякой точки $x\in M$ можно подобрать окрестность $U\ni x$ такую, что
$$\sup_{y\in U}|f(y)|<\infty$$

Поскольку f ограничена снизу единицей, это условие равносильно условию
$$\sup_{y\in U}f(y)<\infty$$

Предложение 2.1. *Для каждой локально ограниченной функции $f : M \to [1; +\infty)$ формула*

$$f^{\blacksquare} := \{u \in \mathcal{O}(M) : \quad \forall x \in M \quad |u(x)| \leqslant f(x)\} \tag{2.1}$$

определяет абсолютно выпуклое компактное множество функций $f^{\blacksquare} \subseteq \mathcal{O}(M)$, содержащее тождественную единицу:

$$1 \in f^{\blacksquare}.$$

Доказательство. Множество $f^{\blacksquare}$ будет компактом, потому что оно замкнуто и ограничено в пространстве Монтеля $\mathcal{O}(M)$. □

Предложение 2.2. *Для каждого ограниченного множества функций $D \subseteq \mathcal{O}(M)$, содержащего тождественную единицу,*

$$1 \in D,$$

формула

$$D^{\square}(x) := \sup_{u \in D} |u(x)|, \qquad x \in M \tag{2.2}$$

определяет непрерывную вещественную функцию $D^{\square} : M \to \mathbb{R}$, ограниченную снизу единицей:

$$D^{\square} \geqslant 1.$$

Доказательство. Заметим с самого начала, что D можно считать компактом. Для этого рассмотрим замыкание $\overline{D}$ множества D. Поскольку D ограничено в пространстве Монтеля $\mathcal{O}(M)$, $\overline{D}$ будет компактом в $\mathcal{O}(M)$. При этом, поскольку при непрерывном отображении $u \mapsto \delta^x(u) = u(x)$ образ замыкания $\delta^x(\overline{D})$ содержится в замыкании образа $\overline{\delta^x(D)}$

$$\delta^x(\overline{D}) \subseteq \overline{\delta^x(D)},$$

выполняется цепочка неравенств

$$\sup_{\lambda \in \delta^x(D)} |\lambda| \leqslant \sup_{\lambda \in \delta^x(\overline{D})} |\lambda| \leqslant \sup_{\lambda \in \overline{\delta^x(D)}} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \delta^x(D)} |\lambda|$$

откуда

$$\sup_{\lambda \in \delta^x(\overline{D})} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \delta^x(D)} |\lambda|$$

то есть функции $\overline{D}^{\square}$ и $D^{\square}$ совпадают:

$$\overline{D}^{\square}(x) = \sup_{u \in \overline{D}} |\delta^x(u)| = \sup_{\lambda \in \delta^x(\overline{D})} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \delta^x(D)} |\lambda| = \sup_{u \in D} |\delta^x(u)| = D^{\square}(x)$$

Итак, D можно считать компактом. Зафиксируем произвольный компакт $K \subseteq M$ и рассмотрим пространство $C(K)$ непрерывных функций на K (с обычной топологией равномерной сходимости на K). Отображение ограничения $u \in \mathcal{O}(M) \mapsto u|_K \in C(K)$ будет непрерывным отображением пространства Фреше $\mathcal{O}(M)$ в банахово пространство $C(K)$. Если D – компакт в $\mathcal{O}(M)$, то его образ $D|_K$ – компакт в $C(K)$. Отсюда, по теореме Арцела, $D|_K$ поточечно ограничено и равностепенно непрерывно на K. Следовательно, функция

$$D^{\square}(x) := \sup_{u \in D} |u(x)|, \qquad x \in K$$

непрерывна на K. Поскольку это верно для любого компакта K в M, мы получаем, что эта функция непрерывна на M. □

Свойства операций $\blacksquare$ и $\square$:

$$f \leqslant g \quad \Longrightarrow \quad f^{\blacksquare} \subseteq g^{\blacksquare}, \qquad\qquad D \subseteq E \quad \Longrightarrow \quad D^{\square} \leqslant E^{\square} \tag{2.3}$$

$$(f^{\blacksquare})^{\square} \leqslant f, \qquad\qquad D \subseteq (D^{\square})^{\blacksquare} \tag{2.4}$$

$$((f^{\blacksquare})^{\square})^{\blacksquare} = f^{\blacksquare}, \qquad\qquad ((D^{\square})^{\blacksquare})^{\square} = D^{\square} \tag{2.5}$$

Доказательство. Свойства (2.3) и (2.4) очевидны, а (2.5) следуют из них:

$$\left.\begin{cases} (f^{\blacksquare})^{\square} \leqslant f \quad \Longrightarrow \quad (\text{применяем операцию } \blacksquare) \quad \Longrightarrow \quad ((f^{\blacksquare})^{\square})^{\blacksquare} \subseteq f^{\blacksquare} \\ D \subseteq (D^{\square})^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad (\text{подстановка: } D = f^{\blacksquare}) \quad \Longrightarrow \quad f^{\blacksquare} \subseteq ((f^{\blacksquare})^{\square})^{\blacksquare} \end{cases}\right\} \quad \Longrightarrow \quad ((f^{\blacksquare})^{\square})^{\blacksquare} = f^{\blacksquare}$$

$$\left.\begin{cases} D \subseteq (D^{\square})^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad (\text{применяем операцию } \square) \quad \Longrightarrow \quad D^{\square} \leqslant ((D^{\square})^{\blacksquare})^{\square} \\ (f^{\blacksquare})^{\square} \leqslant f \quad \Longrightarrow \quad (\text{подстановка: } f = D^{\square}) \quad \Longrightarrow \quad ((D^{\square})^{\blacksquare})^{\square} \leqslant D^{\square} \end{cases}\right\} \quad \Longrightarrow \quad ((D^{\square})^{\blacksquare})^{\square} = D^{\square}$$

□

Внешние огибающие на M**.** Если ввести обозначения

$$f^{\blacksquare\square} := (f^{\blacksquare})^{\square} \qquad\qquad D^{\square\blacksquare} := (D^{\square})^{\blacksquare} \tag{2.6}$$

то из (2.3), (2.4), (2.5) будет следовать

$$f^{\blacksquare\square} \leqslant f, \qquad\qquad D \subseteq D^{\square\blacksquare} \tag{2.7}$$

$$f \leqslant g \quad\Longrightarrow\quad f^{\blacksquare\square} \leqslant g^{\blacksquare\square}, \qquad\qquad D \subseteq E \quad\Longrightarrow\quad D^{\square\blacksquare} \subseteq E^{\square\blacksquare} \tag{2.8}$$

$$(f^{\blacksquare\square})^{\blacksquare\square} = f^{\blacksquare\square} \qquad\qquad (D^{\square\blacksquare})^{\square\blacksquare} = D^{\square\blacksquare} \tag{2.9}$$

Назовем локально ограниченную функцию $g : M \to [1; +\infty)$,

— *внешней огибающей для ограниченного множества* $D \subseteq \mathcal{O}(M)$, $1 \in D$, если

$$g = D^{\square}$$

— *внешней огибающей для локально ограниченной функции* $f : M \to [1; +\infty)$ если

$$g = f^{\blacksquare\square}$$

— *внешней огибающей на* M, если она удовлетворяет следующим равносильным условиям:

(i) g является внешней огибающей для некоторого ограниченного множества $D \subseteq \mathcal{O}(M)$, $1 \in D$,

$$g = D^{\square}$$

(ii) g является внешней огибающей для некоторой локально ограниченной функции $f : M \to [1; +\infty)$,

$$g = f^{\blacksquare\square}$$

(iii) g является внешней огибающей для самой себя:

$$g^{\blacksquare\square} = g$$

Доказательство. Равносильность условий (i), (ii), (iii) требует некоторых пояснений.

$(i) \Longrightarrow (ii)$. Если g – внешняя огибающая для какого-то множества D, то есть $g = D^{\square}$, то $g = D^{\square} = (2.5) = ((D^{\square})^{\blacksquare})^{\square} = (D^{\square})^{\blacksquare\square}$, то есть g – внешняя огибающая для функции $f = D^{\square}$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Если g – внешняя огибающая для некоторой функции f, то есть $g = f^{\blacksquare\square}$, то $g^{\blacksquare\square} = (f^{\blacksquare\square})^{\blacksquare\square} = (2.9) = f^{\blacksquare\square} = g$, то есть g – внешняя огибающая для самой себя.

$(iii) \Longrightarrow (i)$. Если g – внешняя огибающая для самой себя, то есть $g = g^{\blacksquare\square} = (g^{\blacksquare})^{\square}$, то, положив $D = g^{\blacksquare}$, мы получим, $g = D^{\square}$, то есть g – внешняя огибающая для множества D. □

Свойства внешних огибающих:

(i) Всякая внешняя огибающая g на M является непрерывной функцией на M.

(ii) Для любой локально ограниченной функции $f : M \to [1; +\infty)$ ее внешняя огибающая $f^{\blacksquare\square}$ будет наибольшей внешней огибающей на M, мажорируемой f:

(a) $f^{\blacksquare\square}$ – внешняя огибающая на M, мажорируемая f:

$$f^{\blacksquare\square} \leqslant f$$

(b) если g – другая внешняя огибающая на M, мажорируемая f,

$$g \leqslant f$$

то g мажорируется и $f^{\blacksquare\square}$:

$$g \leqslant f^{\blacksquare\square}$$

Прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$. Назовем множество $E \subseteq \mathcal{O}(M)$, $1 \in E$,

— *прямоугольником, порожденным локально ограниченной функцией* $f : M \to [1; +\infty)$ если

$$E = f^{\blacksquare}$$

— *прямоугольником, порожденным ограниченным множеством* $D \subseteq \mathcal{O}(M)$, $1 \in D$, если

$$E = D^{\square\blacksquare}$$

— *прямоугольником* в $\mathcal{O}(M)$, если выполняются следующие равносильные условия:

(i) E является прямоугольником, порожденным некоторой локально ограниченной функцией $f : M \to [1; +\infty)$

$$E = f^{\blacksquare}$$

(ii) E является прямоугольником, порожденным некоторым ограниченным множеством $D \subseteq \mathcal{O}(M)$, $1 \in D$,

$$E = D^{\square\blacksquare}$$

(iii) E является прямоугольником, порожденным самим собой:

$$E = E^{\square\blacksquare}$$

Доказательство. Равносильность условий (i), (ii), (iii) доказывается так же как в случае с внешними огибающими. □

Свойства прямоугольников:

(i) Всякий прямоугольник E в $\mathcal{O}(M)$ является абсолютно выпуклым компактом в $\mathcal{O}(M)$.

(ii) Для любого ограниченного множества $D \subseteq \mathcal{O}(M)$ порожденный им прямоугольник $D^{\square\blacksquare}$ будет наименьшим прямоугольником в $\mathcal{O}(M)$, содержащим D:

(a) $D^{\square\blacksquare}$ – прямоугольник в $\mathcal{O}(M)$, содержащий D:

$$D \subseteq D^{\square\blacksquare}$$

(b) если E – другой прямоугольник в $\mathcal{O}(M)$, содержащий D,

$$D \subseteq E,$$

то E содержит и $D^{\square\blacksquare}$:

$$D^{\square\blacksquare} \subseteq E$$

(iii) Прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$ образуют фундаментальную систему компактов в $\mathcal{O}(M)$: всякий компакт D в $\mathcal{O}(M)$ содержится в некотором прямоугольнике.

Теорема 2.1. *Формулы*

$$D = f^{\blacksquare}, \qquad f = D^{\square} \tag{2.10}$$

устанавливают биекцию между внешними огибающими f на M и прямоугольниками D в $\mathcal{O}(M)$.

Доказательство. По определению внешних огибающих и прямоугольников, операции $f \mapsto f^{\blacksquare}$ и $D \mapsto D^{\square}$ переводят внешние огибающие в прямоугольники, а прямоугольники во внешние огибающие. Более того, на этих двух классах эти операции будут взаимно обратны. Например, если f – внешняя огибающая, то $f^{\blacksquare\square} = f$, то есть композиция операций $\blacksquare$ и $\square$ возвращает к исходной функции:

$$f \mapsto f^{\blacksquare} \mapsto f^{\blacksquare\square} = f$$

Точно также, композиция операций $\square$ и $\blacksquare$ возвращает к исходному множеству D, если оно изначально выбиралось как прямоугольник:

$$D \mapsto D^{\square} \mapsto D^{\square\blacksquare} = D$$

□

(c) Лемма о полярах

Напомним, что *полярой* множества A в локально выпуклом пространстве X называется множество A° линейных непрерывных функционалов $f : X \to \mathbb{C}$, ограниченных на A единицей:

$$A^\circ = \{f \in X^\star : \quad \sup_{x\in A} |f(x)| \leqslant 1\}$$

Если X – стереотипное пространство и A – подмножество в сопряженном пространстве $X^\star$, то из-за равенства $(X^\star)^\star = X$ поляру $A^\circ \subseteq (X^\star)^\star$ удобно считать подмножеством в X и обозначать ее ${}^\circ A$:

$${}^\circ A = \{x \in X : \quad \sup_{f\in A} |f(x)| \leqslant 1\}$$

Важное для нас наблюдение здесь состоит в том, что если $A \subseteq X^\star$, и мы сначала берем поляру ${}^\circ A$, а затем поляру от поляры $({}^\circ A)^\circ$ – это множество называется *биполярой* множества A – то оказывается, что $({}^\circ A)^\circ$ представляет собой замкнутую абсолютно выпуклую оболочку (замыкание множества линейных комбинаций вида $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_i$, где $a_i \in A$, $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leqslant 1$) множества A в $X^\star$:

$$({}^\circ A)^\circ = \overline{\mathsf{absconv}}\, A \tag{2.11}$$

В этом заключается содержание классической *теоремы о биполяре* применительно к стереотипным пространствам.

В частном случае, когда $A = D$ – множество в $\mathcal{O}(M)$, его полярой D° будет множество аналитических функционалов $\alpha \in \mathcal{O}^\star(M)$, ограниченных на D единицей:

$$D^\circ = \{\alpha \in \mathcal{O}^\star(M) : \quad \sup_{u\in D} |\alpha(u)| \leqslant 1\}$$

Наоборот, если A – какое-то множество аналитических функционалов, $A \subseteq \mathcal{O}^\star(M)$, то его полярой в $\mathcal{O}(M)$ будет множество, обозначаемое ${}^\circ A$ и состоящее из функций $u \in \mathcal{O}(M)$, на которых все функционалы $\alpha \in A$ ограничены единицей:

$${}^\circ A = \{u \in \mathcal{O}(M) : \quad \sup_{\alpha\in A} |\alpha(u)| \leqslant 1\}$$

Лемма 2.1 (о полярах). *Операции перехода к поляре удовлетворяют следующим тождествам.*

(a) Для ограниченного множества D в $\mathcal{O}(M)$, содержащего единицу, его внешняя огибающая $D^\square$ связана с его полярой D° тождеством

$$\frac{1}{D^\square(x)} = \max\{\lambda > 0 : \quad \lambda \cdot \delta^x \in D^\circ\} \tag{2.12}$$

(b) Для локально ограниченной функции $f : M \to [1; +\infty)$ порождаемый ей прямоугольник $f^\blacksquare$ есть поляра системы функционалов вида $\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x$:

$$f^\blacksquare = {}^\circ\left\{\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x; \quad x \in M\right\} \tag{2.13}$$

(c) Поляра прямоугольника $f^\blacksquare$ есть абсолютная выпуклая оболочка системы функционалов вида $\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x$:

$$(f^\blacksquare)^\circ = \overline{\mathsf{absconv}}\left\{\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x; \quad x \in M\right\} \tag{2.14}$$

Доказательство. (a) Для $\lambda > 0$ получаем:

$$\lambda \cdot \delta^x \in D^\circ \iff \sup_{u\in D} |\lambda \cdot \delta^x(u)| \leqslant 1 \iff D^\square(x) = \sup_{u\in D} |\delta^x(u)| \leqslant \frac{1}{\lambda} \iff \lambda \leqslant \frac{1}{D^\square(x)}$$

(b) есть переформулировка определения $f^\blacksquare$:

$$u \in f^\blacksquare \overset{(2.1)}{\iff} \forall x \in M \quad |u(x)| = |\delta^x(u)| \leqslant f(x) \iff$$
$$\iff \sup_{x\in M} \left|\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x(u)\right| \leqslant 1 \iff u \in {}^\circ\left\{\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x; \quad x \in M\right\}$$

(c) есть следствие (b) и теоремы о биполяре:

$$(f^\blacksquare)^\circ = \left({}^\circ\left\{\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x; \quad x \in M\right\}\right)^\circ = (2.11) = \overline{\mathsf{absconv}}\left\{\frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x; \quad x \in M\right\}$$

□

(d) Внутренние огибающие на M и ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$

В этом пункте нас будут интересовать замкнутые абсолютно выпуклые окрестности нуля Δ в $\mathcal{O}^\star(M)$, удовлетворяющие следующим двум равносильным условиям:

(A) поляра ${}^\circ\Delta$ множества Δ содержит тождественную единицу $1 \in \mathcal{O}(M)$:

$$1 \in {}^\circ\Delta \tag{2.15}$$

(B) на тождественной единице $1 \in \mathcal{O}(M)$ значение функционалов $\alpha \in \Delta$ не превосходит единицы:

$$\forall \alpha \in \Delta \quad |\alpha(1)| \leqslant 1 \tag{2.16}$$

Эти два условия влекут еще одно (неэквивалентное (A) и (B)):

(C) функционал вида $\lambda \cdot \delta^x$, где $\lambda > 0$, может принадлежать Δ только если $\lambda \leqslant 1$:

$$\forall x \in M \quad \forall \lambda > 0 \quad \Big(\lambda \cdot \delta^x \in \Delta \implies \lambda \leqslant 1\Big). \tag{2.17}$$

Доказательство. Если $\lambda \cdot \delta^x \in \Delta$, то $\forall u \in {}^\circ\Delta$ $|\lambda \cdot \delta^x(u)| \leqslant 1$. В частности, при $u = 1$ мы получаем $|\lambda \cdot \delta^x(1)| = \lambda \cdot 1 \leqslant 1$, то есть $\lambda \leqslant 1$. $\square$

Функцию $\varphi : M \to (0, +\infty)$ мы называем *локально отделенной от нуля*, если для всякой точки $x \in M$ можно подобрать окрестность $U \ni x$ такую, что

$$\inf_{y \in U} \varphi(y) > 0$$

Операции $\blacklozenge$ и $\lozenge$.

Предложение 2.3. *Для каждой локально отделенной от нуля функции $\varphi : M \to (0, 1]$ формула*

$$\varphi^\blacklozenge := \overline{\mathsf{absconv}}\{\varphi(x) \cdot \delta^x;\ x \in M\} \tag{2.18}$$

определяет абсолютно выпуклую окрестность нуля в пространстве аналитических функционалов $\mathcal{O}^\star(M)$, удовлетворяющую условиям (2.15)-(2.17).

Доказательство. Функция $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ будет локально ограниченной и принимающей значения в интервале $[1; +\infty)$. Значит по лемме 2.1,

$$(f^\blacksquare)^\circ = (2.14) = \overline{\mathsf{absconv}} \left\{ \frac{1}{f(x)} \cdot \delta^x; \quad x \in M \right\} = \overline{\mathsf{absconv}} \left\{ \varphi(x) \cdot \delta^x; \quad x \in M \right\}$$

Это множество будет замкнутой абсолютно выпуклой окрестностью нуля в $\mathcal{O}^\star(M)$, поскольку оно является полярой компакта $f^\blacksquare$ в $\mathcal{O}(M)$. Кроме того, поскольку $f \geqslant 1$, компакт $f^\blacksquare$ содержит единицу, поэтому его поляра $\overline{\mathsf{absconv}} \left\{ \varphi(x) \cdot \delta^x; \quad x \in M \right\}$ удовлетворяет условиям (A),(B),(C) с. 40. $\square$

Предложение 2.4. *Для каждой замкнутой абсолютно выпуклой окрестности нуля Δ в пространстве аналитических функционалов $\mathcal{O}^\star(M)$, удовлетворяющей условиям* (2.15)-(2.16) *формула*

$$\Delta^\lozenge(x) := \sup\{\lambda > 0 :\ \lambda \cdot \delta^x \in \Delta\} \tag{2.19}$$

определяет непрерывную локально отделенную от нуля функцию $\Delta^\lozenge : M \to (0; 1]$.

Доказательство. Поскольку Δ – окрестность нуля в $\mathcal{O}^\star(M)$, ее поляра $D = {}^\circ\Delta$ будет компактом в $\mathcal{O}^\star(M)$, причем $1 \in D$. Внешняя огибающая $D^\square$ этого компакта будет непрерывна и локально ограничена по предложению 2.2. Значит, функция

$$\Delta^\lozenge(x) := \sup\{\lambda > 0 :\ \lambda \cdot \delta^x \in \Delta = D^\circ\} = (2.12) = \frac{1}{D^\square(x)}$$

непрерывна и локально отделена от нуля. $\square$

Следующие свойства доказываются так же, как (2.3), (2.4) и (2.5).

Свойства операций $\blacklozenge$ и $\lozenge$:

$$\varphi \leqslant \psi \quad \Longrightarrow \quad \varphi^\blacklozenge \subseteq \psi^\blacklozenge, \qquad\qquad \Delta \subseteq \Gamma \quad \Longrightarrow \quad \Delta^\lozenge \leqslant \Gamma^\lozenge \tag{2.20}$$

$$\varphi \leqslant (\varphi^\blacklozenge)^\lozenge, \qquad\qquad (\Delta^\lozenge)^\blacklozenge \subseteq \Delta \tag{2.21}$$

$$((\varphi^\blacklozenge)^\lozenge)^\blacklozenge = \varphi^\blacklozenge, \qquad\qquad ((\Delta^\lozenge)^\blacklozenge)^\lozenge = \Delta^\lozenge \tag{2.22}$$

Внутренние огибающие на M. Если ввести обозначения

$$\varphi^{\blacklozenge\lozenge} := (\varphi^{\blacklozenge})^{\lozenge} \qquad \varDelta^{\lozenge\blacklozenge} := (\varDelta^{\lozenge})^{\blacklozenge} \tag{2.23}$$

то из (2.20), (2.21), (2.22) будет следовать

$$\varphi \leqslant \psi \quad\Longrightarrow\quad \varphi^{\blacklozenge\lozenge} \leqslant \psi^{\blacklozenge\lozenge}, \qquad \varDelta \subseteq \varGamma \quad\Longrightarrow\quad \varDelta^{\lozenge\blacklozenge} \subseteq \varGamma^{\lozenge\blacklozenge} \tag{2.24}$$

$$\varphi \leqslant \varphi^{\blacklozenge\lozenge}, \qquad \varDelta^{\lozenge\blacklozenge} \subseteq \varDelta \tag{2.25}$$

$$(\varphi^{\blacklozenge\lozenge})^{\blacklozenge\lozenge} = \varphi^{\blacklozenge\lozenge} \qquad (\varDelta^{\lozenge\blacklozenge})^{\lozenge\blacklozenge} = \varDelta^{\lozenge\blacklozenge} \tag{2.26}$$

Назовем локально отделенную от нуля функцию $\psi : M \to (0;1]$

— *внутренней огибающей для абсолютно выпуклой окрестности нуля* $\varDelta$ в $\mathcal{O}^\star(M)$, $1 \in {}^\circ\varDelta$, если

$$\psi = \varDelta^{\lozenge}$$

— *внутренней огибающей для локально отделенной от нуля функции* $\varphi : M \to (0;1]$, если

$$\psi = \varphi^{\blacklozenge\lozenge}$$

— *внутренней огибающей на* M, если она удовлетворяет следующим равносильным условиям:

(i) ψ является внутренней огибающей для некоторой абсолютно выпуклой окрестности нуля $\varDelta$ в $\mathcal{O}^\star(M)$,

$$\psi = \varDelta^{\lozenge}$$

(ii) ψ является внутренней огибающей для некоторой локально отделенной от нуля функции $\varphi : M \to (0;1]$.

$$\psi = \varphi^{\blacklozenge\lozenge}$$

(iii) ψ является внутренней огибающей для самой себя:

$$\psi^{\blacklozenge\lozenge} = \psi$$

Равносильность условий (i), (ii), (iii) доказывается так же, как для внешних огибающих.

Свойства внутренних огибающих:

(i) Всякая внутренняя огибающая ψ на M является непрерывной функцией на M.

(ii) Для любой локально отделенной от нуля функции $\varphi : M \to (0;1]$ ее внутренняя огибающая $\varphi^{\blacklozenge\lozenge}$ будет наименьшей внутренней огибающей на M, мажорирующей φ:

(a) $\varphi^{\blacklozenge\lozenge}$ – внутренняя огибающая на M, мажорирующая φ:

$$\varphi \leqslant \varphi^{\blacklozenge\lozenge}$$

(b) если ψ – другая внутренняя огибающая на M, мажорирующая φ,

$$\varphi \leqslant \psi$$

то ψ мажорирует и $\varphi^{\blacklozenge\lozenge}$:

$$\varphi^{\blacklozenge\lozenge} \leqslant \psi$$

Ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$ Назовем множество $\varGamma \subseteq \mathcal{O}^\star(M)$,

— *ромбом, порожденным локально отделенной от нуля функцией* $\varphi : M \to (0;1]$, если

$$\varGamma = \varphi^{\blacklozenge}$$

— *ромбом, порожденным абсолютно выпуклой окрестностью нуля* $\varDelta \subseteq \mathcal{O}^\star(M)$, $1 \in {}^\circ\varDelta$, если

$$\varGamma = \varDelta^{\lozenge\blacklozenge}$$

— *ромбом* в $\mathcal{O}^\star(M)$, если оно удовлетворяет следующим равносильным условиям:

(i) $\varGamma$ является ромбом, порожденным некоторой локально отделенной от нуля функцией $\varphi : M \to (0;1]$,

$$\varGamma = \varphi^{\blacklozenge}$$

(ii) $\varGamma$ является ромбом, порожденным некоторой абсолютно выпуклой окрестностью нуля $\varDelta \subseteq \mathcal{O}^\star(M)$, $1 \in {}^\circ\varDelta$,

$$\varGamma = \varDelta^{\lozenge\blacklozenge}$$

(iii) ромб, порожденный $\varGamma$, совпадает с $\varGamma$:

$$\varGamma = \varGamma^{\lozenge\blacklozenge}$$

Доказательство. Равносильность условий (i), (ii), (iii) доказывается так же как в случае с внешними огибающими. □

Свойства ромбов:

(i) Всякий ромб $\varDelta$ в $\mathcal{O}^\star(M)$ является замкнутой абсолютно выпуклой окрестностью нуля в $\mathcal{O}^\star(M)$.

(ii) Для любой окрестности нуля $\varDelta \subseteq \mathcal{O}^\star(M)$ порождаемый ею ромб $\varDelta^{\lozenge\blacklozenge}$ будет наибольшим ромбом в $\mathcal{O}^\star(M)$, содержащимся в $\varDelta$:

(a) $\varDelta^{\lozenge\blacklozenge}$ – ромб в $\mathcal{O}^\star(M)$, содержащийся в $\varDelta$:

$$\varDelta^{\lozenge\blacklozenge} \subseteq \varDelta$$

(b) если $\varGamma$ – другой ромб в $\mathcal{O}^\star(M)$, содержащийся в $\varDelta$,

$$\varGamma \subseteq \varDelta,$$

то $\varGamma$ содержится и в $\varDelta^{\lozenge\blacklozenge}$:

$$\varGamma \subseteq \varDelta^{\lozenge\blacklozenge}$$

(iii) Ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathcal{O}^\star(M)$: всякая окрестность нуля $\varGamma$ в $\mathcal{O}^\star(M)$ содержит некоторый ромб.

По аналогии с теоремой 2.1 доказывается

Теорема 2.2. *Формулы*

$$\varDelta = \varphi^{\blacklozenge}, \qquad\qquad \varphi = \varDelta^{\lozenge} \tag{2.27}$$

устанавливают биекцию между внутренними огибающими φ на M и ромбами $\varDelta$ в $\mathcal{O}^\star(M)$.

(e) Двойственность между прямоугольниками и ромбами

Из леммы о полярах 2.1 следует

Теорема 2.3. *Справедливы следующие формулы*

$$(f^{\blacksquare})^{\circ} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge}, \qquad {}^{\circ}(\varphi^{\blacklozenge}) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare}, \tag{2.28}$$

$$(D^{\circ})^{\lozenge} = \frac{1}{D^{\square}}\ , \qquad ({}^{\circ}\Delta)^{\square} = \frac{1}{\Delta^{\lozenge}}\ , \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{f^{\blacksquare\square}} = \left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge\lozenge}, \qquad \frac{1}{\varphi^{\blacklozenge\lozenge}} = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare\square}, \tag{2.30}$$

$$\left(D^{\square\blacksquare}\right)^{\circ} = \left(D^{\circ}\right)^{\lozenge\blacklozenge}, \qquad {}^{\circ}\left(\Delta^{\lozenge\blacklozenge}\right) = \left({}^{\circ}\Delta\right)^{\square\blacksquare}, \tag{2.31}$$

– где $f : M \to [1; +\infty)$ – произвольная локально ограниченная функция, $\varphi : M \to (0; 1]$ – произвольная функция, локально отделенная от нуля, D – произвольный абсолютно выпуклый компакт в $\mathcal{O}(M)$, Δ – произвольная замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в $\mathcal{O}^\star(M)$.

Доказательство. 1. Первая формула в (2.28) следует из (2.14):

$$(f^{\blacksquare})^{\circ} = (2.14) = \overline{\mathsf{absconv}}\left\{\frac{1}{f(x)}\cdot\delta^x;\quad x \in M\right\} = (2.18) = \left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge}$$

Из нее подстановкой $f = \frac{1}{\varphi}$ следует вторая:

$$\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare\,\circ} = \varphi^{\blacklozenge} \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare} = {}^{\circ}\left(\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare\,\circ}\right) = {}^{\circ}\left(\varphi^{\blacklozenge}\right)$$

2. Далее, первая формула в (2.29) следует из (2.12):

$$\frac{1}{D^{\square}(x)} = (2.12) = \max\{\lambda > 0 :\ \lambda\cdot\delta^x \in D^{\circ}\} = (2.19) = (D^{\circ})^{\lozenge}(x) \qquad \Longrightarrow \qquad (D^{\circ})^{\lozenge} = \frac{1}{D^{\square}}$$

А из нее подстановкой $D = {}^{\circ}\Delta$ получается вторая:

$$D^{\square} = \frac{1}{(D^{\circ})^{\lozenge}} \qquad \Longrightarrow \qquad ({}^{\circ}\Delta)^{\square} = \frac{1}{(({}^{\circ}\Delta)^{\circ})^{\lozenge}} = \frac{1}{\Delta^{\lozenge}}$$

3. Теперь первая формула в (2.30) получается из первой формулы в (2.29) и первой формулы в (2.28) подстановкой $D = f^{\blacksquare}$:

$$\frac{1}{D^{\square}} = (D^{\circ})^{\lozenge} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{f^{\blacksquare\square}} = (f^{\blacksquare\,\circ})^{\lozenge} = (2.28) = \left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge\lozenge}$$

Вторая формула в (2.30) получается из второй формулы в (2.29) и второй формулы в (2.28) подстановкой $\Delta = \varphi^{\blacklozenge}$:

$$\frac{1}{\Delta^{\lozenge}} = ({}^{\circ}\Delta)^{\square} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\varphi^{\blacklozenge\lozenge}} = \left({}^{\circ}(\varphi^{\blacklozenge})\right)^{\square} = (2.28) = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare\square}$$

4. Первая формула в (2.31) следует из первой формулы в (2.29) и первой формулы в (2.28):

$$(D^{\circ})^{\lozenge} = \frac{1}{D^{\square}} \qquad \Longrightarrow \qquad (D^{\circ})^{\lozenge\blacklozenge} = \left(\frac{1}{D^{\square}}\right)^{\blacklozenge} = (2.28) = (D^{\square\blacksquare})^{\circ}$$

Наконец, вторая формула в (2.31) следует из второй формулы в (2.29) и второй формулы в (2.28):

$$({}^{\circ}\Delta)^{\square} = \frac{1}{\Delta^{\lozenge}} \qquad \Longrightarrow \qquad ({}^{\circ}\Delta)^{\square\blacksquare} = \left(\frac{1}{\Delta^{\lozenge}}\right)^{\blacksquare} = (2.28) = {}^{\circ}\left(\Delta^{\lozenge\blacklozenge}\right)$$

$\square$

Теорема 2.3 влечет за собой еще два важных утверждения.

Теорема 2.4. *Операция перехода к обратной функции*

$$f = \frac{1}{\varphi}, \qquad\qquad \varphi = \frac{1}{f} \tag{2.32}$$

устанавливает биекцию между внешними огибающими f и внутренними огибающими φ на M.

Доказательство. Если φ – внутренняя огибающая, то $\varphi^{\blacklozenge\lozenge} = \varphi$, и поэтому $\left(\frac{1}{\varphi}\right)^{\blacksquare\square} = (2.30) = \frac{1}{\varphi^{\blacklozenge\lozenge}} = \frac{1}{\varphi}$, то есть $\frac{1}{\varphi}$ – внешняя огибающая. И наоборот, если f – внешняя огибающая, то $f^{\blacksquare\square} = f$, и поэтому $\left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge\lozenge} = (2.30) = \frac{1}{f^{\blacksquare\square}} = \frac{1}{f}$, то есть $\frac{1}{f}$ – внутренняя огибающая. $\square$

Теорема 2.5. *Операции перехода к полярам*

$$D = {}^{\circ}\!\varDelta, \qquad\qquad \varDelta = D^{\circ} \tag{2.33}$$

устанавливают биекцию между прямоугольниками D в $\mathcal{O}(M)$, и ромбами $\varDelta$ в $\mathcal{O}^{\star}(M)$.

Доказательство. Если $\varDelta$ – ромб, то $\varDelta^{\lozenge\blacklozenge} = \varDelta$, и поэтому $({}^{\circ}\!\varDelta)^{\square\blacksquare} = (2.31) = {}^{\circ}\!(\varDelta^{\lozenge\blacklozenge}) = {}^{\circ}\!\varDelta$, то есть ${}^{\circ}\!\varDelta$ – прямоугольник. Наоборот, если D – прямоугольник, то $D^{\blacksquare\square} = D$, поэтому $(D^{\circ})^{\lozenge\blacklozenge} = (2.31) = (D^{\blacksquare\square})^{\circ} = D^{\circ}$, то есть D° – ромб. Поскольку переход к поляре является биекцией между замкнутыми абсолютно выпуклыми множествами, он будет биекцией и между прямоугольниками и ромбами. $\square$

Из теорем 2.4, 2.5 и 2.3 следует теперь

Теорема 2.6. *Справедливы следующие формулы:*

$$\left((f^{\blacksquare})^{\circ}\right)^{\lozenge} = \frac{1}{f}, \qquad\qquad \left({}^{\circ}\!(\varphi^{\blacklozenge})\right)^{\square} = \frac{1}{\varphi} \tag{2.34}$$

$$\left(\frac{1}{(D^{\circ})^{\lozenge}}\right)^{\blacksquare} = D, \qquad\qquad \left(\frac{1}{({}^{\circ}\!\varDelta)^{\square}}\right)^{\blacklozenge} = \varDelta, \tag{2.35}$$

где $f : M \to [1; +\infty)$ – произвольная внешняя огибающая, $\varphi : M \to (0; 1]$ – произвольная внутренняя огибающая, D – произвольный прямоугольник в $\mathcal{O}(M)$, $\varDelta$ – произвольный ромб в $\mathcal{O}^{\star}(M)$.

Доказательство. Если f – внешняя огибающая, то по теореме 2.4, $\frac{1}{f}$ – внутренняя огибающая, поэтому

$$\left((f^{\blacksquare})^{\circ}\right)^{\lozenge} = (2.28) = \left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge\lozenge} = \frac{1}{f}$$

Остальные формулы доказываются по аналогии. $\square$

§ 3 Группы Штейна и связанные с ними алгебры Хопфа

(a) Группы Штейна, линейные группы и алгебраические группы

Комплексная группа Ли G называется *группой Штейна*, если G является многообразием Штейна [14]. По теореме Мацусимы-Моримото [24, XII.5.9], для комплексных групп это равносильно условию голоморфной отделимости, упоминавшемуся нами на странице 35:

$$\forall x \neq y \in G \quad \exists u \in \mathcal{O}(G) \quad u(x) \neq u(y)$$

Размерностью группы Штейна называется ее размерность, как комплексного многообразия.

Частными случаями групп Штейна являются *линейные комплексные группы*, определяемые как комплексные группы Ли, представимые в виде замкнутой подгруппы в полной линейной группе $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$. Иными словами, комплексная группа G считается линейной, если она изоморфна некоторой замкнутой комплексной подгруппе H в $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ (то есть существует изоморфизм групп $\varphi : G \to H$ являющийся биголоморфным отображением).

Еще более узкий класс групп – *комплексные аффинные алгебраические группы*. Это подгруппы H в $\mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$, являющиеся одновременно алгебраическими подмногообразиями. Это означает, что группа H

должна быть общим множеством нулей некоторого набора многочленов $u_1, ..., u_k$ на $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ (под многочленом здесь можно понимать многочлен от матричных элементов):

$$H = \{x \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{C}) : \ u_1(x) = ... = u_k(x) = 0\}$$

Если комплексная группа G изоморфна какой-то алгебраической группе H (то есть существует изоморфизм групп $\varphi : G \to H$ являющийся биголоморфным отображением), то G также считается алгебраической группой, потому что алгебраические операции на G будут регулярными отображениями относительно индуцированной из H структуры алгебраического многообразия.

Группа Штейна G называется *компактно порожденной*, если в ней существует порождающий компакт, то есть компакт $K \subseteq G$ со свойством

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K^n, \qquad K^n = \underbrace{K \cdot ... \cdot K}_{n \text{ множителей}}$$

Отметим некоторые примеры.

Пример 3.1. Уже упоминавшийся нами в § 2 *комплексный тор*, то есть фактор-группа $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})$ является примером комплексной группы, не являющейся группой Штейна.

Пример 3.2. Любая *дискретная группа* G является группой Штейна (нулевой размерности). Компактами в G будут только конечные подмножества, поэтому G будет компактно порождена в том и только в том случае, если она конечно порождена. Поэтому, скажем, свободную группу с бесконечным числом образующих можно считать примером не компактно порожденной группы Штейна.

Пример 3.3. Дискретная группа G будет алгебраической тогда и только тогда, когда она *конечна*. В этом случае ее можно рассматривать как группу преобразований пространства $\mathbb{C}^n$, где $n = \mathsf{card}\, G$ – число элементов G. Для этого $\mathbb{C}^n$ реализуют в виде пространства отображений G в $\mathbb{C}$:

$$x \in \mathbb{C}^G \quad \Longleftrightarrow \quad x : G \to \mathbb{C},$$

тогда вложение G в $\mathsf{GL}(\mathbb{C}^G)$ (группу невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^G$) описывается формулой

$$\varphi : G \to \mathsf{GL}(\mathbb{C}^G) : \qquad \varphi(g)(x)(h) = x(h \cdot g), \qquad g, h \in G, \quad x \in \mathbb{C}^G$$

Пример 3.4. Полная линейная группа $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$, то есть группа невырожденных линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^n$ будет комплексной алгебраической группой (размерности n^2). Понятно, что $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ компактно порождена. Как следствие, *любая линейная группа компактно порождена.*

Пример 3.5. Аддитивная группа комплексных чисел $\mathbb{C}$ является комплексной алгебраической группой (размерности 1), потому что она вложима как алгебраическая подгруппа в $\mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$ по формуле

$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

Пример 3.6. Аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел является комплексной линейной группой (нулевой размерности), потому что она вложима в группу $\mathsf{GL}(2,\mathbb{C})$ по формуле

$$\varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Однако $\mathbb{Z}$ не будет алгебраической группой, потому что ни при этом, ни при каком-либо другом вложении в $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ она не является общим множеством нулей какой-либо системы многочленов (потому что дискретна и бесконечна).

Пример 3.7. Мультипликативную группу $\mathbb{C}^\times$ ненулевых комплексных чисел

$$\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

можно представлять себе как полную линейную группу на $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C}^\times \cong \mathsf{GL}(1,\mathbb{C}),$$

поэтому она будет линейной комплексной группой (размерности 1). Мы условимся называть эту группу *комплексной окружностью.*

Пример 3.8. Рассмотрим действие группы $\mathbb{C}$ на себе самой экспонентами:

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathsf{Aut}(\mathbb{C}), \qquad \varphi(a)(x) = x \cdot e^a$$

Полупрямое произведение $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$ относительно такого действия, то есть группа $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}$, совпадающая как множество с декартовым произведением $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, но наделенная более сложным умножением

$$(a, x) \cdot (b, y) := (a + b, x \cdot e^b + y)$$

будет (связной) линейной комплексной группой, потому что она вложима в $\mathsf{GL}_3(\mathbb{C})$ гомоморфизмом

$$(x, a) \mapsto \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{ia} \end{pmatrix}$$

Однако $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}$ не будет комплексной алгебраической группой, потому что ее центр

$$Z(\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}) = \{(2\pi i n, 0);\ n \in \mathbb{Z}\}$$

представляет собой бесконечную дискретную подгруппу (чего у алгебраических групп не бывает).

(b) Алгебры Хопфа $\mathcal{O}(G)$, $\mathcal{O}^\star(G)$, $\mathcal{R}(G)$, $\mathcal{R}^\star(G)$

Алгебры Хопфа $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$, о которых шла речь в § 1(c), интересны не столько сами по себе, сколько как руководящий пример для множества других похожих конструкций, возникающих в ситуациях, когда изучаемые группы G наделены какой-то дополнительной структурой, а функции на них выбираются такие, которые эту структуру сохраняют. В частности, в работе [1, примеры 10.24-10.27] автором отмечались некоторые стандартные примеры алгебр функций и функционалов, являющихся стереотипными алгебрами Хопфа. Если к ним добавить $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$, то получится следующая таблица:

класс групп	алгебра функций	алгебра функционалов
чистые группы	алгебра $\mathbb{C}^G$ всех функций на G	алгебра $\mathbb{C}_G$ точечных зарядов на G
алгебраические группы	алгебра $\mathcal{R}(G)$ многочленов на G	алгебра $\mathcal{R}^\star(G)$ потоков степени 0 на G
группы Штейна	алгебра $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на G	алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ “аналитических функционалов” на G
группы Ли	алгебра $\mathcal{E}(G)$ гладких функций на G	алгебра $\mathcal{E}^\star(G)$ распределений на G
локально компактные группы	алгебра $\mathcal{C}(G)$ непрерывных функций на G	алгебра $\mathcal{C}^\star(G)$ мер Радона на G

В [1] последние четыре примера приводились без доказательства, поэтому мы полагаем уместным объяснить здесь, на примере групп Штейна и аффинных алгебраических групп, почему эти алгебры действительно будут стереотипными алгебрами Хопфа.

Алгебры Хопфа $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}^\star(G)$ на группе Штейна G. Если G – группа Штейна, то утверждение, что алгебра $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на G (с обычной топологией равномерной сходимости на компактах в G) является инъективной стереотипной алгеброй Хопфа, доказывается в точности так же, как это делалось для $\mathbb{C}^G$. Существенным моментом в этих рассуждениях будет изоморфизм функторов, связывающий декартово произведение групп $\times$ и соответствующие тензорные произведения функциональных пространств $\odot$ и $\circledast$ [1, теорема 8.13]:

$$\mathcal{O}(G \times H) \overset{\rho_{G,H}}{\cong} \mathcal{O}(G) \odot \mathcal{O}(H) \overset{@^{-1}}{\cong} \mathcal{O}(G) \circledast \mathcal{O}(H) \tag{3.1}$$

– здесь $\rho_{G,H}$ определяется тождеством, аналогичным (1.25):

$$\rho_{G,H}(u \boxdot v) = u \odot v, \qquad u \in \mathcal{O}(G), \quad v \in \mathcal{O}(H) \tag{3.2}$$

а функция $u \boxdot v$, как и раньше, задается формулой (1.24).

После того, как $\rho_{G,H}$ определен, умножение и коумножение в $\mathcal{O}(G)$ определяются сначала на (или со значениями в) пространстве функций $\mathcal{O}(G \times G)$ на декартовом квадрате $G \times G$, а затем переход к тензорному квадрату осуществляется с помощью изоморфизма $\rho_{G,G}$:

$$\begin{array}{rlll} \text{умножение:} & \mu = \widetilde{\mu} \circ \rho_{G,G} : \mathcal{O}(G) \odot \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G), & \widetilde{\mu}(v)(t) = v(t,t) & (3.3) \\ \text{единица:} & \iota : \mathbb{C} \to \mathcal{O}(G), & \iota(\lambda)(t) = \lambda & (3.4) \\ \text{коумножение:} & \varkappa = \rho_{G,G} \circ \widetilde{\varkappa} : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G) \odot \mathcal{O}(G), & \widetilde{\varkappa}(u)(s,t) = u(s \cdot t) & (3.5) \\ \text{коединица:} & \varepsilon : \mathcal{O}(G) \to \mathbb{C}, & \varepsilon(u) = u(1_G) & (3.6) \\ \text{антипод:} & \sigma : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G), & \sigma(u)(t) = u(t^{-1}) & (3.7) \end{array}$$

А иллюстрируется это картинкой:

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{O}(G \times G) \arrow[d, "\rho_{G,G}"] \arrow[dr, "\widetilde{\mu}"] & & \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{O}(G) \arrow[ur, "\widetilde{\varkappa}"] \arrow[dr, "\varkappa"'] & \mathcal{O}(G) \odot \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{O}(G) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

То, что при этом получится инъективная стереотипная алгебра Хопфа доказывается дословным повторением рассуждений, применявшихся при доказательстве теоремы 1.7. Более того, как и в случае с $\mathbb{C}^G$, алгебра Хопфа $\mathcal{O}(G)$ является проективной алгеброй Хопфа (и значит, жесткой алгеброй Хопфа в смысле определения § 1(b)), из-за равенств (3.1).

Теорема 3.1. *Для всякой группы Штейна G*

— *алгебра $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на G является жесткой стереотипной алгеброй Хопфа относительно алгебраических операций, определенных формулами* (3.3)-(3.7)*;*

— *а сопряженная ей алгебра $\mathcal{O}^\star(G)$ аналитических функционалов на G является жесткой стереотипной алгеброй Хопфа относительно сопряженных алгебраических операций.*

Если вдобавок группа G компактно порождена, то $\mathcal{O}(G)$ будет ядерной алгеброй Хопфа-Фреше, а $\mathcal{O}^\star(G)$ – ядерной алгеброй Хопфа-Браунера.

Алгебры Хопфа $\mathcal{R}(G)$ и $\mathcal{R}^\star(G)$ на аффинной алгебраической группе G. Пусть G – аффинная алгебраическая группа, и $\mathcal{R}(G)$ – алгебра многочленов на G (с сильнейшей локально выпуклой топологией). Как и в предыдущих случаях, тождество

$$\rho_{G,H}(u \boxdot v) = u \odot v, \qquad u \in \mathcal{R}(G), \quad v \in \mathcal{R}(H)$$

(опять $u \boxdot v$ задается формулой (1.24)) определяет изоморфизм функторов, связывающий декартово произведение групп $\times$ и тензорные произведения функциональных пространств $\odot$ и $\circledast$ [1, теорема 8.16]:

$$\mathcal{R}(G \times H) \overset{\rho_{G,H}}{\cong} \mathcal{R}(G) \odot \mathcal{R}(H) \overset{@^{-1}}{\cong} \mathcal{R}(G) \circledast \mathcal{R}(H) \tag{3.9}$$

Эти изоморфизмы далее определяют алгебраические операции в $\mathcal{R}(G)$ по формулами, аналогичными (3.3)-(3.7). В результате мы приходим к следующей теореме

Теорема 3.2. *Для всякой аффинной алгебраической группы G*

— *алгебра $\mathcal{R}(G)$ многочленов на G является инъективной стереотипной алгеброй Хопфа-Браунера относительно алгебраических операций;*

— *а сопряженная ей алгебра $\mathcal{R}^\star(G)$ потоков степени 0 на G является инъективной стереотипной алгеброй Хопфа-Фреше относительно сопряженных алгебраических операций.*

Свертки в $\mathcal{R}^\star(G)$ и $\mathcal{O}^\star(G)$. Для вычислений нам будет полезно выписать формулы, которыми определяется свертка в алгебрах функционалов $\mathcal{R}^\star(G)$ и $\mathcal{O}^\star(G)$. Определение предваряют формулы сдвига, антипода и свертки функционала с функцией:

$$(u\cdot a)(x) := u(a\cdot x), \qquad (a\cdot u)(x) := u(x\cdot a), \qquad u\in\mathcal{O}(G), a, x\in G \tag{3.10}$$

$$(\alpha\cdot a)(u) := \alpha(a\cdot u), \qquad (a\cdot\alpha)(u) := \alpha(u\cdot a), \qquad \alpha\in\mathcal{O}^\star(G), u\in\mathcal{O}(G), a\in G \tag{3.11}$$

$$\tilde{u}(x) := u(x^{-1}), \qquad \tilde{\alpha}(u) := \alpha(\tilde{u}), \qquad \alpha\in\mathcal{O}^\star(G), u\in\mathcal{O}(G), x\in G \tag{3.12}$$

$$(\alpha * u)(x) := \alpha(\widetilde{x\cdot u}), \qquad (u*\alpha)(x) := \alpha(\widetilde{u\cdot x}) \qquad \alpha\in\mathcal{O}^\star(G), u\in\mathcal{O}(G), x\in G \tag{3.13}$$

Затем свертка функционалов определяется формулой

$$\alpha*\beta(u) := \alpha(u*\tilde{\beta}) = \beta(\tilde{\alpha}*u) \qquad \alpha,\beta\in\mathcal{O}^\star(G), u\in\mathcal{O}(G) \tag{3.14}$$

В частности, свертка с дельта-функционалом представляет собой сдвиг:

$$\delta^a*\beta = a\cdot\beta \qquad \beta*\delta^a = \beta\cdot a \qquad \beta\in\mathcal{O}^\star(G), a\in G \tag{3.15}$$

(c) Примеры

Последние теоремы полезно проиллюстрировать несколькими примерами, и мы выбираем для этого три главные абелевы группы Штейна – $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{C}$ – потому что, помимо прочего, эти примеры понадобятся нам ниже в § 6 и § 7.

Алгебры $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$. Мы уже отмечали в примере 3.6, что группу $\mathbb{Z}$ целых чисел можно рассматривать как комплексную группу (нулевой размерности). Поскольку $\mathbb{Z}$ дискретна, любая функция на ней автоматически будет голоморфна. Поэтому алгебра $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ формально будет совпадать с алгеброй $\mathbb{C}^\mathbb{Z}$, а алгебра $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$ – с алгеброй $\mathbb{C}_\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^\mathbb{Z}, \qquad \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}_\mathbb{Z}$$

Как следствие, строение этих алгебр описывается формулами (1.19)-(1.23): характеристические функции одноточечных множеств

$$1_n(m) = \begin{cases} 0, & m = n \\ 1, & m = n \end{cases}, \qquad m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z} \tag{3.16}$$

образуют базис в стереотипном пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^\mathbb{Z}$, а дельта-функционалы

$$\delta^k(u) = u(k), \qquad u\in\mathcal{O}(\mathbb{Z})$$

– сопряженный ему алгебраический базис в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}_\mathbb{Z}$:

$$\langle 1_n, \delta^k\rangle = \begin{cases} 0, & n\neq k \\ 1, & n = k \end{cases},$$

Элементы $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$ удобно представляются в виде (сходящихся в этих пространствах) рядов

$$u\in\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^\mathbb{Z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\cdot 1_n, \qquad u(n) = \delta^n(u), \tag{3.17}$$

$$\alpha\in\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}_\mathbb{Z} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n\cdot\delta^n, \qquad \alpha_n = \alpha(1_n), \tag{3.18}$$

причем действие α на u описывается формулой

$$\langle u,\alpha\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\cdot\alpha_n$$

Операции умножения в $\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^\mathbb{Z}$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}_\mathbb{Z}$ записываются рядами:

$$u\cdot v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\cdot v(n)\cdot 1_n, \qquad \alpha*\beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\alpha_i\cdot\beta_{k-i}\right)\cdot\delta^k, \tag{3.19}$$

(в первом случае это покоординатное умножение, а во втором – умножение степенных рядов).

Предложение 3.1. *Алгебра $\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ функций на $\mathbb{Z}$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше с топологией, порожденной полунорами*

$$||u||_N = \sum_{|n|\leqslant N} |u(n)|, \qquad N \in \mathbb{N}. \tag{3.20}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на базисных элементах 1_k по формулам

$$1_m \cdot 1_n = \begin{cases} 1_m, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad\qquad 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 1_n \tag{3.21}$$

$$\varkappa(1_n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} 1_m \odot 1_{n-m} \qquad\qquad \varepsilon(1_n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

$$\sigma(1_n) = 1_{-n} \tag{3.23}$$

Предложение 3.2. *Алгебра $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}_{\mathbb{Z}}$ точечных зарядов на группе $\mathbb{Z}$ является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера с топологией, порожденной полунорами*

$$|||\alpha|||_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |\alpha_n| \qquad (r_n \geqslant 0) \tag{3.24}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на мономах δ^k по формулам

$$\delta^k * \delta^l = \delta^{k+l} \qquad\qquad 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)} = \delta^0 \tag{3.25}$$

$$\varkappa(\delta^k) = \delta^k \circledast \delta^k \qquad\qquad \varepsilon(z^k) = 1 \tag{3.26}$$

$$\sigma(\delta^k) = \delta^{-k} \tag{3.27}$$

Доказательство. Здесь может быть неочевидно, что полунормы (3.24) действительно определяют топологию в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}_{\mathbb{Z}}$. Соответствующее утверждение удобно сформулировать отдельно, поскольку ниже оно нам понадобится в лемме 6.3: □

Лемма 3.1. *Если p – непрерывная полунорма на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$, и $r_n = p(\delta^n)$, то p мажорируется полунормой* (3.24)*:*

$$p(\alpha) \leqslant |||\alpha|||_r \tag{3.28}$$

Доказательство.

$$p(\alpha) = p\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \delta^n\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| \cdot p(\delta^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| \cdot r_n = |||\alpha|||_r \tag{3.29}$$

□

Алгебры $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. В примере 3.7 мы условились обозначать символом $\mathbb{C}^\times$ мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел:

$$\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

(умножение в $\mathbb{C}^\times$ – обычное умножение комплексных чисел) и назвать ее *комплексной окружностью.*

Алгебра $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ многочленов на $\mathbb{C}^\times$ состоит из многочленов Лорана, то есть функций вида

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot z^n$$

где z^n мономы на $\mathbb{C}^\times$:

$$z^n(x) := x^n, \qquad x \in \mathbb{C}^\times, \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.30}$$

и почти все $u_n \in \mathbb{C}$ равны нулю:

$$\mathsf{card}\{n \in \mathbb{Z} : \ u_n \neq 0\} < \infty$$

А алгебра $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$ потоков на $\mathbb{C}^\times$ состоит из функционалов

$$\alpha = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \cdot \zeta^k$$

где ζ_k – функционал вычисления коэффициента степени k ряда Лорана:

$$\zeta_k(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{u(z)}{z^{k+1}}\,\mathsf{d}\,z = \int_0^1 e^{-2\pi ikt}u(e^{2\pi it})\,\mathsf{d}\,t, \qquad u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \tag{3.31}$$

и $\alpha_k \in \mathbb{C}$ – произвольная последовательность.

Мономы ζ_k и z^n действуют друг на друга правилом

$$\langle z^n, \zeta_k\rangle = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \tag{3.32}$$

поэтому действие потока α на многочлен u будет описываться формулой

$$\langle u, \alpha\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot \alpha_n$$

а операции умножения в $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$ записываются рядами:

$$u \cdot v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i \cdot v_{n-i}\right) \cdot z^n, \qquad \alpha * \beta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \cdot \beta_k \cdot \zeta_k, \tag{3.33}$$

(в первом случае это умножение степенных рядов, а во втором – покоординатное умножение).

Предложение 3.3. *Отображение*

$$u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \mapsto \{u_k;\ k \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{C}_{\mathbb{Z}}$$

является изоморфизмом ядерных алгебр Хопфа-Браунера

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{C}_{\mathbb{Z}} \tag{3.34}$$

Предложение 3.4. *Алгебра $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ многочленов на комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера с топологией, порожденной полунорами*

$$|||u|||_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |u_n| \qquad (r_n \geqslant 0) \tag{3.35}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на мономах z^k по формулам

$$z^k \cdot z^l = z^{k+l} \qquad 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)} = z^0 \tag{3.36}$$

$$\varkappa(z^k) = z^k \odot z^k \qquad \varepsilon(z^k) = 1 \tag{3.37}$$

$$\sigma(z^k) = z^{-k} \tag{3.38}$$

Предложение 3.5. *Отображение*

$$\alpha \in \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \mapsto \{\alpha_k;\ k \in \mathbb{Z}\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

является изоморфизмом ядерных алгебр Хопфа-Фреше

$$\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \tag{3.39}$$

Предложение 3.6. *Алгебра $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$ потоков на комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше с топологией, порожденной полунорами*

$$||\alpha||_N = \sum_{|n|\leqslant N} |\alpha_n| \qquad (N \in \mathbb{N}) \tag{3.40}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на мономах ζ_k по формулам

$$\zeta_k * \zeta_l = \begin{cases} \zeta_l, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \qquad 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_n \tag{3.41}$$

$$\varkappa(\zeta_k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \zeta_l \circledast \zeta_{k-l} \qquad \varepsilon(\zeta_k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

$$\sigma(\zeta_k) = \zeta_{-k} \tag{3.43}$$

Символом $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ мы, как обычно, обозначаем алгебру голоморфных функций на комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ (с топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}^\times$), а символом $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ – сопряженную к ней алгебру аналитических функционалов на $\mathbb{C}^\times$.

Элементы алгебр $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ удобно представлять себе в виде формальных рядов

$$u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \quad \iff \quad u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot z^n, \quad u_n \in \mathbb{C}: \ \forall C > 0 \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot C^{|n|} < \infty \quad \Big(u_n = \zeta_n(u)\Big) \tag{3.44}$$

$$\alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \quad \iff \quad \alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \zeta_n, \quad \alpha_n \in \mathbb{C}: \ \exists C > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ |\alpha_n| \leqslant C^{|n|} \quad \Big(\alpha_n = \alpha(z^n)\Big) \tag{3.45}$$

Как и в случае $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$, действие α на u описывается формулой

$$\langle u, \alpha\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot \alpha_n$$

а операции умножения в $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ записываются, в первом случае, как обычное умножение степенных рядов, а во втором – как покоординатное умножение:

$$u \cdot v = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} u_i \cdot v_{n-i}\right) \cdot z^n, \qquad \alpha * \beta = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \beta_n \cdot \zeta_n, \tag{3.46}$$

Предложение 3.7. *Алгебра $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ голоморфных функций на комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше с топологией, порожденной полунормами*

$$||u||_C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot C^{|n|}, \qquad C \geqslant 1. \tag{3.47}$$

и алгебраическими операциями, определяемыми своими значениями на мономах z^k по тем же формулам (3.36)-(3.38)*, что и в случае $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$:*

$$z^k \cdot z^l = z^{k+l} \qquad 1_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)} = z^0$$
$$\varkappa(z^k) = z^k \odot z^k \qquad \varepsilon(z^k) = 1$$
$$\sigma(z^k) = z^{-k}$$

Доказательство. Любая обычная полунорма $|u|_K = \max_{x\in K} |u(x)|$, где K – компакт в $\mathbb{C}^\times$, мажорируется некоторой полунормой $||u||_C$, а именно для этого нужно взять $C = \max_{x\in K} \max\{|x|, \frac{1}{|x|}\}$:

$$|u|_K = \max_{x\in K} |u(x)| = \max_{x\in K} \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot x^n\right| \leqslant \max_{x\in K} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot |x^n| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot C^{|n|} = ||u||_C$$

Наоборот, для любого числа $C \geqslant 1$ мы можем выбрать компакт $K = \{t \in \mathbb{C} : \frac{1}{C+1} \leqslant |t| \leqslant C+1\}$, и тогда из формул Коши для коэффициентов ряда Лорана

$$|u_n| \leqslant |u|_K \cdot \min\left\{(C+1)^n; \frac{1}{(C+1)^n}\right\} = |u|_K \cdot (C+1)^{-|n|} = \frac{|u|_K}{(C+1)^{|n|}}$$

следует, что $||u||_C$ подчинена $|u|_K$ (с положительным множителем $(C+1)^2$):

$$||u||_C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot C^{|n|} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|u|_K}{(C+1)^{|n|}} \cdot C^{|n|} \leqslant |u|_K \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{C}{C+1}\right)^{|n|} = (C+1)^2 \cdot |u|_K$$

□

Предложение 3.8. *Алгебра $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ аналитических функционалов на комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера с топологией, порожденной полкнормами*

$$|||\alpha|||_r = \sup_{u\in E_r} |\alpha(u)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |\alpha_n| \qquad \left(r_n \geqslant 0 : \forall C > 0 \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot C^{|n|} < \infty\right) \tag{3.48}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на мономах ζ_k *по тем же формулам* (3.41)-(3.43)*, что и в случае* $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$*:*

$$\zeta_k * \zeta_l = \begin{cases} \zeta_l, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \qquad 1_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_n$$

$$\varkappa(\zeta_k) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \zeta_l \circledast \zeta_{k-l} \qquad \varepsilon(\zeta_k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sigma(\zeta_k) = \zeta_{-k}$$

Доказательство. Для всякой последовательности неотрицательных чисел, $r_n \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$\forall C > 0 \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot C^{|n|} < \infty \tag{3.49}$$

множество

$$E_r = \{u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) : \ \forall n \in \mathbb{Z} \quad |u_n| \leqslant r_n\} \tag{3.50}$$

является компактом в $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ потому что оно замкнуто и содержится в прямоугольнике $f^\blacksquare$, где

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |t|^n, \qquad t \in \mathbb{C}^\times$$

Значит, E_r порождает непрерывную полунорму $\alpha \mapsto \max_{u\in E_r} |\langle u, \alpha\rangle|$ на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Но это как раз полунорма (3.48):

$$\max_{u\in E_r} |\langle u, \alpha\rangle| = \max_{|u|\leqslant r_n} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n \cdot \alpha_n \right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |\alpha_n| = |||\alpha|||_r$$

Остается убедиться, что полунормы $||| \cdot |||_r$ действительно порождают топологию пространства $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Это вытекает из следующей леммы: □

Лемма 3.2. *Если p – непрерывная полунорма на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$, то семейство чисел*

$$r_n = p(\zeta_n)$$

удовлетворяет условию (3.49)*, а p мажорируется полунормой* $||| \cdot |||_r$*:*

$$p(\alpha) \leqslant |||\alpha|||_r \tag{3.51}$$

Доказательство. Множество

$$D = \{u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) : \sup_{\alpha\in\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times):\ p(\alpha)\leqslant 1} |\alpha(u)| \leqslant 1\}$$

будет компактом в $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, порождающим полунорму p:

$$p(\alpha) = \sup_{u\in D} |\alpha(u)|$$

Поэтому

$$r_n = p(\zeta_n) = \sup_{u\in D} |\zeta_n(u)| = \sup_{u\in D} |u_n|$$

Для любого $C > 0$ получаем:

$$\infty > \sup_{u\in D} ||u||_{C+1} = \sup_{u\in D} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot (C+1)^{|n|} \geqslant \sup_{u\in D} \sup_{n} |u_n| \cdot (C+1)^{|n|} = \sup_{n} \Big(r_n \cdot (C+1)^{|n|} \Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad r_n \leqslant \frac{M}{(C+1)^{|n|}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot C^{|n|} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{M}{(C+1)^{|n|}} \cdot C^{|n|} < \infty$$

То есть r_n действительно удовлетворяет условию (3.49). Формула (3.51) доказывается цепочкой неравенств, аналогичной (3.29). □

Цепочка $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$. Символом $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ мы обозначаем обычную алгебру многочленов на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть t^k обозначает моном степени $k \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{C}$:

$$t^k(x) := x^k, \qquad x \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N} \tag{3.52}$$

Поскольку всякий многочлен $u \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ однозначно представляется рядом (с конечным числом ненулевых слагаемых)

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \cdot t^k, \qquad u_k \in \mathbb{C}: \quad \mathsf{card}\{k \in \mathbb{N}:\ u_k \neq 0\} < \infty \tag{3.53}$$

мономы t^k образуют алгебраический базис в пространстве $\mathcal{R}(\mathbb{C})$. Умножение в $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ есть обычное умножение многочленов

$$u \cdot v = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} u_{k-i} \cdot v_i \right) \cdot t^k$$

а топология в $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ определяется как сильнейшая локально выпуклая топология. Отсюда следует,

Предложение 3.9. *Отображение*

$$u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) \mapsto \{u_k;\ k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{C}_{\mathbb{N}}$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}_{\mathbb{N}} \tag{3.54}$$

Замечание 3.1. Формулу (3.54) можно также понимать, как изоморфизм алгебр, если умножение в $\mathbb{C}_{\mathbb{N}}$ задать той же формулой (1.23), что и для алгебры $\mathbb{C}_G$ точечных зарядов на группе G (определенной в § 1(c)), но только при этом нужно помнить, что множество $\mathbb{N}$ не будет группой, а лишь моноидом относительно используемой на нем операции сложения.

С другой стороны, формула (3.54) не будет изоморфизмом алгебр Хопфа, например, потому что $\mathbb{C}_{\mathbb{N}}$ вообще не будет алгеброй Хопфа относительно определенных в § 1(c) операций: для $x \in \mathbb{N}$ обратный элемент $x^{-1} = -x$ не существует, если $x \neq 0$, и значит антипод здесь не может определяться равенством (1.27).

Предложение 3.10. *Алгебра $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ многочленов на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера с топологией, порожденной полунормами*

$$\|u\|_r = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k \cdot |u_k|, \qquad (r_k \geqslant 0) \tag{3.55}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на мономах t^k по формулам

$$t^k \cdot t^l = t^{k+l} \qquad\qquad 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} = t^0 \tag{3.56}$$

$$\varkappa(t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot t^{k-i} \odot t^i \qquad\qquad \varepsilon(t^k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{3.57}$$

$$\sigma(t^k) = (-1)^k \cdot t^k \tag{3.58}$$

Доказательство. Алгебраические операции, которые мы еще не нашли – коумножение, коединица и антипод – вычисляются по формулам (3.5)-(3.7). Например, коумножение:

$$\widetilde{\varkappa}(t^k)(x,y) = t^k(x+y) = (x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot x^{k-i} \cdot y^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot t^{k-i} \boxdot t^i(x,y)$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\varkappa}(t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot t^{k-i} \boxdot t^i$$

$$\Downarrow$$

$$\varkappa(t^k) = \rho_{\mathbb{C},\mathbb{C}}(\widetilde{\varkappa}(t^k)) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot t^{k-i} \odot t^i$$

$\square$

Следуя терминологии [1], мы называем *потоком степени* 0, или просто *потоком* на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ произвольный линейный (и тогда он автоматически будет непрерывным) функционал $\alpha : \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ на пространстве многочленов $\mathcal{R}(\mathbb{C})$. Из формулы (3.54) следует, что всякий компакт в пространстве многочленов $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ конечномерен, и значит, содержится в выпуклой оболочке конечного набора базисных мономов t^k. Поэтому топологию пространства $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ потоков на $\mathbb{C}$ (стандартно определяемую как топологию равномерной сходимости на компактах в $\mathcal{R}(\mathbb{C})$) можно описать как топологию сходимости на мономах t^k, то есть как топологию, порождаемую полунормами

$$\|\alpha\|_N = \sum_{k\in N} \left|\alpha(t^k)\right|,$$

где N – произвольное конечное множество в $\mathbb{N}$.

Типичный пример потока – функционал вычисления производной степени k в точке 0:

$$\tau^k(u) = \left(\frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u(x)\right)\Bigg|_{x=0}, \qquad u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}) \tag{3.59}$$

По теореме Тейлора, эти функционалы связаны с коэффициентами u_k в разложении (3.53) многочлена $u \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ формулой

$$u_k = \frac{1}{k!} \cdot \tau^k(u) \tag{3.60}$$

Отсюда следует, что действие произвольного потока $\alpha \in \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ на многочлен $u \in \mathcal{R}(\mathbb{C})$ можно записать формулой

$$\alpha(u) = \alpha\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \cdot t^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \cdot \alpha(t^k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} \cdot \tau^k(u) \cdot \alpha(t^k) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k!} \cdot \alpha(t^k) \cdot \tau^k\right)(u) \tag{3.61}$$

Это значит, что α раскладывается в ряд по τ^k следующим образом:

$$\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \cdot \tau^k, \qquad \alpha_k = \frac{1}{k!} \cdot \alpha(t^k) \tag{3.62}$$

Из этого можно сделать вывод, что потоки τ^k образуют базис в топологическим векторном пространстве $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$: всякий функционал $\alpha \in \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ однозначно представим в виде сходящегося в $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ ряда (3.62), коэффициенты которого $\alpha_k \in \mathbb{C}$ непрерывно зависят от $\alpha \in \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$.

Из (3.61) следует, что действие потока α на многочлен u описывается формулой

$$\alpha(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot \tau^k(u)}_{u_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{k!} \cdot \alpha(t^k)}_{\alpha_k} \cdot k! = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \cdot \alpha_k \cdot k!$$

а базисные потоки τ^k действуют на мономы t^k по формуле

$$\tau^k(t^n) = \begin{cases} 0, & n \ne k \\ n!, & n = k \end{cases},$$

Это означает, что система τ^k не является сопряженным базисом к t^k: она отличается от сопряженного базиса скалярными множителями $k!$. Тем не менее, поскольку, с одной стороны, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\mathbb{N}$ (это следует из формулы (3.54)) и, с другой, в $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ любые два базиса изоморфны (теорема 0.20), справедливо

Предложение 3.11. *Отображение*

$$\alpha \in \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \mapsto \{\alpha_k;\ k \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$$

является изоморфизмом топологических векторных пространств:

$$\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\mathbb{N} \tag{3.63}$$

Этот изоморфизм не будет, однако, изоморфизмом алгебр, потому что в $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ элементы умножаются друг на друга не покомпонентно (то есть не по формуле (1.20), как можно было бы определить в $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ по аналогии со случаем § 1(c)), а как степенные ряды:

$$\alpha * \beta = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} \cdot \beta_i\right) \cdot \tau^k, \tag{3.64}$$

Это следует из формулы (3.66) ниже:

Предложение 3.12. *Алгебра $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ потоков нулевой степени на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше с топологией, порожденной полунормами*

$$\|\alpha\|_K = \sum_{k=0}^{K} |\alpha_k|, \qquad (K \in \mathbb{N}) \tag{3.65}$$

и алгебраическим операциями, определенными на базисных элементах τ^k формулами

$$\tau^k * \tau^l = \tau^{k+l} \qquad\qquad 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})} = \tau^0 \tag{3.66}$$

$$\varkappa(\tau^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \tau^{k-i} \circledast \tau^i \qquad\qquad \varepsilon(\tau^k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{3.67}$$

$$\sigma(\tau^k) = (-1)^k \cdot \tau^k \tag{3.68}$$

Доказательство. Доказывать эти формулы можно по-разному, например, можно воспользоваться формулой (3.57) для коумножения в $\mathcal{R}(\mathbb{C})$:

$$(\tau^k * \tau^l)(t^m) = (\tau^k \circledast \tau^l)(\varkappa(t^m)) = (3.57) = (\tau^k \circledast \tau^l)\left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot t^{m-i} \odot t^i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cdot \tau^k(t^{m-i}) \cdot \tau^l(t^i) = \left\{\begin{matrix} \binom{m}{i} \cdot (m-l)! \cdot l!, & m = k+l \\ 0, & m \neq k+l \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} m!, & m = k+l \\ 0, & m \neq k+l \end{matrix}\right\} = \tau^{k+l}(t^m).$$

(на любом мономе t^m действие функционалов $\tau^k * \tau^l$ и τ^{k+l} совпадает, значит они сами совпадают). □

Рассмотрим теперь алгебру $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ целых функций и сопряженную ей алгебру $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ аналитических функционалов на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть, по-прежнему, t^k – моном степени $k \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{C}$, а τ^k – функционал вычисления производной степени $k \in \mathbb{N}$:

$$t^k(z) = z^k \qquad \tau^k(u) = \left(\frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, z^k} u(z)\right)\Bigg|_{z=0} \qquad \Big(x \in \mathbb{C}, \qquad u \in \mathcal{O}(\mathbb{C})\Big)$$

Тогда элементы $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ удобно представлять себе в виде (сходящихся в этих пространствах) рядов

$$u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) \quad \iff \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot t^n, \quad u_n = \frac{1}{n!}\tau^n(u) \in \mathbb{C}: \quad \forall C > 0 \quad \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \cdot C^n < \infty \tag{3.69}$$

$$\alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \quad \iff \quad \alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \tau^n, \quad \alpha_n = \frac{1}{n!}\alpha(t^n) \in \mathbb{C}: \quad \exists M, C > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |\alpha_n| \leqslant M \cdot \frac{C^n}{n!} \tag{3.70}$$

Действие аналитического функционала α на целую функцию u будет описываться формулой

$$\langle u, \alpha \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot \alpha_n \cdot n!$$

а операции умножения в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ задаются теми же формулами, что для обычных степенных рядов:

$$u \cdot v = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} u_i \cdot v_{n-i}\right) \cdot t^n, \qquad \alpha * \beta = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \cdot \beta_{k-i}\right) \cdot \tau^k, \tag{3.71}$$

Предложение 3.13. *Алгебра $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ целых функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше с топологией, порожденной полунормами*

$$\|u\|_C = \sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k| \cdot C^k \qquad (C \geqslant 1) \tag{3.72}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на мономах t^k по тем же формулам (3.56)-(3.58)*, что и в случае $\mathcal{R}(\mathbb{C})$:*

$$\mu(t^k \odot t^l) = t^{k+l} \qquad\qquad 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} = t^0$$

$$\varkappa(t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot t^{k-i} \odot t^i \qquad\qquad \varepsilon(t^k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$$
$$\sigma(t^k) = (-1)^k \cdot t^k$$

Доказательство. Формулы для алгебраических операций доказываются так же, как и у $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, поэтому нам нужно лишь объяснить, почему топология задается полунормами (3.72). Это тоже предмет математического фольклора (см.напр.[26]): ясно, что любая обычная полунорма $|u|_K = \max_{z\in K}|u(z)|$, где K – компакт в $\mathbb{C}$, мажорируется некоторой полунормой $||u||_C$, а именно для этого нужно взять $C = \max_{z\in K}|z|$:

$$|u|_K = \max_{z\in K}|u(z)| = \max_{z\in K}\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n \cdot z^n\right| \leqslant \max_{z\in K}\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|\cdot|z^n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|u_n|\cdot C^n = ||u||_C$$

Наоборот, для любого числа $C > 0$ мы можем выбрать компакт $K = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant C+1\}$, и тогда из формул Коши для коэффициентов

$$|u_n| \leqslant \frac{|u|_K}{(C+1)^n}$$

следует, что $||u||_C$ подчинена $|u|_K$ (с положительным множителем $C+1$):

$$||u||_C = \sum_{n=0}^{\infty}|u_n|\cdot C^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|u|_K}{(C+1)^n}\cdot C^n \leqslant |u|_K\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{C}{C+1}\right)^n = |u|_K\cdot\frac{1}{1-\frac{C}{C+1}} = (C+1)\cdot|u|_K$$

□

Предложение 3.14. *Алгебра $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ аналитических функционалов на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера с топологией, порожденной полунормами*

$$|||\alpha|||_r = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k\cdot|\alpha_k|\cdot k! \qquad \left(r_k \geqslant 0 : \ \forall C>0 \ \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k\cdot C^k < \infty\right) \tag{3.73}$$

и алгебраическим операциями, определяемыми своими значениями на базисных элементах τ^k по тем же формулам (3.66)-(3.68)*, что и в случае $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$:*

$$\mu(\tau^k \circledast \tau^l) = \tau^{k+l} \qquad\qquad 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})} = \tau^0$$
$$\varkappa(\tau^k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\cdot\tau^{k-i}\circledast\tau^i \qquad\qquad \varepsilon(\tau^k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k>0 \end{cases}$$
$$\sigma(\tau^k) = (-1)^k\cdot\tau^k$$

Доказательство. Здесь тоже формулы для алгебраических операций доказываются так же, как и у $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, поэтому нам нужно лишь объяснить, почему топология задается полунормами (3.73). Заметим сначала, что для всякой последовательности неотрицательных чисел, $r_k \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$\forall C>0 \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k\cdot C^k < \infty \tag{3.74}$$

множество

$$E_r = \{u\in\mathcal{O}(\mathbb{C}) : \ \forall k\in\mathbb{N} \quad |u_k| \leqslant r_k\} \tag{3.75}$$

является компактом в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, потому что замкнуто и содержится в прямоугольнике $f^{\blacksquare}$, где

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k\cdot|x|^k, \qquad x\in\mathbb{C}$$

Значит, E_r порождает непрерывную полунорму $\alpha\mapsto\max_{u\in E_r}|\langle u,\alpha\rangle|$ на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$. Но это как раз полунорма (3.73):

$$\max_{u\in E_r}|\langle u,\alpha\rangle| = \max_{|u|\leqslant r_k}\left|\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k\cdot\alpha_k\cdot k!\right| = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k\cdot|\alpha_k|\cdot k! = |||\alpha|||_r$$

Остается убедиться, что полунормы $|||\cdot|||_r$ действительно порождают топологию пространства $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Это вытекает из следующей леммы: □

Лемма 3.3. *Если p – непрерывная полунорма на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$, то числа $r_k = \frac{1}{k!}p(\tau^k)$ удовлетворяют условию* (3.74)*, а p мажорируется полунормой $|||\cdot|||_r$:*

$$p(\alpha) \leqslant |||\alpha|||_r \tag{3.76}$$

Доказательство. Множество

$$D = \{u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}) : \sup_{\alpha\in\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}):\, p(\alpha)\leqslant 1} |\alpha(u)| \leqslant 1\}$$

будет компактом в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, порождающим полунорму p:

$$p(\alpha) = \sup_{u\in D} |\alpha(u)|$$

Поэтому

$$r_k = \frac{1}{k!}p(\tau^k) = \frac{1}{k!}\sup_{u\in D}|\tau^k(u)| = \sup_{u\in D}|u_k|$$

Для любого $C > 0$ получаем:

$$\infty > \sup_{u\in D}||u||_{C+1} = \sup_{u\in D}\sum_{k\in\mathbb{N}}|u_k|\cdot(C+1)^k \geqslant \sup_{u\in D}\sup_k |u_k|\cdot(C+1)^k = \sup_k\Big(r_k\cdot(C+1)^k\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists M > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad r_k \leqslant \frac{M}{(C+1)^k}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} r_k\cdot C^k \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{M}{(C+1)^k}\cdot C^k < \infty$$

То есть r_k действительно удовлетворяет условию (3.74). Формула (3.76) доказывается цепочкой неравенств, аналогичной (3.29). □

Предложение 3.15. *Отображения*

$$t^k \mapsto t^k \mapsto \tau^k \mapsto \tau^k \qquad (k\in\mathbb{N})$$

определяют цепочку гомоморфизмов жестких алгебр Хопфа:

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \tag{3.77}$$

§ 4 Функции экспоненциального типа на группе Штейна

(a) Полухарактеры и обратные полухарактеры на группах Штейна

Пусть G – группа Штейна. Тогда

— локально ограниченная функция $f : G \to [1, +\infty)$ называется *полухарактером*, если она удовлетворяет неравенству субмультипликативности:

$$f(x\cdot y) \leqslant f(x)\cdot f(y), \qquad x, y \in G \tag{4.1}$$

— локально отделенная от нуля функция $\varphi : G \to (0; 1]$ называется *обратным полухарактером*, если она удовлетворяет обратному неравенству:

$$\varphi(x)\cdot\varphi(y) \leqslant \varphi(x\cdot y), \qquad x, y \in G \tag{4.2}$$

Ясно, что если $f : G \to [1, +\infty)$ – полухарактер, то обратная функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{4.3}$$

будет обратным полухарактером, и наоборот.

Свойства полухарактеров и обратных полухарактеров:

(i) Множество всех полухарактеров на G устойчиво относительно следующих операций:

— умножение на достаточно большую константу: $C \cdot f \quad (C \geqslant 1)$,

— умножение: $f \cdot g$,

— сложение: $f + g$,

— взятие максимума: $\max\{f, g\}$.

(ii) Множество всех обратных полухарактеров на G устойчиво относительно следующих операций:

— умножение на достаточно малую константу: $C \cdot \varphi \quad (C \leqslant 1)$,

— умножение: $\varphi \cdot \psi$,

— взятие половинки от среднего гармонического: $\frac{\varphi \cdot \psi}{\varphi + \psi}$

— взятие минимума: $\min\{\varphi, \psi\}$.

Доказательство. В силу естественной связи между полухарактерами и обратными полухарактерами, обеспечиваемой формулой (4.3), нам достаточно рассмотреть только случай полухарактеров.

Если f – полухарактер на G и $C \geqslant 1$, то

$$C \cdot f(x \cdot y) \leqslant C \cdot f(x) \cdot f(y) \leqslant \big(C \cdot f(x)\big) \cdot \big(C \cdot f(y)\big)$$

Если f и g – полухарактеры на G, то для произведения получаем:

$$(f \cdot g)(x \cdot y) = f(x \cdot y) \cdot g(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y) \cdot g(x) \cdot g(y) = \\ = f(x) \cdot g(x) \cdot f(y) \cdot g(y) = (f \cdot g)(x) \cdot (f \cdot g)(y)$$

Для суммы:

$$(f + g)(x \cdot y) = f(x \cdot y) + g(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot g(y) \leqslant \\ \leqslant f(x) \cdot f(y) + g(x) \cdot f(y) + f(x) \cdot g(y) + g(x) \cdot g(y) = \Big(f(x) + g(x)\Big) \cdot \Big(f(y) + g(y)\Big) = (f + g)(x) \cdot (f + g)(y)$$

А для $\max\{f, g\}$ доказательство основывается на следующем очевидном неравенстве:

$$\max\{a \cdot b, c \cdot d\} \leqslant \max\{a, c\} \cdot \max\{b, d\} \qquad (a, b, c, d > 0) \tag{4.4}$$

Из него мы получаем:

$$\max\{f, g\}(x \cdot y) = \max\{f(x \cdot y), g(x \cdot y)\} \leqslant \max\{f(x) \cdot f(y), g(x) \cdot g(y)\} \leqslant (4.4) \leqslant \\ \leqslant \max\{f(x), g(x)\} \cdot \max\{f(y), g(y)\} = \max\{f, g\}(x) \cdot \max\{f, g\}(y)$$

□

Пример 4.1. Все субмультипликативные матричные нормы [15], например

$$||x|| = \sum_{i,j=1}^{n} |x_{i,j}|, \qquad ||x|| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |x_{i,j}|^2} \tag{4.5}$$

являются полухарактерами на $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. Из свойств полухарактеров следует, что функции вида

$$r_C^N(x) = C \cdot \max\{||x||; ||x^{-1}||\}^N, \qquad C \geqslant 1,\ N \in \mathbb{N} \tag{4.6}$$

также будут полухарактерами на $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Предложение 4.1. *Для любой субмультипликативной матричной нормы* $||\cdot||$ *на* $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ *полухарактеры вида* (4.6) *мажорируют все остальные полухарактеры на* $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$.

Доказательство. Заметим сразу, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $||\cdot||$ – евклидова норма в алгебре $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ всех комплексных матриц $n \times n$:

$$||x|| = \sup_{\xi\in\mathbb{C}^n:||\xi||\leqslant 1} ||x(\xi)||, \qquad \text{где} \quad ||\xi|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2},$$

– поскольку любая другая норма на $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ мажорирует евклидову норму с точностью до константы, это будет доказывать наше утверждение.

Рассмотрим множество

$$K := \big\{x \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}): \ \max\{||x||; ||x^{-1}||\} \leqslant 2\big\} = \big\{x \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}): \ \forall \xi \in \mathbb{C}^n \quad \frac{1}{2}\cdot||\xi|| \leqslant ||x(\xi)|| \leqslant 2\cdot||\xi||\big\}$$

Оно замкнуто и ограничено в алгебре матриц $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$, и поэтому компактно. Это будет порождающий компакт в $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$

$$\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}) = \bigcup_{m=1}^{\infty} K^m, \qquad K^m = \underbrace{K\cdot ...\cdot K}_{m \text{ множителей}}, \tag{4.7}$$

обладающий к тому же следующим свойством:

$$K^m = \big\{x \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}): \ \max\{||x||; ||x^{-1}||\}^m \leqslant 2^m\big\} \tag{4.8}$$

Действительно, если $x \in K^m$, то $x = x_1 \cdot ... \cdot x_m$, где $||x_i|| \leqslant 2$ и $||x_i^{-1}|| \leqslant 2$, и поэтому

$$||x|| \leqslant \prod_{i=1}^{m} ||x_i|| \leqslant 2^m, \qquad ||x^{-1}|| \leqslant \prod_{i=1}^{m} ||x_i^{-1}|| \leqslant 2^m$$

Наоборот, пусть $\max\{||x||^m; ||x^{-1}||^m\} \leqslant 2^m$. Рассмотрим полярное разложение: $x = r\cdot u$, где r – положительно определенная эрмитова матрица, а u – унитарная. Разложим r в произведение $r = v\cdot d\cdot v^{-1}$, где v – унитарная, а d – диагональная матрицы:

$$d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_n \end{pmatrix}, \qquad d_i \geqslant 0$$

Корень степени m

$$\sqrt[m]{d} = \begin{pmatrix} \sqrt[m]{d_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \sqrt[m]{d_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \sqrt[m]{d_n} \end{pmatrix}$$

обладает такими свойствами:

$$\max_{i=1,...,n} d_i = ||d|| = ||r|| = ||x|| \leqslant 2^m \quad \Longrightarrow \quad ||\sqrt[m]{d}|| = \max_{i=1,...,n} \sqrt[m]{d_i} \leqslant 2,$$

$$\max_{i=1,...,n} d_i^{-1} = ||d^{-1}|| = ||r^{-1}|| = ||x^{-1}|| \leqslant 2^m \quad \Longrightarrow \quad ||\sqrt[m]{d^{-1}}|| = \max_{i=1,...,n} \sqrt[m]{d_i^{-1}} \leqslant 2$$

Как следствие, матрица

$$y = v\cdot \sqrt[m]{d}\cdot v^{-1}$$

лежит в K:

$$\max\{||y||; ||y^{-1}||\} = \max\{||\sqrt[m]{d}||; ||\sqrt[m]{d}^{-1}||\} \leqslant 2 \quad \Longrightarrow \quad y \in K$$

Поэтому матрица $y\cdot u$ также лежит в K, и мы получаем

$$x = v\cdot d\cdot v^{-1}\cdot u = v\cdot(\sqrt[m]{d})^{m-1}\cdot v^{-1}\cdot v\cdot(\sqrt[m]{d})\cdot v^{-1}\cdot u = \underbrace{y^{m-1}}_{\substack{\Cap \\ K^{m-1}}}\cdot\underbrace{y\cdot v}_{\substack{\Cap \\ K}} \in K^m$$

Мы доказали формулу (4.8). Теперь пусть f – произвольный полухарактер на $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. Положим

$$C = \sup_{x\in K} f(x), \qquad N \geqslant \log_2 C$$

и покажем, что

$$\forall x \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad f(x) \leqslant r_C^N(x) \tag{4.9}$$

Зафиксируем $x \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. Из (4.7) следует, что $x \in K^m \setminus K^{m-1}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. По формуле (4.8) получим:

$$2^{m-1} < \max\{||x||; ||x^{-1}||\} \leqslant 2^m$$

$$\Downarrow$$

$$m - 1 < \log_2 \Big(\max\{||x||; ||x^{-1}||\}\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) \leqslant \sup_{y \in K} f(y)^m \leqslant C^m \leqslant C \cdot C^{m-1} < C \cdot C^{\log_2 \Big(\max\{||x||;||x^{-1}||\}\Big)} =$$

$$= C \cdot \Big(\max\{||x||; ||x^{-1}||\}\Big)^{\log_2 C} \leqslant C \cdot \Big(\max\{||x||; ||x^{-1}||\}\Big)^N = r_C^N(x)$$

□

В частном случае, когда $n = 1$ мы получаем:

Следствие 4.1. *На комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ полухарактеры вида*

$$r_C^N(t) = C \cdot \max\{|t|; |t|^{-1}\}^N, \qquad C \geqslant 1, \ N \in \mathbb{N}$$

мажорируют все остальные полухарактеры.

Предложение 4.2. *Если G – компактно порожденная группа Штейна и K – какая-нибудь компактная окрестность единицы порождающая G:*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n, \qquad K^n = \underbrace{K \cdot ... \cdot K}_{n \text{ множителей}},$$

то для всякого $C \geqslant 1$ правило

$$h_C(x) = C^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \in K^n \setminus K^{n-1} \tag{4.10}$$

определяет полухарактер h_C на G. Такие полухарактеры образуют фундаментальную систему среди всех полухарактеров на G в том смысле, что всякий полухарактер f на G будет подчинен некоторому полухарактеру h_C

$$f(x) \leqslant h_C(x), \qquad x \in G,$$

– для этого константу C достаточно выбрать условием

$$C \geqslant \sup_{t \in K} f(t) \tag{4.11}$$

Доказательство. Локальная ограниченность h_C очевидна, нужно проверить субмультипликативность. Пусть $x, y \in G$, подберем $k, l \in \mathbb{N}$ такие что

$$x \in K^k \setminus K^{k-1}, \qquad y \in K^l \setminus K^{l-1}.$$

Тогда $x \cdot y \in K^{k+l}$, и поэтому

$$h_C(x \cdot y) \leqslant C^{k+l} = C^k \cdot C^l = h_C(x) \cdot h_C(y)$$

Если теперь f – произвольный полухарактер, и C подчинена условию (4.11), то

$$x \in K^n \setminus K^{n-1} \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant \Big(\sup_{t \in K} f(t) \Big)^n \leqslant C^n = h_C(x)$$

□

(b) Субмультипликативные ромбы и дуально субмультипликативные прямоугольники

Введем следующие определения:

— замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля $\varDelta$ в $\mathcal{O}^\star(G)$ мы будем называть *субмультипликативной*, если для любых функционалов α, β из $\varDelta$ их свертка $\alpha * \beta$ тоже лежит в $\varDelta$:

$$\forall \alpha, \beta \in \varDelta \qquad \alpha * \beta \in \varDelta$$

коротко это изображается вложением:

$$\varDelta * \varDelta \subseteq \varDelta$$

— абсолютно выпуклый компакт $D \subseteq \mathcal{O}(G)$ мы будем называть *дуально субмультипликативным*, если его поляра D° является субмультипликативной окрестностью нуля:

$$D^\circ * D^\circ \subseteq D^\circ$$

Лемма 4.1.

(a) Если $\varphi : G \to (0; 1]$ – обратный полухарактер на G, то порождаемый им ромб $\varphi^{\blacklozenge}$ является (замкнутой, абсолютно выпуклой и) субмультипликативной окрестностью нуля в $\mathcal{O}^\star(G)$.

(b) Если $\varDelta \subseteq \mathcal{O}^\star(G)$ – замкнутая абсолютно выпуклая субмультипликативная окрестность нуля в $\mathcal{O}^\star(G)$, то ее внутренняя огибающая $\varDelta^{\lozenge}$ – обратный полухарактер на G.

Доказательство. 1. Обозначим

$$\varepsilon_x = \varphi(x) \cdot \delta^x \in \mathcal{O}^\star(G),$$

тогда

$$\varphi^{\blacklozenge} = \overline{\mathsf{absconv}}\,\{\varphi(x)\cdot\delta^x; \quad x \in M\} = \overline{\mathsf{absconv}}\,\{\varepsilon_x; \quad x \in M\} \tag{4.12}$$

и вложение

$$\varphi^{\blacklozenge} * \varphi^{\blacklozenge} \subseteq \varphi^{\blacklozenge}$$

проверяется в три этапа. Сначала нужно заметить, что

$$\forall x, y \in G \qquad \varepsilon_x * \varepsilon_y \in \varphi^{\blacklozenge}$$

Действительно,

$$\varepsilon_x * \varepsilon_y = \varphi(x)\cdot\delta^x * \varphi(y)\cdot\delta^y = \varphi(x)\cdot\varphi(y)\cdot\delta^{x\cdot y} = \underbrace{\frac{\varphi(x)\cdot\varphi(y)}{\varphi(x\cdot y)}}_{\substack{\leqslant \\ 1}} \cdot \varepsilon_{x\cdot y} \in \overline{\mathsf{absconv}}\,\{\varepsilon_z; \quad z \in M\} = \varphi^{\blacklozenge}$$

Затем берутся конечные абсолютно выпуклые комбинации функционалов ε_x:

$$\alpha = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \varepsilon_{x_i}, \quad \beta = \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot \varepsilon_{y_j} \qquad \left(\sum_{i=1}^k |\lambda_i| \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^l |\mu_j| \leqslant 1 \right) \tag{4.13}$$

для которых получается

$$\alpha * \beta = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot \varepsilon_{x_i} * \sum_{j=1}^l \mu_j \cdot \varepsilon_{y_j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant l} \underbrace{\lambda_i \cdot \mu_j}_{\substack{\uparrow \\ \sum_{1\leqslant i\leqslant k, 1\leqslant j\leqslant l} |\lambda_i\cdot\mu_j| \\ \| \\ \sum_{i=1}^k |\lambda_i| \cdot \sum_{j=1}^l |\mu_j| \\ \leqslant \\ 1}} \cdot \underbrace{\varepsilon_{x_i} * \varepsilon_{y_j}}_{\substack{\in \\ \varphi^{\blacklozenge}}} \in \underbrace{\varphi^{\blacklozenge}}_{\substack{\text{абсолютно} \\ \text{выпуклое} \\ \text{множество}}}$$

И, наконец, для произвольных $\alpha, \beta \in \varphi^{\blacklozenge}$ включение $\alpha * \beta \in \varphi^{\blacklozenge}$ получается как следствие плотности функционалов вида (4.13) в множестве $\varphi^{\blacklozenge} = \overline{\mathsf{absconv}}\,\{\varepsilon_x; \quad x \in M\}$ и непрерывности операции свертки.

2. Здесь используется формула (2.19):

$$\Delta * \Delta \subseteq \Delta \quad \Longrightarrow \quad \forall x, y \in G \qquad \underbrace{\Delta^{\lozenge}(x)\cdot\delta^{x}}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \Delta,\\ \text{в силу (2.19)}}} * \underbrace{\Delta^{\lozenge}(y)\cdot\delta^{y}}_{\substack{\rotatebox{90}{$\in$}\\ \Delta,\\ \text{в силу (2.19)}}} = \Delta^{\lozenge}(x)\cdot\Delta^{\lozenge}(y)\cdot\delta^{x\cdot y} \in \Delta \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta^{\lozenge}(x)\cdot\Delta^{\lozenge}(y) \leqslant \max\{\lambda > 0 : \ \lambda\cdot\delta^{x\cdot y} \in \Delta\} = (2.19) = \Delta^{\lozenge}(x\cdot y) \quad \Longrightarrow \quad \Delta^{\lozenge}(x)\cdot\Delta^{\lozenge}(y) \leqslant \Delta^{\lozenge}(x\cdot y)$$

$\square$

Лемма 4.2.

(a) *Если $f : G \to [1;\infty)$ – полухарактер на G, то порождаемый им прямоугольник $f^{\blacksquare}$ дуально субмультипликативен.*

(b) *Если $D \subseteq \mathcal{O}(G)$ – абсолютно выпуклый компакт, то его внешняя огибающая $D^{\square}$ – полухарактер на G.*

Доказательство. 1. Если $f : G \to [1;\infty)]$ – полухарактер, то $\frac{1}{f}$ – обратный полухарактер, поэтому по лемме 4.1 (a) ромб

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\blacklozenge} = (2.28) = (f^{\blacksquare})^{\circ}$$

будет субмультипликативной окрестностью нуля. Значит $f^{\blacksquare}$ – дуально субмультипликативный прямоугольник.

2. Если $D \subseteq \mathcal{O}(G)$ – дуально субмультипликативный прямоугольник, то его поляра $D^{\circ} \subseteq \mathcal{O}^{\star}(G)$ – субмультипликативная окрестность нуля в $\mathcal{O}^{\star}(G)$, поэтому по лемме 4.1 (b) внутренняя огибающая

$$(D^{\circ})^{\lozenge} = (2.29) = \frac{1}{D^{\square}}$$

– обратный полухарактер. Значит $D^{\square}$ – полухарактер. $\square$

Леммы 4.1 и 4.2 вместе с формулами $\Delta = \Delta^{\lozenge\blacklozenge}$ и $D = D^{\square\blacksquare}$ для ромбов и прямоугольников дают следующую теорему:

Теорема 4.1.

(a) *Ромб $\Delta \in \mathcal{O}^{\star}(G)$ субмультипликативен тогда и только тогда, когда его внутренняя огибающая $\Delta^{\lozenge}$ – обратный полухарактер на G.*

(b) *Прямоугольник $D \in \mathcal{O}(G)$ дуально субмультипликативен тогда и только тогда, когда его внешняя огибающая $D^{\square}$ – полухарактер на G.*

Следующий результат показывает, что субмультипликативные ромбы образуют фундаментальную систему среди всех субмультипликативных замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей нуля в $\mathcal{O}^{\star}(G)$:

Теорема 4.2.

(a) *Всякая замкнутая абсолютно выпуклая субмультипликативная окрестность нуля Δ в $\mathcal{O}^{\star}(G)$ содержит некоторый субмультипликативный ромб, а именно ромб $\Delta^{\lozenge\blacklozenge}$.*

(b) *Всякое дуально субмультипликативное ограниченное множество $D \subseteq \mathcal{O}(G)$ содержится в некотором дуально субмультипликативном прямоугольнике, а именно, в прямоугольнике $D^{\square\blacksquare}$.*

Доказательство. 1. Если Δ – замкнутая абсолютно выпуклая субмультипликативная окрестность нуля в $\mathcal{O}^{\star}(G)$, то по лемме 4.1(b), $\Delta^{\lozenge}$ – обратный полухарактер, и значит, по лемме 4.1(a), ромб $\Delta^{\lozenge\blacklozenge}$ будет субмультипликативным.

2. Если D – дуально субмультипликативное ограниченное множество в $\mathcal{O}(G)$, то его поляра D° – замкнутая абсолютно выпуклая субмультипликативная окрестность нуля в $\mathcal{O}^{\star}(G)$, и по уже доказанному $(D^{\circ})^{\lozenge\blacklozenge}$ – субмультипликативный ромб. То есть множество $(D^{\square\blacksquare})^{\circ} = (D^{\circ})^{\lozenge\blacklozenge}$ субмультипликативно. Значит, прямоугольник $D^{\square\blacksquare}$ дуально субмультипликативен. $\square$

В соответствии с определениями § 2, мы называем функцию f на G *огибающим полухарактером*, если она является внешней огибающей и одновременно полухарактером на G.

Теорема 4.3. *Если G – компактно порожденная группа Штейна, то системы всех полухарактеров, всех огибающих полухарактеров и всех дуально субмультипликативных прямоугольников на G содержат счетные конфинальные подсистемы:*

- *существует последовательность полухарактеров h_N на G такая, что всякий полухарактер g мажорируется некоторым полухарактером h_N:*

$$g(x) \leqslant h_N(x), \quad x \in G$$

- *существует последовательность огибающих полухарактеров f_N на G такая, что всякий огибающий полухарактер g мажорируется некоторым полухарактером f_N:*

$$g(x) \leqslant f_N(x), \quad x \in G$$

- *существует последовательность E_N дуально субмультипликативных прямоугольников на G такая, что всякий дуально субмультипликативный прямоугольник D в G содержится в некотором E_N:*

$$D \subseteq E_N$$

Доказательство. Это следует из предложения 4.2: последовательность полухарактеров h_N, $N \in \mathbb{N}$, определенных формулой (4.10), будет искомой последовательностью полухарактеров на G.

А E_N и f_N определяются формулами

$$E_N = \{u \in \mathcal{O}(G) : \max_{x \in K^n} |u(x)| \leqslant N^n\} = (h_N)^{\blacksquare} \tag{4.14}$$

$$f_N = (E_N)^{\square} = (h_N)^{\blacksquare\square} \tag{4.15}$$

(E_N будут дуально субмультипликативными прямоугольниками по лемме 4.2(a), а f_N – огибающими полухарактерами по лемме 4.2(b)).

Если теперь D – дуально субмультипликативный прямоугольник, то по лемме 4.2(b), его внешняя огибающая $D^{\square}$ будет полухарактером, значит, по предложению 4.2, найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$D^{\square} \leqslant h_N$$

Отсюда получаем

$$D = (D^{\square})^{\blacksquare} \subseteq (h_N)^{\blacksquare} = E_N$$

то есть D обязан содержаться в некотором E_N. Из этого в свою очередь следует

$$D^{\square} \leqslant (E_N)^{\square} = f_N,$$

и это можно понимать так, что всякий огибающий полухарактер (всегда имеющий вид $D^{\square}$ по теореме 4.1) мажорируется некоторым f_N. □

(c) Голоморфные функции экспоненциального типа

Алгебра $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ голоморфных функций экспоненциального типа. Голоморфную функцию $u \in \mathcal{O}(G)$ на компактно порожденной группе Штейна G мы называем *функцией экспоненциального типа*, если она ограничивается некоторым полухарактером:

$$|u(x)| \leqslant f(x), \qquad x \in G \quad \Big(f(x \cdot y) \leqslant f(x) \cdot f(y)\Big)$$

Множество всех функций экспоненциального типа на G мы обозначаем $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$. Это подпространство в $\mathcal{O}(G)$, и по теореме 4.2, его можно рассматривать как объединение дуально субмультипликативных прямоугольников в $\mathcal{O}(G)$:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \bigcup_{\substack{D \text{ – дуально} \\ \text{субмультипликативный} \\ \text{прямоугольник в } \mathcal{O}(G)}} D = \bigcup_{f \text{ – полухарактер на } G} f^{\blacksquare}$$

или, что то же самое, как объединение подпространств вида $\mathbb{C}D$, где D – дуально субмультипликативный прямоугольник в $\mathcal{O}(G)$:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \bigcup_{\substack{D \text{ – дуально} \\ \text{субмультипликативный} \\ \text{прямоугольник в } \mathcal{O}(G)}} \mathbb{C}D \tag{4.16}$$

Поэтому $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ естественно наделяется топологией инъективного (локально выпуклого) предела подпространств Смит $\mathbb{C}D$:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \varinjlim_{\substack{D \text{ – дуально} \\ \text{субмультипликативный} \\ \text{прямоугольник в } \mathcal{O}(G)}} \mathbb{C}D \tag{4.17}$$

Из теоремы 4.3 следует, что в этом пределе систему всех дуально субмультипликативных прямоугольников можно заменить на счетную подсистему:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \varinjlim_{N\to\infty} \mathbb{C}E_N \tag{4.18}$$

Вместе с теоремой 0.6 это дает следующее утверждение:

Теорема 4.4. *Пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ функций экспоненциального типа на компактно порожденной группы Штейна G является пространством Браунера.*

Следствие 4.2. *Если G – компактно порожденная группа Штейна, то всякое ограниченное множество D в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ содержится в некотором прямоугольнике вида $f^{\blacksquare}$, где f – некоторый полухарактер на G:*

$$D \subseteq f^{\blacksquare}$$

Доказательство. По предложению 0.1, D должен содержаться в каком-то компакте E_N, который, будучи дуально субмультипликативным прямоугольником, должен по теореме 4.1 иметь вид $f_N^{\blacksquare}$ для некоторого полухарактера f_N, а именно для $f_N = E_N^{\square}$. $\square$

Теорема 4.5. *Пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ функций экспоненциального типа на компактно порожденной группе Штейна G является проективной стереотипной алгеброй относительно обычного поточечного умножения функций.*

Доказательство. Заметим, что если функции $u, v \in \mathcal{O}(G)$ подчинены полухарактерам f и g, то их произведение $u \cdot v$ подчинено полухарактеру $f \cdot g$:

$$u \in f^{\blacksquare},\ v \in g^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad u \cdot v \in (f \cdot g)^{\blacksquare}$$

Это можно интерпретировать так, что операция умножения $(u, v) \mapsto u \cdot v$ в пространстве $\mathcal{O}(G)$ переводит всякий компакт вида $f^{\blacksquare} \times g^{\blacksquare}$ (где f и g – полухарактеры) в компакт $(f \cdot g)^{\blacksquare}$.

$$(u, v) \in f^{\blacksquare} \times g^{\blacksquare} \quad \mapsto \quad u \cdot v \in (f \cdot g)^{\blacksquare}$$

Причем эта операция в пространстве $\mathcal{O}(G)$ непрерывна, значит она непрерывно переводит $f^{\blacksquare} \times g^{\blacksquare}$ в $(f \cdot g)^{\blacksquare}$. С другой стороны, $(f \cdot g)^{\blacksquare}$, как дуально субмультипликативный прямоугольник непрерывно вкладывается в пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$. Значит мы получаем непрерывное отображение

$$(u, v) \in f^{\blacksquare} \times g^{\blacksquare} \quad \mapsto \quad u \cdot v \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$$

Если теперь D и E – произвольные компакты в пространстве Браунера $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, то по следствию 4.2, они должны содержаться в компактах вида $f^{\blacksquare}$ и $g^{\blacksquare}$, где f и g – полухарактеры. Поэтому

$$D \times E \subseteq f^{\blacksquare} \times g^{\blacksquare}$$

Отсюда можно заключить, что операция умножения должна быть непрерывной из $D \times E$ в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$:

$$(u, v) \in D \times E \subseteq f^{\blacksquare} \times g^{\blacksquare} \quad \mapsto \quad u \cdot v \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$$

Это верно для произвольных компактов D и E в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$. Значит, мы можем применить теорему [1, Theorem 5.24]: поскольку $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ как пространство Браунера, кополно (то есть его стереотипное сопряженное пространство полно), оно по теореме [1, Theorem 2.4] насыщено, значит любая билинейная форма на нем, непрерывная на компактах вида $D \times E$, должна быть непрерывна в смысле определения [1, § 5.6]. Применительно к операции умножения $(u, v) \mapsto u \cdot v$ это означает, что она должна быть непрерывна в смысле условий предложения 1.1, и значит $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ – проективная алгебра. $\square$

Отметим следующий очевидный факт:

Теорема 4.6. *Если H – замкнутая подгруппа в группе Штейна G, то ограничение всякой голоморфной функции экспоненциального типа с G на H также является голоморфной функцией экспоненциального типа:*

$$u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \quad \Longrightarrow \quad u|_H \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.19}$$

Алгебра $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ экспоненциальных аналитических функционалов. Элементы сопряженного стереотипного пространства $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$, то есть линейные непрерывные функционалы на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, мы будем называть *экспоненциальными аналитическими функционалами* на группе G, а само пространство $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ – *пространством экспоненциальных функционалов* на G.

Из теоремы 4.4 следует

Теорема 4.7. *Пространство $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ экспоненциальных функционалов на компактно порожденной группе Штейна G является пространством Фреше.*

Теорема 4.8. *Пространство $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ экспоненциальных функционалов на компактно порожденной группе Штейна G является проективной стереотипной алгеброй относительно обычной операции свертки функционалов, определенной формулами* (3.10)-(3.14)*:*

$$(\alpha, \beta) \quad \mapsto \quad \alpha * \beta$$

Доказательство. 1. Зафиксируем функцию $u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и заметим, что для любой точки $s \in G$ ее сдвиг $u \cdot s$ (определенный формулой (3.10)) снова является функцией из $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$:

$$\forall s \in G \quad \forall u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \quad u \cdot s \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$$

Действительно, подобрав полухарактер f мажорирующий u, мы получим:

$$\forall t \in G \quad |(u \cdot s)(t)| = |u(s \cdot t)| \leqslant f(s \cdot t) \leqslant f(s) \cdot f(t)$$

То есть,

$$u \in f^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad u \cdot s \in f(s) \cdot f^{\blacksquare} \tag{4.20}$$

2. Обозначим получающееся отображение $s \mapsto u \cdot s$ каким-нибудь символом, например, $\widehat{u}$:

$$\widehat{u} : G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \quad \Big| \quad \widehat{u}(s) := u \cdot s, \qquad s \in G$$

и покажем, что оно непрерывно. Пусть s_i – последовательность точек в G, сходящаяся к точке s:

$$s_i \underset{i\to\infty}{\overset{G}{\longrightarrow}} s$$

Тогда последовательность голоморфных функций $\widehat{u}(s_i) \in \mathcal{O}(G)$ стремится к голоморфной функции $\widehat{u}(s) \in \mathcal{O}(G)$ равномерно на каждом компакте $K \subseteq G$, то есть в пространстве $\mathcal{O}(G)$:

$$\widehat{u}(s_i) \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{O}(G)}{\longrightarrow}} \widehat{u}(s)$$

При этом из (4.20) следует, что все эти функции подчинены полухарактеру $C \cdot f$, где $C = \max\{\sup_i f(s_i), f(s)\}$ (эта величина конечна, потому что сходящаяся последовательность s_i образует вместе со своим пределом s компакт), и поэтому лежат в прямоугольнике, порожденном полухарактером $C \cdot f$:

$$\widehat{u}(s_i) = u \cdot s_i \in C \cdot f^{\blacksquare}, \qquad \widehat{u}(s) = u \cdot s \in C \cdot f^{\blacksquare}$$

Иными словами, $\widehat{u}(s_i)$ сходится к $\widehat{u}(s)$ в компакте $C \cdot f^{\blacksquare}$

$$\widehat{u}(s_i) = u \cdot s_i \underset{i\to\infty}{\overset{C \cdot f^{\blacksquare}}{\longrightarrow}} u \cdot s = \widehat{u}(s)$$

Значит, $\widehat{u}(s_i)$ сходится к $\widehat{u}(s)$ в объемлющем этот компакт пространстве $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$:

$$\widehat{u}(s_i) \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)}{\longrightarrow}} \widehat{u}(s)$$

3. Из непрерывности отображения $\widehat{u}: G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ следует, что для всякого функционала $\beta \in \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ функция $\beta \circ \widehat{u} : G \to \mathbb{C}$ голоморфна. Для доказательства можно воспользоваться теоремой Мореры: рассмотрим замкнутую ориентированную гиперповерхность $\varGamma$ в G, имеющую достаточно малый диаметр так, чтобы интеграл по ней любой голоморфной фунции равнялся нулю, и покажем, что интеграл по ней от $\beta \circ \widehat{u}$ тоже равен нулю:

$$\int_{\varGamma} (\beta \circ \widehat{u})(s)\, \mathsf{d}\, s = 0 \tag{4.21}$$

Действительно, подберем направленность функционалов $\{\beta_i; i \to \infty\} \subset \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$, являющихся линейными комбинациями дельта-функционалов, и аппроксимирующих β в $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$:

$$\beta_i = \sum_k \lambda_i^k \cdot \delta^{a_i^k}, \qquad \beta_i \overset{\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)}{\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}} \beta$$

Тогда получим: поскольку $\widehat{u}: G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ непрерывно,

$$\beta \circ \widehat{u} \overset{\mathcal{C}(G)}{\underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow}} \beta_i \circ \widehat{u}$$

Отсюда следует, что для всякой меры Радона $\alpha \in \mathcal{C}(G)$

$$\alpha(\beta \circ \widehat{u}) \underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow} \alpha(\beta_i \circ \widehat{u})$$

В частности, для функционала интегрирования по выбранной нами гиперповерхности $\varGamma$ получаем

$$\int_{\varGamma} (\beta \circ \widehat{u})(s)\, \mathsf{d}\, s \underset{\infty\leftarrow i}{\longleftarrow} \int_{\varGamma} (\beta_i \circ \widehat{u})(s)\, \mathsf{d}\, s = \int_{\varGamma} \left(\sum_k \lambda_i^k \cdot \delta^{a_i^k} \circ \widehat{u} \right)(s)\, \mathsf{d}\, s =$$
$$= \sum_k \lambda_i^k \cdot \int_{\varGamma} \left(\delta^{a_i^k} \circ \widehat{u} \right)(s)\, \mathsf{d}\, s = \sum_k \lambda_i^k \cdot \int_{\varGamma} \delta^{a_i^k}(\widehat{u}(s))\, \mathsf{d}\, s =$$
$$= \sum_k \lambda_i^k \cdot \int_{\varGamma} \widehat{u}(s)(a_i^k)\, \mathsf{d}\, s = \sum_k \lambda_i^k \cdot \underbrace{\int_{\varGamma} u(s \cdot a_i^k)\, \mathsf{d}\, s}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{поскольку } u \text{ голоморфна}}} = 0$$

То есть действительно справедливо (4.21).

4. Мы показали, что для всякого функционала $\beta \in \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ функция $\beta \circ \widehat{u} : G \to \mathbb{C}$ голоморфна. Покажем теперь, что она имеет экспоненциальный тип:

$$\forall u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \quad \forall \beta \in \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G) \qquad \beta \circ \widehat{u} \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \tag{4.22}$$

Действительно, поскольку функционал $\beta \in \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ ограничен на компакте $f^{\blacksquare} \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, он является ограниченным функционалом на банаховом представлении пространства Смит $\mathbb{C}f^{\blacksquare}$, то есть выполняется неравенство

$$\forall v \in \mathbb{C}f^{\blacksquare} \qquad |\beta(v)| \leqslant M \cdot \|v\|_{f^{\blacksquare}} \tag{4.23}$$

где

$$M = \|\beta\|_{(f^{\blacksquare})^{\circ}} := \max_{v \in f^{\blacksquare}} |\beta(v)|, \qquad \|v\|_{f^{\blacksquare}} := \inf\{\lambda > 0 : \ v \in \lambda \cdot f^{\blacksquare}\}$$

Теперь из формулы (4.20) получаем:

$$\forall s \in G \quad u \cdot s \in f(s) \cdot f^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad \|u \cdot s\|_{f^{\blacksquare}} := \inf\{\lambda > 0 : \ u \cdot s \in \lambda \cdot f^{\blacksquare}\} \leqslant f(s) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad |(\beta \circ \widehat{u})(s)| = |\beta(u \cdot s)| \leqslant M \cdot \|u \cdot s\|_{f^{\blacksquare}} \leqslant M \cdot f(s)$$

То есть функция $\beta \circ \widehat{u}$ подчинена полухарактеру $M \cdot f = \|\beta\|_{(f^{\blacksquare})^{\circ}} \cdot f$:

$$u \in f^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad \beta \circ \widehat{u} \in \|\beta\|_{(f^{\blacksquare})^{\circ}} \cdot f^{\blacksquare} \tag{4.24}$$

5. Заметим теперь, что

$$(\beta \circ \widehat{u})(s) = \beta(u \cdot s) = (3.13) = (u * \widetilde{\beta})(s), \qquad s \in G$$

Получается, что мы доказали, что функция $u*\widetilde{\beta}=\beta\circ\widehat{u}$ принадлежит пространству $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, поэтому для любого функционала $\alpha\in\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ определена свертка

$$\alpha*\beta(u)=(3.14)=\alpha(u*\tilde{\beta})$$

Остается убедиться, что операция $(\alpha,\beta)\mapsto\alpha*\beta$ является непрерывной билинейной формой, то есть удовлетворяет условиям предложения 1.1.

Пусть α_i – направленность, стремящаяся к нулю в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, а B – компакт в $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$. Рассмотрим произвольный компакт D в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$. По следствию 4.2, он должен содержаться в каком-то прямоугольнике $f^{\blacksquare}$, где f – полухарактер:

$$D\subseteq f^{\blacksquare}$$

С другой стороны, на пространстве Смит $\mathbb{C}f^{\blacksquare}$ нормы функционалов $\beta\in B$ должны быть ограничены:

$$\sup_{\beta\in B}\|v\|_{f^{\blacksquare}}=M<\infty$$

Поэтому в силу (4.24) мы получаем:

$$\forall u\in D\quad\forall\beta\in B\qquad u*\widetilde{\beta}=\beta\circ\widehat{u}\in\|\beta\|_{(f^{\blacksquare})^{\circ}}\cdot f^{\blacksquare}\subseteq M\cdot f^{\blacksquare}$$

Таким образом, множество $\{u*\widetilde{\beta};\ u\in D,\ \beta\in B\}$ содержится в компакте $M\cdot f^{\blacksquare}$ пространства $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$. Значит, направленность функционалов α_i должна равномерно на нем стремиться к нулю в пространстве $\mathbb{C}$:

$$(\alpha_i*\beta)(u)=\alpha_i(u*\widetilde{\beta})\underset{i\to\infty}{\overset{\mathbb{C}}{\rightrightarrows}}0\qquad\Big(u\in D,\ \beta\in B\Big)$$

Это верно для любого компакта D, значит направленность функционалов $\alpha_i*\beta$ стремится к нулю в пространстве $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ равномерно по $\beta\in B$:

$$\alpha_i*\beta\underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)}{\rightrightarrows}}0\qquad\Big(\beta\in B\Big)$$

Случай противоположного порядка множителей можно не рассматривать из-за тождества

$$\widetilde{\alpha*\beta}=\widetilde{\beta}*\widetilde{\alpha}$$

□

(d) Примеры

Конечные группы. Как мы отмечали в § 3(a), всякая конечная группа G, рассматриваемая как нульмерное комплексное многообразие, является линейной комплексной группой Ли. При этом голоморфной функцией на G должна считаться просто произвольная функция $u:G\to\mathbb{C}$. Поскольку любая такая функция обязательно ограничена (ее множество значений конечно), мы получаем, что она должна быть функцией экспоненциального типа. Поэтому алгебры $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}(G)$ в этом случае совпадают и равны алгебре $\mathbb{C}^G$ всех функций на G с поточечными алгебраическими операциями и топологией поточечной сходимости:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)=\mathcal{O}(G)=\mathbb{C}^G$$

Группы $\mathbb{C}^n$. Для случая комплексной плоскости $\mathbb{C}$ наше определение, разумеется, совпадает с обычным – функциями экспоненциального типа на $\mathbb{C}$ будут целые функции, растущие не быстрее экспоненты:

$$\exists A>0:\quad|u(x)|\leqslant A^{|x|}\qquad(x\in\mathbb{C}).$$

В соответствии с классическими теоремами о росте целых функций [22, 33] это условие эквивалентно тому, что производные u в фиксированной точке, например, в нуле, растут не быстрее экспоненты:

$$\exists B>0:\quad|u^{(k)}(0)|\leqslant B^k\qquad(k\in\mathbb{N}).$$

То же самое справедливо и для многих переменных: функциями экспоненциального типа на $\mathbb{C}^n$ согласно нашему определению будут в точности функции $u\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющие условию

$$\exists A>0:\quad|u(x)|\leqslant A^{|x|}\qquad(x\in\mathbb{C}^n),\tag{4.25}$$

которое оказывается эквивалентно условию

$$\exists B>0: \quad |u^{(k)}(0)| \leqslant B^{|k|} \qquad (k\in\mathbb{N}^n), \tag{4.26}$$

где факториал $k!$ и модуль $|k|$ мультииндекса $k=(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n$ определяются равенствами

$$k! := k_1\cdot ...\cdot k_n, \qquad |k| := k_1+...+k_n$$

Эквивалентность (4.25) нашему определению следует из предложения 4.2, а равносильность (4.25) и (4.26) доказывается так же, как и в случае одной переменной: импликация (4.26) $\Rightarrow$ (4.25) очевидна, а обратная (4.25) $\Rightarrow$ (4.26) является следствием неравенств Коши (см. [34]) для коэффициентов $c_k=\frac{u^{(k)}(0)}{k!}$ ряда Тейлора функции u:

$$\forall R>0 \qquad |c_k| \leqslant \frac{\max\limits_{|x|\leqslant R}|u(x)|}{R^{|k|}} \leqslant (4.25) \leqslant \frac{A^R}{R^{|k|}}$$

$$\Downarrow$$

$$|c_k| \leqslant \min_{R>0}\frac{A^R}{R^{|k|}} = \frac{A^R}{R^{|k|}}\bigg|_{R=\frac{|k|}{\ln A}} = \frac{A^{\frac{|k|}{\ln A}}}{|k|^{|k|}}\cdot(\ln A)^{|k|} = \frac{1}{|k|^{|k|}}\cdot B^{|k|}, \qquad B=A^{\frac{1}{\ln A}}\cdot\ln A$$

$$\Downarrow$$

$$|u^{(k)}(0)| = k!\cdot|c_k| \leqslant \frac{k!}{|k|^{|k|}}\cdot B^{|k|} \leqslant B^{|k|}$$

Группы $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. На группе $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ функциями экспоненциального типа будут в точности многочлены, то есть функция вида

$$u(x)=\frac{P(x)}{(\det x)^m}, \qquad x\in\mathsf{GL}(n,\mathbb{C}), \qquad m\in\mathbb{Z}_+ \tag{4.27}$$

где P – обычный многочлен от матричных элементов матрицы x, а $\det x$ – определитель матрицы x. Таким образом, справедливо равенство:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) = \mathcal{R}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) \tag{4.28}$$

Доказательство. 1. Сначала докажем вложение $\mathcal{R}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))\subseteq\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))$. Заметим для этого, что любой матричный элемент

$$x\mapsto x_{k,l}$$

является функцией экспоненциального типа, потому что он подчинен, например, первой из матричных норм (4.5):

$$|x_{k,l}| \leqslant \sum_{i,j=1}^n |x_{i,j}| = ||x||$$

Как следствие, всякий многочлен $x\mapsto P(x)$ от матричных элементов также является функцией экспоненциального типа (потому что функции экспоненциального типа образуют алгебру).

Далее, всякая степень определителя, $x\mapsto(\det x)^{-m}$, мультипликативна

$$(\det(x\cdot y))^{-m} = (\det x)^{-m}\cdot(\det y)^{-m}$$

и поэтому ее модуль также мультипликативен:

$$\left|(\det(x\cdot y))^{-m}\right| = \left|(\det x)^{-m}\right|\cdot\left|(\det y)^{-m}\right|$$

Значит, функция $x\mapsto|(\det x)^{-m}|$ является полухарактером на $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$, а $x\mapsto(\det x)^{-m}$ – функцией экспоненциального типа на $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$.

Умножая теперь две функции экспоненциального типа $x\mapsto P(x)$ и $x\mapsto(\det x)^{-m}$, мы получим функцию экспоненциального типа $x\mapsto P(x)/(\det x)^m$.

2. Теперь докажем обратное вложение: $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))\subseteq\mathcal{R}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))$. Если u – голоморфная функция экспоненциального типа на $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, то, по предложению 4.1, она должна быть подчинена некоторому полухарактеру вида (4.6). В частности, для некоторых $C\geqslant 1$ и $N\in\mathbb{N}$

$$|u(x)| \leqslant C\cdot\max\{||x||;||x^{-1}||\}^N, \qquad ||x|| = \sum_{i,j=1}^n |x_{i,j}| \tag{4.29}$$

Элементы обратной матрицы x^{-1} получаются из x как дополнительные миноры, поделенные на определитель, поэтому их можно представлять себе, как многочлены (степени $n-1$) от $x_{i,j}$ и $(\det x)^{-1}$. Это означает, что можно оценить правую часть (4.29) многочленом (степени $N(n-1)$) от $|x_{i,j}|$ и $|\det x|^{-1}$ с неотрицательными коэффициентами:

$$|u(x)| \leqslant C \cdot \max\{||x||; ||x^{-1}||\}^N \leqslant C \cdot P\Big(\{|x_{i,j}|\}_{1\leqslant i,j\leqslant n},\ |\det x|^{-1}\Big)$$

Поэтому если домножить u на функцию $(\det x)^{N(n-1)}$, то мы получим голоморфную функцию на $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, ограниченную многочленом от $|x_{i,j}|$:

$$\Big|u(x) \cdot (\det x)^{N(n-1)}\Big| \leqslant C \cdot Q\Big(\{|x_{i,j}|\}_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big)$$

Поскольку такая функция локально ограничена в точках аналитического множества $\det x = 0$, по теореме Римана о продолжении [34], она продолжается до голоморфной функции на многообразие $\mathsf{M}_n(\mathbb{C})$ всех комплексных матриц. Значит, $u(x)\cdot(\det x)^{N(n-1)}$ можно считать голоморфной функцией на $\mathsf{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$. Поскольку она имеет полиномальный рост, она представляет собой некий многочлен q от матричных элементов $x_{i,j}$:

$$u(x) \cdot (\det x)^{N(n-1)} = q(x)$$

Отсюда

$$u(x) = \frac{q(x)}{(\det x)^{N(n-1)}},$$

то есть $u \in \mathcal{R}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))$. □

Следствие 4.3. *На комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ функциями экспоненциального типа будут многочлены Лорана (и только они):*

$$u(t) = \sum_{|n|\leqslant N} u_n \cdot t^n, \qquad N \in \mathbb{N}$$

(e) Инъекция $\flat_G : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}(G)$

Для вложения алгебры $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ в алгебру $\mathcal{O}(G)$ нам будет необходим какой-то символ, мы условимся использовать в этих целях $\flat_G$:

$$\flat_G : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}(G) \tag{4.30}$$

Это отображение всегда инъективно, является гомоморфизмом алгебр, и, по определению топологии в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, непрерывно.

Равенство (4.28) вместе с теоремой 4.6 означают, что если G – произвольная линейная группа (с фиксированным представлением в качестве замкнутой подгруппы в $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$), то всякая функция на G, продолжающаяся до многочлена на объемлющую группу $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, является функцией экспоненциального типа. Таким образом, справедлива цепочка вложений:

$$\mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \subseteq \mathcal{O}(G) \tag{4.31}$$

(в которой $\mathcal{R}(G)$ обозначает функции, продолжающиеся до многочленов на $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ – это уточнение необходимо потому что G не обязана быть алгебраической группой).

Теорема 4.9. *Если G – линейная комплексная группа, то алгебра $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ голоморфных функций экспоненциального типа на G плотна в алгебре $\mathcal{O}(G)$ всех вообще голоморфных функций на G.*

Доказательство. Пусть $\varphi : G \to \mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ – голоморфное вложение в виде замкнутой подгруппы. По следствию из теорем Картана [38, 11.5.2], всякую голоморфную функцию $v \in \mathcal{O}(G)$ можно продолжить до голоморфной функции $u \in \mathcal{O}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))$. Если затем приблизить u равномерно на компактах многочленами $u_i \in \mathcal{R}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}))$, то, поскольку, в силу (4.28), полиномы u_i – функции экспоненциального типа на $\mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$, их ограничения $u_i|_G$ будут функциями экспоненциального типа на G, приближающими v равномерно на компактах в G. □

(f) Ядерность пространств $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$

Теорема 4.10. *Для всякой компактно порожденной группы Штейна G пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ является ядерным пространством Браунера, а его сопряженное пространство $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ – ядерным пространством Фреше.*

Доказательству этого факта мы предпошлем две леммы. Первая из них верна для произвольного комплексного многообразия M и доказывается теми же приемами, что применяются при доказательстве ядерности пространства $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ (см. [25, 6.4.2]):

Лемма 4.3. *Если M – комплексное многообразие и K и L – два компакта в M, причем K строго содержится в L,*

$$K \subseteq \operatorname{\mathsf{Int}} L$$

то существуют константа $C \geqslant 0$ и вероятностная мера μ на L такие, что для любого $u \in \mathcal{O}(G)$ выполняется неравенство

$$|u|_K \leqslant C \cdot \int_L |\alpha(u)| \; \mu(\mathsf{d}\,\alpha) \tag{4.32}$$

Как следствие, оператор $u|_L \mapsto u|_K$ ограничения с более широкого компакта на компакт поменьше будет абсолютно суммирующим, причем его квазинорма абсолютного суммирования оценивается сверху величиной C: для любых $u_1, ..., u_l \in \mathcal{O}(M)$

$$\sum_{i=1}^{l} |u_i|_K \leqslant C \cdot \int_L \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| \; \mu(\mathsf{d}\,\alpha) \leqslant C \cdot \sup_{\alpha \in \overline{\mathsf{absconv}}(\delta^L)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)|$$

Замечание 4.1. Здесь $\overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^L\right)$ обозначает универсальный компакт в пространстве Смит $\mathcal{C}^{\star}(L)$, сопряженном к банахову пространству $\mathcal{C}(L)$ непрерывных функций на L, или, что то же самое, единичный шар в банаховом пространстве $\mathcal{M}(L)$ мер Радона на L. Мы используем такое обозначение, потому что символом $\delta^L = \{\delta^x;\ x \in L\}$ удобно обозначать множество дельта-функционалов на $\mathcal{C}(L)$ – тогда поляра B° единичного шара B в $\mathcal{C}(L)$ совпадает с абсолютно выпуклой замкнутой оболочкой множества δ^L:

$$B^{\circ} = \overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^L\right) = \{\alpha \in \mathcal{M}(L) :\ ||\alpha|| \leqslant 1\}$$

(замыкание относительно топологии пространства $\mathcal{C}^{\star}(L)$).

Лемма 4.4. *Для всякой порождающей компактной окрестности единицы K в G*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$$

найдутся константы $C \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$ такие, что для любого $l \in \mathbb{N}$ и произвольных $u_1, ..., u_l \in \mathcal{O}(G)$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{l} |u_i|_{K^n} \leqslant C \cdot \lambda^{n-1} \cdot \sup_{\alpha \in \overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^{K^{2n+1}}\right)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| \tag{4.33}$$

Доказательство. 1. Множество $U = \operatorname{\mathsf{Int}} K$ есть открытая окрестность единицы в G, поэтому система сдвигов $\{x \cdot U;\ x \in K^2\}$ будет открытым покрытием компакта K^2. Выберем из него конечное подпокрытие, то есть конечное множество $F \subseteq K^2$ такое, что

$$K^2 \subseteq \bigcup_{x \in F} x \cdot U = F \cdot U$$

Тогда мы получим:

$$K^n \subseteq F^{n-1} \cdot K \subseteq F^{n-1} \cdot K^2 \subseteq K^{2n+1}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.34}$$

Это доказывается так: сначала нужно заметить, что

$$F \subseteq K^2 \quad \Longrightarrow \quad F^n \subseteq K^{2n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

После этого в цепочке (4.34) достаточно будет проверить только первое включение:

$$K^n \subseteq F^{n-1} \cdot K, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.35}$$

Это делается индукцией: при $n=2$ получаем

$$K^2 \subseteq F \cdot U \subseteq F \cdot K$$

и, если (4.35) верно для какого-то n, то для $n+1$ получаем:

$$K^{n+1} = K^n \cdot K \subseteq F^{n-1} \cdot K \cdot K \subseteq F^{n-1} \cdot K^2 \subseteq F^{n-1} \cdot F \cdot K = F^n \cdot K$$

2. Поскольку компакт K^2 строго содержит компакт K, по лемме 4.3 существуют C, μ такие, что

$$|u|_K \leqslant C \cdot \int_{K^2} |\alpha(u)| \mu(\mathsf{d}\,\alpha) \tag{4.36}$$

При сдвиге компакта K на произвольный элемент группы $x \in G$ эта формула принимает вид

$$|u|_{x\cdot K} \leqslant C \cdot \int_{x\cdot K^2} |\alpha(u)| (x\cdot\mu)(\mathsf{d}\,\alpha) \tag{4.37}$$

где $x \cdot \mu$ – сдвиг меры μ:

$$(x\cdot\mu)(u) = \mu(u\cdot x), \qquad (u\cdot x)(t) = u(x\cdot t)$$

Отсюда следует, что если E – произвольное конечное множество в G, то положив

$$\nu = \frac{1}{\mathsf{card}\, E} \sum_{x\in E} x\cdot\mu$$

мы получим вероятностную меру на множестве $E \cdot K^2$, со свойством

$$|u|_{E\cdot K} \leqslant \sum_{x\in E} |u|_{x\cdot K} \leqslant C \cdot \sum_{x\in E} \int_{x\cdot K^2} |\alpha(u)|(x\cdot\mu)(\mathsf{d}\,\alpha) =$$
$$= C \cdot \sum_{x\in E} \int_{E\cdot K^2} |\alpha(u)|(x\cdot\mu)(\mathsf{d}\,\alpha) = C \cdot \int_{E\cdot K^2} |\alpha(u)| \left(\sum_{x\in E} x\cdot\mu\right)(\mathsf{d}\,\alpha) =$$
$$= C \cdot \mathsf{card}(E) \cdot \int_{E\cdot K^2} |\alpha(u)|\ \nu(\mathsf{d}\,\alpha)$$

Отсюда в свою очередь можно сделать вывод, что оператор $u|_{E\cdot K^2} \mapsto u|_{E\cdot K}$ ограничения с более широкого компакта на компакт поменьше будет абсолютно суммирующим, причем его квазинорма абсолютного суммирования оценивается сверху величиной $C \cdot \mathsf{card}(E)$: для любых $u_1, ..., u_l \in \mathcal{O}(G)$

$$\sum_{i=1}^{l} |u_i|_{E\cdot K} \leqslant C \cdot \mathsf{card}(E) \cdot \int_{E\cdot K^2} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)|\ \nu(\mathsf{d}\,\alpha) \leqslant C \cdot \mathsf{card}(E) \cdot \sup_{\alpha\in\overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^{E\cdot K^2}\right)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)|$$

Теперь из формул (4.34) получаем:

$$\sum_{i=1}^{l} |u_i|_{K^n} \leqslant \sum_{i=1}^{l} |u_i|_{F^{n-1}\cdot K} \leqslant C \cdot \mathsf{card}(F^{n-1}) \cdot \sup_{\alpha\in\overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^{F^{n-1}\cdot K^2}\right)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| \leqslant$$
$$\leqslant C \cdot \mathsf{card}(F^{n-1}) \cdot \sup_{\alpha\in\overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^{K^{2n+1}}\right)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| \leqslant C \cdot (\mathsf{card}(F))^{n-1} \cdot \sup_{\alpha\in\overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^{K^{2n+1}}\right)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)|$$

и, обозначив $\lambda = \mathsf{card}\, F$, мы как раз получим формулу (4.33). □

Доказательство теоремы 4.10. Рассмотрим последовательность прямоугольников как в теореме 4.3:

$$E_N = (f_N)^{\blacksquare}$$

и представим $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ как инъективный предел последовательности пространств Смит $\mathbb{C}E_N$ по формуле (4.18):

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \varinjlim_{N\to\infty} \mathbb{C}E_N$$

Поскольку $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ – пространство Браунера, а $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ – пространство Фреше, нам, чтобы показать, что оба пространства ядерные, достаточно убедиться, что $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ коядерно. Рассмотрим $\mathbb{C}E_N$ как банаховы пространства с единичными шарами E_N. В силу (4.14), полунорма на $\mathbb{C}E_N$ определяется равенством

$$p_N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{N^n}|u|_{K^n}$$

Ее единичным шаром будет множество E_N:

$$E_N = \{u \in \mathcal{O}(G) : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |u|_{K^n} \leqslant N^n\} = \left\{u \in \mathcal{O}(G) : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{N^n}|u|_{K^n} \leqslant 1\right\} = \\ = \left\{u \in \mathcal{O}(G) : \ p_N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{N^n}|u|_{K^n} \leqslant 1\right\}$$

Чтобы доказать, что пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \varinjlim_{N\to\infty} \mathbb{C}E_N$ коядерно, нам достаточно убедиться, что для всякого $N \in \mathbb{N}$ найдется $M \in \mathbb{N}$, $M > N$, такое что отображение вложения $\mathbb{C}E_N \to \mathbb{C}E_M$ будет абсолютно суммирующим, то есть, таким, что для некоторой константы $L > 0$, любого $l \in \mathbb{N}$ и любых $u_1, ..., u_l \in \mathbb{C}E_N$ выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{l} p_M(u_i) \leqslant L \cdot \sup_{\alpha\in(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| \tag{4.38}$$

Это доказывается так. Сначала нужно заметить, что для любых $n, N \in \mathbb{N}$ выполняется вложение

$$E_N = \{u \in \mathcal{O}(G) : \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |u|_{K^n} \leqslant N^n\} \subseteq \{u \in \mathcal{O}(G) : \ |u|_{K^n} \leqslant N^n\} = N^n \cdot {}^\circ\delta^{K^n} \tag{4.39}$$

Из него мы получаем цепочку:

$$E_N \subseteq N^n \cdot {}^\circ\Big(\delta^{K^n}\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$(E_N)^\circ \supseteq (N^n \cdot {}^\circ\Big(\delta^{K^n}\Big))^\circ = \frac{1}{N^n} \cdot ({}^\circ\Big(\delta^{K^n}\Big))^\circ = \frac{1}{N^n} \cdot \overline{\mathsf{absconv}}(\delta^{K^n})$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathsf{absconv}}(\delta^{K^n}) \subseteq N^n \cdot (E_N)^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathsf{absconv}}(\delta^{K^{2n+1}}) \subseteq N^{2n+1} \cdot (E_N)^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{l} |u_i|_{K^n} \leqslant (4.33) \leqslant C \cdot \lambda^{n-1} \cdot \sup_{\alpha\in\overline{\mathsf{absconv}}\left(\delta^{K^{2n+1}}\right)} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| \leqslant C \cdot \lambda^{n-1} \cdot \sup_{\alpha\in N^{2n+1}\cdot(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\alpha(u_i)| = \\ = C \cdot \lambda^{n-1} \cdot \sup_{\beta\in(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |N^{2n+1} \cdot \beta(u_i)| = C \cdot \lambda^{n-1} \cdot N^{2n+1} \cdot \sup_{\beta\in(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\beta(u_i)|$$

$$\Downarrow$$

$$\forall M > 0 \qquad \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{M^n}|u_i|_{K^n} \leqslant C \cdot \frac{\lambda^{n-1} \cdot N^{2n+1}}{M^n} \cdot \sup_{\beta\in(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\beta(u_i)|$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{l} p_M(u_i) = \sum_{i=1}^{l} \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{M^n}|u_i|_{K^n} \leqslant \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{M^n}|u_i|_{K^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{M^n}|u_i|_{K^n}\right) \leqslant \\ \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(C \cdot \frac{\lambda^{n-1} \cdot N^{2n+1}}{M^n} \cdot \sup_{\beta\in(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\beta(u_i)|\right) = C \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} \cdot N^{2n+1}}{M^n}\right) \cdot \sup_{\beta\in(E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\beta(u_i)|$$

Отсюда видно, что если подобрать $M \in \mathbb{N}$ достаточно большим так, чтобы

$$C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} \cdot N^{2n+1}}{M^n} \leqslant 1$$

то константу L в (4.38) можно будет взять равной 1:

$$\sum_{i=1}^{l} p_M(u_i) \leqslant \underbrace{C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} \cdot N^{2n+1}}{M^n}}_{\substack{\wedge\!\!/ \\ 1}} \cdot \sup_{\beta \in (E_N)^\circ} \sum_{i=1}^{l} |\beta(u_i)|$$

$\square$

(g) Голоморфные отображения экспоненциального типа и тензорные произведения пространств $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$

Теорема 4.11. *Пусть G и H – две компактно порожденные группы Штейна. Формула*

$$\rho_{G,H}(u \boxdot v) = u \odot v, \qquad u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G), \quad v \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.40}$$

(где функция $u \boxdot v$ определена равенством (1.24)) задает линейное непрерывное отображение

$$\rho_{G,H} : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H) \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \oslash \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) = \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \odot \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H),$$

Это отображение является изоморфизмом стереотипных пространств и естественно по G и H, то есть представляет собой изоморфизм бифункторов из категории $\mathfrak{SG}$ групп Штейна в категорию $\mathfrak{Ste}$ стереотипных пространств:

$$\Big((G;H) \mapsto \mathcal{O}(G \times H)\Big) \rightarrowtail \Big((G;H) \mapsto \mathcal{O}(G) \odot \mathcal{O}(H)\Big)$$

Эквивалентно это отображение определяется формулой

$$\rho_{G,H}(w)(\beta) = \beta \circ \widehat{w}, \qquad w \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H), \quad \beta \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.41}$$

где $\widehat{w} : G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$ – отображение, заданное равенством

$$\widehat{w}(s)(t) = w(s,t), \qquad s \in G, \ t \in H \tag{4.42}$$

Следствие 4.4. *Справедливы следующие изоморфизмы функторов:*

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H) \cong \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \odot \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H) \cong \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \circledast \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.43}$$

$$\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G \times H) \cong \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) \odot \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \cong \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) \circledast \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.44}$$

Доказательство теоремы 4.11 опирается на следующую ниже лемму 4.5, в формулировке которой используется инъективное тензорное произведение $A \odot B$ множеств A и B в стереотипных пространствах X и Y. Напомним, что согласно обозначениям [1, (7.27)], $A \odot B$ определяется как подмножество в пространстве $X \odot Y = X \oslash Y^\star$ операторов $\varphi : Y^\star \to X$, состоящее из тех операторов, которые удовлетворяют условию $\varphi(B^\circ) \subseteq A$. В этом заключается смысл используемой нами ниже формулы

$$A \odot B = A \oslash B^\circ.$$

Лемма 4.5. *Если $g : G \to \mathbb{R}_+$ и $h : H \to \mathbb{R}_+$ – два полухарактера на G и H, то $g \boxdot h$ – полухарактер на $G \times H$, а отображение $\rho_{G,H}$, определяемое формулами (4.41) - (4.42), является гомеоморфизмом между компактами $(g \boxdot h)^{\blacksquare} \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H)$ и $g^{\blacksquare} \odot h^{\blacksquare} \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \odot \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$:*

$$(g \boxdot h)^{\blacksquare} \cong g^{\blacksquare} \odot h^{\blacksquare} \tag{4.45}$$

Доказательство. Здесь на первых шагах мы будем повторять рассуждения, употреблявшиеся при доказательстве теоремы 4.8.

1. Заметим сначала, что для любой функции $w \in (g \boxdot h)^{\blacksquare} \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H)$ формула (4.42) определяет некое отображение

$$\widehat{w} : G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$$

Действительно, поскольку w голоморфна на $G \times H$, она голоморфна по обеим переменным, поэтому при фиксированном $s \in G$ функция $\widehat{w}(s) : H \to \mathbb{C}$ тоже будет голоморфна. При этом она подчинена полухарактеру $g(s) \cdot h$:

$$\forall s \in G \qquad \widehat{w}(s) \in g(s) \cdot h^{\blacksquare} \tag{4.46}$$

потому что

$$w \in (g \boxdot h)^{\blacksquare} \quad \Longrightarrow \quad |\widehat{w}(s)(t)| = |w(s,t)| \leqslant g(s) \cdot h(t) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{w}(s) \in g(s) \cdot h^{\blacksquare}$$

Таким образом, $\widehat{w}(s)$ – всегда голоморфная функция экспоненциального типа на H, то есть $\widehat{w}((s) \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$

2. Покажем, что отображение $\widehat{w} : G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$ непрерывно. Пусть s_i – последовательность точек в G, сходящаяся к точке s:

$$s_i \underset{i\to\infty}{\overset{G}{\longrightarrow}} s$$

Тогда последовательность голоморфных функций $\widehat{w}(s_i) \in \mathcal{O}(H)$ стремится к голоморфной функции $\widehat{w}(s) \in \mathcal{O}(H)$ равномерно на каждом компакте $K \subseteq H$, то есть в пространстве $\mathcal{O}(H)$:

$$\widehat{w}(s_i) \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{O}(H)}{\longrightarrow}} \widehat{w}(s)$$

При этом все эти функции подчинены полухарактеру $C \cdot h$, где $C = \max\{\sup_i g(s_i), g(s)\}$ – конечная величина, потому что сходящаяся последовательность s_i вместе со своим пределом образует компакт:

$$|\widehat{w}(s_i)(t)| \leqslant g(s_i) \cdot h(t) \leqslant C \cdot h(t)$$

Таким образом, функции $\widehat{w}(s_i)$ и $\widehat{w}(s)$ лежат в прямоугольнике, порожденном полухарактером $C \cdot h$:

$$\{\widehat{w}(s_i); \widehat{w}(s)\} \subseteq (C \cdot h)^{\blacksquare}$$

Иными словами, $\widehat{w}(s_i)$ сходится к $\widehat{w}(s)$ в компакте $(C \cdot h)^{\blacksquare}$

$$\widehat{w}(s_i) \underset{i\to\infty}{\overset{(C\cdot h)^{\blacksquare}}{\longrightarrow}} \widehat{w}(s)$$

поэтому $\widehat{w}(s_i)$ сходится к $\widehat{w}(s)$ в объемлющем этот компакт пространстве $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$:

$$\widehat{w}(s_i) \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)}{\longrightarrow}} \widehat{w}(s)$$

3. Из непрерывности отображения $\widehat{w} : G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$ следует, что для всякого функционала $\beta \in \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$ функция $\beta \circ \widehat{w} : G \to \mathbb{C}$ голоморфна. Для доказательства можно воспользоваться теоремой Мореры: рассмотрим замкнутую ориентированную гиперповерхность $\varGamma$ в G размерности, имеющую достаточно малый диаметр, и покажем, что интеграл по ней равен нулю:

$$\int_{\varGamma} (\beta \circ \widehat{w})(s) \, \mathsf{d}\, s = 0 \tag{4.47}$$

Действительно, подберем направленность функционалов $\{\beta_i; i \to \infty\} \subset \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$, являющихся линейными комбинациями дельта-функционалов, и аппроксимирующих β в $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$:

$$\beta_i = \sum_k \lambda_i^k \cdot \delta^{a_i^k}, \qquad \beta_i \underset{i\to\infty}{\overset{\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)}{\longrightarrow}} \beta$$

Тогда получим: поскольку $\widehat{w} : G \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$ непрерывно,

$$\beta \circ \widehat{w} \underset{\infty\leftarrow i}{\overset{\mathcal{C}(G)}{\longleftarrow}} \beta_i \circ \widehat{w}$$

Отсюда следует, что для всякой меры Радона $\alpha \in \mathcal{C}(G)$

$$\alpha(\beta \circ \widehat{w}) \underset{\infty \leftarrow i}{\longleftarrow} \alpha(\beta_i \circ \widehat{w})$$

В частности, для функционала интегрирования по выбранной нами гиперповерхности $\varGamma$ получаем

$$\int_\varGamma (\beta \circ \widehat{w})(s) \,\mathsf{d}\, s \underset{\infty \leftarrow i}{\longleftarrow} \int_\varGamma (\beta_i \circ \widehat{w})(s) \,\mathsf{d}\, s = \int_\varGamma \left(\sum_k \lambda_i^k \cdot \delta^{a_i^k} \circ \widehat{w} \right)(s) \,\mathsf{d}\, s =$$
$$= \sum_k \lambda_i^k \cdot \int_\varGamma \left(\delta^{a_i^k} \circ \widehat{w} \right)(s) \,\mathsf{d}\, s = \sum_k \lambda_i^k \cdot \int_\varGamma \delta^{a_i^k}(\widehat{w}(s)) \,\mathsf{d}\, s =$$
$$= \sum_k \lambda_i^k \cdot \int_\varGamma \widehat{w}(s)(a_i^k) \,\mathsf{d}\, s = \sum_k \lambda_i^k \cdot \underbrace{\int_\varGamma w(s, a_i^k) \,\mathsf{d}\, s}_{\substack{\| \\ 0, \\ \text{поскольку } w \text{ голоморфна} \\ \text{по первому переменному}}} = 0$$

То есть действительно справедливо (4.47).

4. Мы показали, что для всякого функционала $\beta \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H)$ функция $\beta \circ \widehat{w} : G \to \mathbb{C}$ голоморфна. Покажем теперь, что она имеет экспоненциальный тип:

$$\forall w \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H) \quad \forall \beta \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \qquad \beta \circ \widehat{w} \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \tag{4.48}$$

Действительно, поскольку функционал $\beta \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H)$ ограничен на компакте $h^\blacksquare \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$, он является ограниченным функционалом на банаховом представлении пространства Смит $\mathbb{C}h^\blacksquare$, то есть выполняется неравенство

$$\forall v \in \mathbb{C}h^\blacksquare \qquad |\beta(v)| \leqslant M \cdot \|v\|_{h^\blacksquare} \tag{4.49}$$

где

$$M = \|\beta\|_{(h^\blacksquare)^\circ} := \max_{v \in h^\blacksquare} |\beta(v)|, \qquad \|v\|_{h^\blacksquare} := \inf\{\lambda > 0 : \ v \in \lambda \cdot h^\blacksquare\}$$

Поэтому из формулы (4.46) получаем:

$$\widehat{w}(s) \in g(s) \cdot h^\blacksquare \quad \Longrightarrow \quad \|\widehat{w}(s)\|_{h^\blacksquare} := \inf\{\lambda > 0 : \ \widehat{w}(s) \in \lambda \cdot h^\blacksquare\} \leqslant g(s) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad |\beta(\widehat{w}(s))| \leqslant M \cdot g(s)$$

То есть функция $\beta \circ \widehat{w}$ подчинена полухарактеру $M \cdot g$:

$$\beta \circ \widehat{w} \in M \cdot g^\blacksquare \tag{4.50}$$

5. Мы доказали (4.48). Теперь покажем, что при фиксированном $w \in (g \boxdot h)^\blacksquare \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G \times H)$ отображение

$$\beta \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \mapsto \rho_{G,H}(w)(\beta) = \beta \circ \widehat{w} \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \tag{4.51}$$

непрерывно, то есть

$$\rho_{G,H}(w) \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \oslash \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.52}$$

Это следует из (4.50): если β_i – направленность, стремящаяся к нулю в $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H)$, то

$$\beta_i \circ \widehat{w} \in M_i \cdot g^\blacksquare, \qquad M_i = \max_{v \in h^\blacksquare} |\beta_i(v)| \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\beta_i \circ \widehat{w} \underset{i \to \infty}{\overset{g^\blacksquare}{\longrightarrow}} 0$$
$$\Downarrow$$
$$\beta_i \circ \widehat{w} \underset{i \to \infty}{\overset{\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)}{\longrightarrow}} 0$$

6. Теперь нужно убедиться, что

$$\rho_{G,H}(w) \in g^\blacksquare \odot h^\blacksquare = g^\blacksquare \oslash (h^\blacksquare)^\circ \subseteq \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \oslash \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(H) \tag{4.53}$$

Или, иными словами,
$$\rho_{G,H}(w)\left((h^{\blacksquare})^{\circ}\right) \subseteq g^{\blacksquare}$$
Это следует из (4.46):
$$\begin{gathered}
\forall s\in G \qquad \widehat{w}(s)\in g(s)\cdot h^{\blacksquare}\\
\Downarrow\\
\forall s\in G \qquad \frac{1}{g(s)}\widehat{w}(s)\in h^{\blacksquare}\\
\Downarrow\\
\forall s\in G \qquad \forall \beta\in (h^{\blacksquare})^{\circ} \qquad 1\geqslant \left|\beta\left(\frac{1}{g(s)}\widehat{w}(s)\right)\right| = \frac{1}{g(s)}|(\beta\circ\widehat{w})(s)| = \frac{1}{g(s)}|(\rho_{G,H}(w)(\beta))(s)|\\
\Downarrow\\
\forall s\in G \qquad \forall \beta\in (h^{\blacksquare})^{\circ} \qquad |\rho_{G,H}(w)(\beta)(s)|\leqslant g(s)\\
\Downarrow\\
\forall \beta\in (h^{\blacksquare})^{\circ} \qquad \rho_{G,H}(w)(\beta)\in g^{\blacksquare}\\
\Downarrow\\
\rho_{G,H}(w)\left((h^{\blacksquare})^{\circ}\right) \subseteq g^{\blacksquare}
\end{gathered}$$

7. Покажем, что отображение
$$w\in (g\boxdot h)^{\blacksquare} \quad \mapsto \quad \rho_{G,H}(w)\in g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare} \tag{4.54}$$
инъективно. Для этого рассмотрим функционалы вида
$$\delta^{s,t}:\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)\to\mathbb{C} \quad \Big| \quad \delta^{s,t}(\varphi)=\varphi(\delta^t)(s) \tag{4.55}$$
Теперь получаем: если $w\neq 0$, то для некоторых $s\in G$, $t\in H$ имеем $w(s,t)\neq 0$, поэтому
$$\delta^{s,t}(\rho_{G,H}(w))=\rho_{G,H}(w)(\delta^t)(s)=(\delta^t\circ\widehat{w})(s)=\delta^t\Big(\widehat{w}(s)\Big)=\widehat{w}(s)(t)=w(s,t)\neq 0$$
и значит, $\rho_{G,H}(w)\neq 0$.

8. Точно так же обнаруживается, что отображение
$$w\in (g\boxdot h)^{\blacksquare} \quad \mapsto \quad \rho_{G,H}(w)\in g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare} \tag{4.56}$$
сюръективно. Для любого $\varphi\in g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}=g^{\blacksquare}\oslash(h^{\blacksquare})^{\circ}\subset\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$ полагаем
$$w(s,t)=\delta^s\circledast\delta^t(\varphi)=\varphi(\delta^t)(s), \qquad s\in G,\ t\in H$$
и тогда, во-первых, w будет голоморфной функцией на $G\times H$, потому что она голоморфна по каждой переменной: при фиксированном $t\in H$ объект $\varphi(\delta^t)$ есть элемент пространства $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, то есть голоморфная функция (экспоненциального типа) на G, поэтому $w(\cdot,t)$ голоморфна по первой переменной, а при фиксированном $s\in G$ отображение $\beta\in\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)\mapsto(\delta^s\circ\varphi)(\beta)$ есть непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$, то есть, в силу стереотипной двойственности, элемент пространства $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$:
$$(\delta^s\circ\varphi)(\beta)=\beta(v), \qquad v\in\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$$
Отсюда
$$w(s,t)=\varphi(\delta^t)(s)=(\delta^s\circ\varphi)(\delta^t)=\delta^t(v)=v(t)$$
то есть, функция $w(s,\cdot)$ голоморфна по второй переменной.

Далее, разворачивая цепочку пункта 6 в обратном направлении, получаем:
$$\begin{gathered}
\varphi\in g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}\\
\Downarrow\\
\varphi\left((h^{\blacksquare})^{\circ}\right)\subseteq g^{\blacksquare}\\
\Downarrow
\end{gathered}$$

$$\forall \beta \in (h^\blacksquare)^\circ \qquad \varphi(\beta) \in g^\blacksquare$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in H \quad \frac{1}{h(t)}\delta^t \in (h^\blacksquare)^\circ \quad \Longrightarrow \quad \varphi\left(\frac{1}{h(t)}\delta^t\right) \in g^\blacksquare$$

$$\Downarrow$$

$$\forall t \in H \qquad \varphi(\delta^t) \in h(t) \cdot g^\blacksquare$$

$$\Downarrow$$

$$\forall s \in G \quad \forall t \in H \qquad |w(s,t)| = |\varphi(\delta^t)(s)| \leqslant h(t) \cdot g(s) = |(g \boxdot h)(s,t)|$$

$$\Downarrow$$

$$w \in (g \boxdot h)^\blacksquare$$

И, наконец, остается заметить, что w является прообразом φ при отображении $w \mapsto \rho_{G,H}(w)$:

$$\forall s,t \qquad \rho_{G,H}(w)(\delta^t)(s) = (\delta^t \circ \widehat{w})(s) = \delta^t(\widehat{w}(s)) = \widehat{w}(s)(t) = w(s,t) = \varphi(\delta^t)(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_{G,H}(w) = \varphi$$

9. Мы получили, что отображение

$$w \in (g \boxdot h)^\blacksquare \quad \mapsto \quad \rho_{G,H}(w) \in g^\blacksquare \odot h^\blacksquare \tag{4.57}$$

биективно, и теперь остается показать, что оно непрерывно в обе стороны. Это следует из того, что $(g \boxdot h)^\blacksquare$ и $g^\blacksquare \odot h^\blacksquare$ – компакты. Поскольку функционалы $\delta^s \circledast \delta^t$ разделяют точки компакта $g^\blacksquare \odot h^\blacksquare$, порождаемая ими (отделимая) топология на $g^\blacksquare \odot h^\blacksquare$ совпадает с топологией компакта $g^\blacksquare \odot h^\blacksquare$: если

$$\delta^s \circledast \delta^t(\varphi_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \delta^s \circledast \delta^t(\varphi)$$

для любых $s \in G$, $t \in H$, то

$$\varphi_i \underset{i\to\infty}{\overset{g^\blacksquare \odot h^\blacksquare}{\longrightarrow}} \varphi$$

Отсюда получаем, что отображение $w \mapsto \rho_{G,H}(w)$ непрерывно в прямую сторону:

$$w_i \underset{i\to\infty}{\overset{(g \boxdot h)^\blacksquare}{\longrightarrow}} w$$

$$\Downarrow$$

$$\forall (s,t) \in G \times H \qquad \delta^s \circledast \delta^t(\rho_{G,H}(w_i)) = w_i(s,t) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} w(s,t) = \delta^s \circledast \delta^t(\rho_{G,H}(w))$$

$$\Downarrow$$

$$\rho_{G,H}(w_i) \underset{i\to\infty}{\overset{g^\blacksquare \odot h^\blacksquare}{\longrightarrow}} \rho_{G,H}(w)$$

Итак, операция $w \mapsto \rho_{G,H}(w)$ есть непрерывное биективное отображение компакта $(g \boxdot h)^\blacksquare$ в компакт $g^\blacksquare \odot h^\blacksquare$. Значит, $\rho_{G,H}$ есть гомеоморфизм между $(g \boxdot h)^\blacksquare$ и $g^\blacksquare \odot h^\blacksquare$. $\square$

Доказательство теоремы 4.11. Отметим с самого начала, что если f – полухарактер на $G \times H$, то функции

$$g(s) = f(s, 1_H), \qquad h(t) = f(1_G, t), \qquad s \in G,\ t \in H$$

тоже должны быть полухарактерами (как ограничения f на подгруппы), а функция $g \boxdot h$ является полухарактером на $G \times H$, мажорирующим f:

$$f \leqslant g \boxdot h \tag{4.58}$$

Действительно,

$$f(s,t) = f((s, 1_H) \cdot (1_G, t)) \leqslant f(s, 1_H) \cdot f(1_G, t) = g(s) \cdot h(t) = (g \boxdot h)(s,t)$$

Отсюда следует, что всякая функция $w\in\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)$ содержится в некотором компакте вида $(g\boxdot h)^{\blacksquare}$ (поскольку w всегда содержится в компакте вида $f^{\blacksquare}$). При этом объект $\rho_{G,H}(w)$ является элементом множества $g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}$, то есть элементом содержащего его пространства $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$.

Таким образом, формулы (4.42) и (4.41) корректно определяют отображение

$$w\in\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)\quad\mapsto\quad\rho_{G,H}(w)\in\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)\tag{4.59}$$

и нам нужно лишь проверить его биективность и непрерывность в обе стороны.

1. Инъективность этого отображения следует из его инъективности на компактах $(g\boxdot h)^{\blacksquare}$ (и того факта, что компакты $(g\boxdot h)^{\blacksquare}$ и $g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}$ инъективно вкладываются в пространства $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)$ и $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$).

2. Сюръективность этого отображения следует из того, что оно сюръективно отображает компакты $(g\boxdot h)^{\blacksquare}$ на компакты $g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}$ (и из того факта, что компакты $g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}$ покрывают все пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$).

3. Непрерывность следует из того, что оно непрерывно отображает всякий компакт $(g\boxdot h)^{\blacksquare}$ в компакт $g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}$, и поэтому в пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$. Это значит, оно непрерывно на каждом компакте K в пространстве Браунера $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)$, и поэтому непрерывно на всем пространстве $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)$.

4. Непрерывность в обратную сторону доказывается так же: поскольку обратное отображение непрерывно переводит всякий компакт $g^{\blacksquare}\odot h^{\blacksquare}$ в компакт $(g\boxdot h)^{\blacksquare}$, оно непрерывно на каждом компакте в пространстве Браунера $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$. Значит, оно непрерывно на всем пространстве $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)$.

5. Мы доказали, что отображение, определенное формулами (4.41) - (4.42) является изоморфизмом стереотипных пространств: $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)\cong\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\oslash\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)=\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\odot\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$ (и значит справедливы тождества (4.43)). Покажем, что это отображение удовлетворяет тождеству (4.40). Если $u\in\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, $v\in\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$, то для отображения $\widehat{u\boxdot v}:G\to\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$, определенного формулой (4.42), получаем логическую цепочку:

$$\begin{gathered}
\widehat{u\boxdot v}(s)(t)=(u\boxdot v)(s,t)=u(s)\cdot v(t)\\
\Downarrow\\
\widehat{u\boxdot v}(s)=u(s)\cdot v\\
\Downarrow\\
\forall\beta\in\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)\qquad\beta(\widehat{u\boxdot v}(s))=u(s)\cdot\beta(v)\\
\Downarrow\\
\forall\beta\in\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(H)\qquad\rho_{G,H}(u\boxdot v)(\beta)=\beta\circ\widehat{u\boxdot v}=\beta(v)\cdot u=(1.2)=(u\odot v)(\beta)\\
\Downarrow\\
\rho_{G,H}(u\boxdot v)=u\odot v
\end{gathered}$$

Теперь остается заметить, что, поскольку элементы вида $u\circledast v$ порождают плотное подпространство в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\circledast\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$, в силу доказанной уже ядерности пространств $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}$ соответствующие им элементы вида $u\odot v$ должны порождать плотное подпространство в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\odot\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$, а элементы $u\boxdot v$ – плотное подпространство в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)$. Отсюда следует, что свойство (4.40) однозначно определяет отображение $\rho_{G,H}$. $\square$

(h) Структура алгебр Хопфа на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$

В § 3(b) мы говорили о стандартном приеме, с помощью которого доказывается, что функциональные алгебры данного класса на группах являются алгебрами Хопфа – достаточным условием для этого является естественный изоморфизм между функциональной алгеброй на декартовом произведении групп $\times$ и тензорным произведением функциональных алгебр. Теорема 4.11, устанавливающая естественный изоморфизм

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G\times H)\overset{\rho_{G,H}}{\cong}\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\odot\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(H)$$

позволяет теперь доказать то же самое для алгебр $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$:

Теорема 4.12. *Для всякой компактно порожденной группы Штейна G*

- *пространство $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ голоморфных функций экспоненциального типа на G является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера относительно алгебраических операций, определенных формулами, аналогичными* (3.3)-(3.7)*;*
- *его сопряженное пространство $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше относительно сопряженных алгебраических операций.*

§5 Оболочки Аренса-Майкла и голоморфная рефлексивность

(a) Субмультипликативные полунормы и алгебры Аренса-Майкла

Полунорма $p : A \to \mathbb{R}_+$ на алгебре A называется *субмультипликативной*, если она удовлетворяет условию

$$p(u \cdot v) \leqslant p(u) \cdot p(v), \qquad u, v \in A$$

Это эквивалентно тому, что единичный шар этой полунормы

$$U = \{u \in A : \ p(u) \leqslant 1\}$$

удовлетворяет условию

$$U \cdot U \subseteq U$$

(такие множества в A также называются *субмультипликативными*).

Топологическая алгебра A называется *алгеброй Аренса-Майкла*, если она полна (как топологическое векторное пространство) и удовлетворяет следующим равносильным условиям:

(i) топология A задается системой субмультипликативных полунорм;

(ii) A обладает локальной базой субмультипликативных замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей нуля.

Пример 5.1. Полунормы (3.20), задающие топологию на $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$, субмультипликативны:

$$||u||_N = \sum_{|n| \leqslant N} |u(n)|, \qquad N \in \mathbb{N},$$

и поэтому $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ – алгебра Аренса-Майкла.

Доказательство. Действительно,

$$\|u \cdot v\|_N = \sum_{|n| \leqslant N} |(u \cdot v)(n)| = (3.19) = \sum_{|n| \leqslant N} |u(n) \cdot v(n)| \leqslant \left(\sum_{|n| \leqslant N} |u(n)| \right) \cdot \left(\sum_{|n| \leqslant N} |v(n)| \right) = \|u\|_N \cdot \|v\|_N$$

□

Пример 5.2. Полунормы (3.47), задающие топологию на $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, субмультипликативны:

$$||u||_C = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n| \cdot C^{|n|}, \qquad C \geqslant 1,$$

и поэтому $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ – алгебра Аренса-Майкла.

Доказательство. Действительно,

$$||u \cdot v||_C = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(u \cdot v)_n| \cdot C^{|n|} = (3.46) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} u_i \cdot v_{n-i} \right| \cdot C^{|n|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |u_i| \cdot |v_{n-i}| \cdot C^{|i|} \cdot C^{|n-i|} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| \cdot C^{|k|} \right) \cdot \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |u_l| \cdot C^{|l|} \right) = ||u||_C \cdot ||v||_C$$

□

Пример 5.3. Полунормы (3.72), задающие топологию на $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, субмультипликативны:

$$||u||_C = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \cdot C^n, \qquad C \geqslant 0,$$

и поэтому $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ – алгебра Аренса-Майкла.

Доказательство. Действительно,

$$||u \cdot v||_C = \sum_{n=0}^{\infty} |(u \cdot v)_n| \cdot C^n = (3.71) = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{i=0}^{n} u_i \cdot v_{n-i} \right| \cdot C^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} |u_i| \cdot |v_{n-i}| \cdot C^n =$$
$$= \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k| \cdot C^k \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |u_l| \cdot C^l \right) = ||u||_C \cdot ||v||_C$$

□

Из следующих трех предложений первые два очевидны, а третье следует из приводимой ниже теоремы А. Ю. Пирковского 5.1:

Предложение 5.1. *Алгебра $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на комплексном многообразии M является алгеброй Аренса-Майкла.*

Предложение 5.2. *Алгебра $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ экспоненциальных функционалов на любой группе Штейна является алгеброй Аренса-Майкла.*

Предложение 5.3. *Алгебра $\mathcal{R}(M)$ многочленов на комплексном алгебраическом многообразии M, снабженная сильнейшей локально выпуклой топологией является алгеброй Аренса-Майкла, если и только если многообразие M конечно.*

(b) Оболочки Аренса-Майкла

Оболочкой Аренса-Майкла топологической алгебры A называется произвольный (непрерывный) гомоморфизм $\pi : A \to B$ алгебры A в какую-нибудь алгебру Аренса-Майкла B, обладающий тем свойством, что для любого (непрерывного) гомоморфизма $\rho : A \to C$ алгебры A в какую-нибудь алгебру Аренса-Майкла C найдется единственный (непрерывный) гомоморфизм $\sigma : B \to C$, замыкающий диаграмму:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & B \arrow[dl, dashed, "\sigma"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Из этого определения ясно, что если $\pi : A \to B$ и $\rho : A \to C$ – две оболочки Аренса-Майкла алгебры A, то возникающий гомоморфизм $\sigma : B \to C$ (из-за своей единственности) будет изоморфизмом (топологических алгебр). Поэтому оболочка Аренса-Майкла алгебры A определяется однозначно с точностью до изоморфизма, и, как следствие, для нее можно ввести специальное обозначение:

$$\heartsuit_A : A \to A^{\heartsuit}$$

Его нужно понимать так: если нам дан какой-то гомоморфизм $\varphi : A \to B$, то запись $\varphi = \heartsuit_A$ означает, что $\varphi : A \to B$ является оболочкой Аренса-Майкла алгебры A; если же нам дана алгебра B, то запись $B = A^{\heartsuit}$ означает, что существует гомоморфизм $\varphi : A \to B$, являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры A — в этом случае алгебру B также принято называть *оболочкой Аренса-Майкла алгебры A*.

Предложение 5.4. *Топологическая алгебра B является оболочкой Аренса-Майкла для топологической алгебры A, если и только если*

(i) *B – алгебра Аренса-Майкла,*

(ii) *существует непрерывный гомоморфизм топологических алгебр $\pi : A \to B$ такой, что*

- *(a)* *образ $\pi(A)$ алгебры A под действием π плотен в B,*
- *(b)* *для любой непрерывной субмультипликативной полунормы $p : A \to \mathbb{R}_+$ найдется непрерывная субмультипликативная полунорма $\widetilde{p} : B \to \mathbb{R}_+$, такая что полунорма $\widetilde{p} \circ \pi : A \to \mathbb{R}_+$ мажорирует полунорму p:*

$$p(a) \leqslant \widetilde{p}(\pi(a)), \qquad a \in A$$

Оболочку Аренса-Майкла можно построить конструктивно: всякой субмультипликативной абсолютно выпуклой окрестности нуля U в A нужно поставить в соответствие замкнутый идеал $\mathsf{Ker}\, U$ в A, определяемый равенством

$$\mathsf{Ker}\, U = \bigcap_{\varepsilon>0} \varepsilon \cdot U$$

и фактор-алгебру

$$A/\,\mathsf{Ker}\, U$$

наделенную топологией нормированного пространства с единичным шаром $U + \mathsf{Ker}\, U$. Тогда пополнение $(A/\,\mathsf{Ker}\, U)^{\blacktriangledown}$ будет банаховой алгеброй. В соответствии с формулой (0.3), такую алгебру можно обозначать A/U:

$$A/U := (A/\,\mathsf{Ker}\, U)^{\blacktriangledown}$$

Семейство таких алгебр (при разных U) будет проективной системой. Оболочка Аренса-Майкла $A^{\heartsuit}$ будет в точности проективным пределом этой системы:

$$A^{\heartsuit} = \underset{\substack{U\text{ – субмультипликативная}\\ \text{окрестность нуля в } A}}{\varprojlim} A/U. \tag{5.1}$$

Следующие утверждения показывают, что операция взятия оболочки Аренса-Майкла коммутирует с операциями перехода к прямой сумме и фактор-алгебре.

Предложение 5.5. *Оболочка Аренса-Майкла прямой суммы $A_1 \oplus ... \oplus A_n$ конечного набора топологических алгебр $A_1, ..., A_n$ совпадает с прямой суммой оболочек Аренса-Майкла этих алгебр:*

$$(A_1 \oplus ... \oplus A_n)^{\heartsuit} \cong A_1^{\heartsuit} \oplus ... \oplus A_n^{\heartsuit}$$

Предложение 5.6. *Пусть $\pi : A \to A^{\heartsuit}$ – оболочка Аренса-Майкла алгебры A, и пусть I – замкнутый идеал в A. Тогда оболочка Аренса-Майкла фактор-алгебры A/I совпадает с пополнением фактор-алгебры $A^{\heartsuit}/\overline{\pi(I)}$ по замыканию $\overline{\pi(I)}$ в $A^{\heartsuit}$ образа идеала I под действием отображения π:*

$$(A/I)^{\heartsuit} \cong \left(A^{\heartsuit}/\overline{\pi(I)}\right)^{\blacktriangledown}$$

Важный для нас пример оболочки Аренса-Майкла был построен А.Ю.Пирковским:

Теорема 5.1 (А.Ю.Пирковский, [26])**.** *Оболочка Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{R}(M)$ многочленов на аффинном алгебраическом многообразии M совпадает с алгеброй $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на M:*

$$\Big(\mathcal{R}(M)\Big)^{\heartsuit} \cong \mathcal{O}(M) \tag{5.2}$$

(c) Отображение $\flat_G^{\star} : \mathcal{O}^{\star}(G) \to \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$ – оболочка Аренса-Майкла

Теорема 5.2. *Для любой группы Штейна G отображение*

$$\flat_G^{\star} : \mathcal{O}^{\star}(G) \to \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$$

является оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^{\star}(G)$:

$$\Big(\mathcal{O}^{\star}(G)\Big)^{\heartsuit} \cong \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G) \tag{5.3}$$

Доказательство. Из представления (4.17) следует, что это пространство является проективным пределом своих банаховых фактор-алгебр:

$$\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G) = (4.17) = \left(\underset{\substack{D\text{ – дуально}\\ \text{субмультипликативный}\\ \text{прямоугольник в } \mathcal{O}(G)}}{\varinjlim} \mathbb{C}D \right)^{\star} = \underset{\substack{D\text{ – дуально}\\ \text{субмультипликативный}\\ \text{прямоугольник в } \mathcal{O}(G)}}{\varprojlim} (\mathbb{C}D)^{\star} = (0.4) = \underset{\substack{D\text{ – дуально}\\ \text{субмультипликативный}\\ \text{прямоугольник в } \mathcal{O}(G)}}{\varprojlim} \mathcal{O}^{\star}(G)/D^{\circ} =$$

$$= \underset{\substack{\varDelta\text{ – субмультипликативный}\\ \text{ромб в } \mathcal{O}^{\star}(G)}}{\varprojlim} \mathcal{O}^{\star}(G)/\varDelta = (\text{теорема 4.2(a)}) = \underset{\substack{U\text{ – субмультипликативная}\\ \text{окрестность нуля в } \mathcal{O}^{\star}(G)}}{\varprojlim} \mathcal{O}^{\star}(G)/U = (5.1) = \Big(\mathcal{O}^{\star}(G)\Big)^{\heartsuit}$$

$\square$

(d) Отображение $\flat_G : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}(G)$ – оболочка Аренса-Майкла для групп с алгебраической связной компонентой единицы

Теорема 5.3. *Пусть G – компактно порожденная группа Штейна, связная компонента единицы которой G_e является алгебраической группой. Тогда отображение*

$$\flat_G : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}(G)$$

является оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$:

$$\Big(\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\Big)^{\heartsuit} \cong \mathcal{O}(G) \tag{5.4}$$

Это утверждение мы докажем в несколько этапов.

1. Пусть сначала G – дискретная группа. Напомним, что в (0.28) мы условились обозначать символом 1_x характеристические функции одноточечных подмножеств $\{x\}$ в G:

$$1_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases} \tag{5.5}$$

(из-за дискретности G, функцию 1_x можно считать элементом обеих алгебр $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$).

Лемма 5.1. *Функции $\{1_x;\ x \in G\}$ образуют базис в топологических векторных пространствах $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$: для всякой функции $u \in \mathcal{O}(G)$ ($u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$) справедливо равенство*

$$u = \sum_{x \in G} u(x) \cdot 1_x \tag{5.6}$$

где ряд справа сходится в $\mathcal{O}(G)$ ($\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$), а его коэффициенты непрерывно зависят от $u \in \mathcal{O}(G)$ ($u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$).

Доказательство. Для пространства $\mathcal{O}(G)$ это очевидно, потому что в случае дискретной группы G оно совпадает с пространством $\mathbb{C}^G$ всех функций на G. Докажем это для $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$: если $u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, то, подобрав мажорирующий полухарактер $f : G \to \mathbb{R}_+$,

$$|u(x)| \leqslant f(x), \qquad x \in G$$

мы получим, что частичные суммы ряда (5.6) содержатся в прямоугольнике $f^{\blacksquare}$, поэтому ряд (5.6) сходится (не только в $\mathcal{O}(G)$, но и) в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$. С другой стороны, каждый коэффициент $u(x)$ непрерывно зависит от u, если u бегает по прямоугольнику вида $f^{\blacksquare}$. По определению топологии в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, это означает, что $u(x)$ непрерывно зависит от u, когда u бегает по $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$. $\square$

Лемма 5.2. *Если G – дискретная конечно порожденная группа, то для всякой непрерывной полунормы $q : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathbb{R}_+$ и любого полухарактера $f : G \to [1; +\infty)$ числовое семейство $\{f(x) \cdot q(1_x);\ x \in G\}$ суммируемо:*

$$\sum_{x \in G} f(x) \cdot q(1_x) < \infty$$

Доказательство. Пусть T – абсолютно выпуклый компакт в $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$, соответствующий полунорме q:

$$q(u) = \sup_{\alpha \in T} |\alpha(u)|$$

Всякий прямоугольник $f^{\blacksquare}$ является компактом в $\mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G)$, поэтому

$$\infty > \sup_{u \in f^{\blacksquare}} \sup_{\alpha \in T} |\alpha(u)| = (5.6) = \sup_{u \in f^{\blacksquare}} \sup_{\alpha \in T} \Big|\alpha\Big(\sum_{x \in G} u(x) \cdot 1_x\Big)\Big| = \sup_{u \in f^{\blacksquare}} \sup_{\alpha \in T} \Big|\sum_{x \in G} u(x) \cdot \alpha(1_x)\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\alpha \in T} \Big|\sum_{x \in G} \underbrace{\frac{f(x) \cdot \overline{\alpha(1_x)}}{|\alpha(1_x)|}}_{\substack{\uparrow \\ \text{одно из значений} \\ u \in f^{\blacksquare}}} \cdot \alpha(1_x)\Big| = \sup_{\alpha \in T} \sum_{x \in G} f(x) \cdot |\alpha(1_x)| \geqslant \sup_{\alpha \in T} \sup_{x \in G} f(x) \cdot |\alpha(1_x)| =$$

$$= \sup_{x\in G} f(x)\cdot \sup_{\alpha\in T}|\alpha(1_x)| = \sup_{x\in G} f(x)\cdot q(1_x)$$

Мы получили, что для всякого полухарактера $f : G \to [1; +\infty)$

$$\sup_{x\in G} f(x)\cdot q(1_x) < \infty$$

Если теперь взять какое-нибудь конечное множество K, порождающее G,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K^n = G$$

и определить полухарактер $g : G \to [1; +\infty)$ формулой

$$g(x) = R^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \in K^n \setminus K^{n-1}$$

где R – какое-нибудь число, большее мощности множества K:

$$R > \mathsf{card}\, K,$$

то, поскольку произведение $g\cdot f$ также будет полухарактером, получаем:

$$\sup_{x\in G}\Big[g(x)\cdot f(x)\cdot q(1_x)\Big] < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$\exists C > 0 \qquad \forall x \in G \qquad f(x)\cdot q(1_x) \leqslant \frac{C}{g(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{x\in G} f(x)\cdot q(1_x) \leqslant \sum_{x\in G}\frac{C}{g(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in K^n\setminus K^{n-1}}\frac{C}{g(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{x\in K^n\setminus K^{n-1}}\frac{C}{R^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\cdot \mathsf{card}(K^n)}{R^n} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C\cdot(\mathsf{card}\, K)^n}{R^n} = C\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathsf{card}\, K}{R}\right)^n < \infty$$

$\square$

Если $q : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная полунорма на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, то ее *носителем* условимся называть множество

$$\mathsf{supp}(q) = \{x \in G :\ q(1_x) \neq 0\} \tag{5.7}$$

Лемма 5.3. *Если G – дискретная конечно порожденная группа, то для всякой субмультипликативной непрерывной полунормы $q : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathbb{R}_+$*

(a) *носитель $\mathsf{supp}(q)$ является конечным множеством:*

$$\mathsf{card}\,\mathsf{supp}(q) < \infty$$

(b) *для любой точки $x \in \mathsf{supp}(q)$ значение полунормы q на функции 1_x не меньше единицы:*

$$q(1_x) \geqslant 1$$

Доказательство. Сначала докажем (b). При $x \in \mathsf{supp}(q)$, то есть при $q(1_x) > 0$, получаем логическую цепочку:

$$1_x = 1_x^2 \quad\Longrightarrow\quad q(1_x) = q(1_x^2) \leqslant q(1_x)^2 \quad\Longrightarrow\quad 1 \leqslant q(1_x)$$

Теперь (a). Поскольку тождественная единица $f(x) = 1$ является полухарактером на G, по лемме 5.2 числовое семейство $\{q(1_x);\ x \in G\}$ должно быть суммируемо:

$$\sum_{x\in G} q(1_x) < \infty$$

С другой стороны, по уже доказанному условию (b), все ненулевые слагаемые в этом ряду оцениваются снизу единицей. Значит, их должно быть конечное число. $\square$

2. Перейдем теперь к случаю, когда G – компактно порожденная группа Штейна, у которой связная компонента единицы G_e является алгебраической группой. Пусть $\mathcal{LC}_{\mathsf{exp}}(G)$ обозначает подалгебру в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, состоящую из локально постоянных функций:

$$u \in \mathcal{LC}_{\mathsf{exp}}(G) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \quad \& \quad \Big(\forall x \in G \quad \exists \,\text{окрестность}\, U \ni x \quad \forall y \in U \quad u(x) = u(y)\Big)$$

Лемма 5.4. *Пусть $\pi : G \to G/G_e$ – фактор-отображение. Для любой функции $v \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G/G_e)$ композиция $v \circ \pi$ является локально постоянной функцией экспоненциального типа на G, и отображение*

$$v \mapsto v \circ \pi$$

устанавливает изоморфизм топологических алгебр

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G/G_e) \cong \mathcal{LC}_{\mathsf{exp}}(G)$$

Пусть для всякого смежного класса $K \in G/G_e$ и любой функции $u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ символ u_K обозначает функцию, совпадающую с u на множестве $K \subset G$ и равную нулю вне его:

$$u_K(x) = \begin{cases} u(x), & x \in K \\ 0, & x \notin K \end{cases} \tag{5.8}$$

Следующее утверждение доказывается так же, как лемма 5.1:

Лемма 5.5. *Для всякого смежного класса $K \in G/G_e$ и любой функции $u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$*

(a) функция u_K принадлежит алгебре $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$,

(b) отображение $u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \mapsto u_K \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ непрерывно, и

(c) ряд $\sum_{K \in G/G_e} u_K$ сходится в пространстве $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ к функции u:

$$u = \sum_{K \in G/G_e} u_K$$

Для всякого смежного класса $K \in G/G_e$ рассмотрим оператор проектирования

$$P_K : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G), \qquad P_K(u) = u_K$$

и пусть $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K)$ обозначает его образ в пространстве $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K) = P_K\Big(\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)\Big)$$

Ясно, что $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K)$ является замкнутым подпространством в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, поэтому $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K)$ можно наделить топологией, индуцированной из $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ (здесь это будет то же самое, что топология непосредственного подпространства в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$), и относительно этой топологии $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K)$ будет пространством Браунера.

Пусть кроме того, $\mathcal{O}(K)$, как обычно, обозначает алгебру голоморфных функций на комплексном многообразии K.

Лемма 5.6. *Вложение $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K) \subseteq \mathcal{O}(K)$ является оболочкой Аренса-Майкла:*

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K)^{\heartsuit} = \mathcal{O}(K)$$

Доказательство. Сначала нужно заметить, что достаточно рассмотреть случай $K = G_e$, потому что подходящим сдвигом на группе вложение $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K) \subseteq \mathcal{O}(K)$ превращается во вложение $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G_e) \subseteq \mathcal{O}(G_e)$. Для него утверждение леммы становится следствием теоремы Пирковского 5.1: по условию, G_e является алгебраической группой, поэтому можно рассмотреть алгебру $\mathcal{R}(G_e)$ многочленов на G_e. Далее ход мыслей иллюстрируется следующей диаграммой (в которой горизонтальные стрелки обозначают вложения):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}(G_e) \arrow[r] \arrow[dr, "\rho_{\mathcal{R}}"'] & \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G_e) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & \mathcal{O}(G_e) \arrow[dl, dashed, "\widetilde{\rho}"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

Если $\rho : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G_e) \to B$ – произвольный морфизм в алгебру Аренса-Майкла B, то ему соответствует морфизм $\rho_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}(G_e) \to B$ (ограничение на подалгебру $\mathcal{R}(G_e)$), который по теореме Пирковского можно продолжить до морфизма $\widetilde{\rho} : \mathcal{O}(G_e) \to B$. Поскольку $\mathcal{R}(G_e)$ плотно в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G_e)$ в топологии $\mathcal{O}(G_e)$, морфизм $\widetilde{\rho}$ продолжает морфизм ρ. А поскольку $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G_e)$ плотно в $\mathcal{O}(G_e)$, такое продолжение единственно. $\square$

Доказательство теоремы 5.3. Пусть G – произвольная компактно порожденная группа Штейна с алгебраической связной компонентой единицы и $p : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathbb{R}_+$ – субмультипликативная непрерывная полунорма. Ее ограничение $p|_{\mathcal{L}C_{\mathsf{exp}}(G)}$ на подалгебру $\mathcal{L}C_{\mathsf{exp}}(G)$ определяет по лемме 5.4 непрерывную полунорму q на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G/G_e)$,

$$q(v) = p(v \circ \pi),$$

причем q будет субмультипликативна, как и p. Значит, по лемме 5.3, носитель q должен быть конечен:

$$\mathsf{card}\,\mathsf{supp}(q) < \infty$$

Применительно к полунорме p это означает, что существует лишь конечный набор классов смежности $\{K_1, ..., K_n\} \subseteq G/G_e$, для которых

$$p(1_{K_i}) \neq 0$$

в то время как для всех остальных $K \in G/G_e$, $K \notin \{K_1, ..., K_n\}$,

$$p(1_K) = 0 \tag{5.9}$$

(здесь 1_K обозначает результат применения операции (5.8) к тождественной единице $u(x) = 1$).

Как следствие, для любой функции $u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и любого класса смежности $K \notin \{K_1, ..., K_n\}$ имеем

$$p(u_K) = 0 \tag{5.10}$$

(потому что $p(u_K) = p(1_K \cdot u_K) \leqslant p(1_K) \cdot p(u_K) = 0 \cdot p(u_K) = 0$).

Обозначим теперь через P и S операторы проектирования на подпространства, состоящие соответственно из функций, равных нулю вне и внутри $K_1 \cup ... \cup K_n$:

$$P(u)(x) = \begin{Bmatrix} u(x), & x \in K_1 \cup ... \cup K_n \\ 0, & x \notin K_1 \cup ... \cup K_n \end{Bmatrix} = u_{K_1} + ... + u_{K_n}$$

$$S(u)(x) = \begin{Bmatrix} u(x), & x \notin K_1 \cup ... \cup K_n \\ 0, & x \in K_1 \cup ... \cup K_n \end{Bmatrix} = \sum_{K \notin \{K_1,...,K_n\}} u_K$$

(последний ряд сходятся в $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, в силу леммы 5.5). Из (5.10) следует

$$\forall u \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \qquad p(S(u)) = p\left(\sum_{K \notin \{K_1,...,K_n\}} u_K\right) \leqslant \sum_{K \notin \{K_1,...,K_n\}} p(u_K) = (5.10) = \sum_{K \notin \{K_1,...,K_n\}} 0 = 0,$$

что в свою очередь влечет равенство

$$p = p \circ P \tag{5.11}$$

(с одной стороны, $p(u) = p(P(u) + S(u)) \leqslant p(P(u)) + p(S(u)) = p(P(u))$, а с другой, $p(P(u)) = p(u - S(u)) \leqslant p(u) + p(S(u)) = p(u)$).

Обозначим теперь через p_i (субмультипликативные) полунормы на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K_i)$, индуцированные p,

$$p_i(v) = p(v), \quad v \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K_i)$$

По лемме 5.6 и предложению 5.4, эти полунормы мажорируются некоторыми полунормами $\widetilde{p_i}$ на $\mathcal{O}(K_i)$:

$$p_i(v) \leqslant \widetilde{p_i}(v), \quad v \in \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(K_i)$$

Теперь из (5.11) получается оценка:

$$p(u) = p\Big(\sum_{i=1}^n u_{K_i} + \sum_{K \notin \{K_1,...,K_n\}} u_K\Big) = (5.11) = p\Big(\sum_{i=1}^n u_{K_i}\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n p_i(u_{K_i}) \leqslant \sum_{i=1}^n \widetilde{p_i}(u_{K_i})$$

Таким образом, наша исходная полунорма p на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ мажорируется полунормой $\sum_{i=1}^n \widetilde{p_i}$ на $\mathcal{O}(G)$. Опять применяя предложение 5.4, мы получаем, что вложение $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \subseteq \mathcal{O}(G)$ является оболочкой Аренса-Майкла. $\square$

(e) Голоморфная рефлексивность

Итогом предыдущих рассмотрений можно объявить следующее. Для компактно порожденной группы Штейна G с алгебраической компонентой единицы две алгебры, из тех, что мы рассматривали выше, а именно, $\mathcal{O}^\star(G)$ и $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, обладают следующими любопытными свойствами: всякая такая алгебра H, будучи жесткой стереотипной алгеброй Хопфа, имеет оболочку Аренса-Майкла $H^\heartsuit$, также обладающую структурой жесткой стереотипной алгебры Хопфа такой, что:

(i) естественный гомоморфизм алгебр
$$\heartsuit_H : H \to H^\heartsuit$$
является гомоморфизмом жестких алгебр Хопфа, и

(ii) сопряженное отображение
$$(\heartsuit_H)^\star : (H^\heartsuit)^\star \to H^\star$$
является оболочкой Аренса-Майкла алгебры $(H^\heartsuit)^\star$:
$$(\heartsuit_H)^\star = \heartsuit_{(H^\heartsuit)^\star}$$

Заметим в связи с этим вот что:

Предложение 5.7. *Для произвольной жесткой стереотипной алгебры Хопфа H структура жесткой алгебры Хопфа на ее оболочке Аренса-Майкла $H^\heartsuit$, удовлетворяющая условиям (i) и (ii), если она существует, определяется однозначно.*

Доказательство. Заметим вначале, что из (i) и (ii) сразу следует условие

(iii) отображения $\heartsuit_H$ и $(\heartsuit_H)^\star$ являются биморфизмами стеретипных пространств (то есть инъективны и имеют плотный образ в области значений).

Действительно, отображения $\heartsuit_H : H \to H^\heartsuit$ и $(\heartsuit_H)^\star : (H^\heartsuit)^\star \to H^\star$ являются эпиморфизмами (имеют плотные образы), потому что это оболочки Аренса-Майкла. Поскольку они сопряжены друг другу, они являются и мономорфизмами (то есть инъективны).

Отсюда следует все остальное. Прежде всего, умножение и единица на $H^\heartsuit$ определяются однозначно условием, что $\heartsuit_H : H \to H^\heartsuit$ – оболочка Аренса-Майкла алгебры H. Рассмотрим теперь сопряженное отображение $(\heartsuit_H)^\star : (H^\heartsuit)^\star \to H^\star$. Как и $\heartsuit_H$, оно должно быть гомоморфизмом алгебр Хопфа. Значит, оно является гомоморфизмом алгебр, причем инъективным, в силу доказанного свойства (iii). Отсюда следует, что умножение и единица на $(H^\heartsuit)^\star$ также определяются однозначно, поскольку они индуцируются из $H^\star$.

Таким образом, условия (i) и (ii) накладывают жесткие условия на умножение, единицу, коумножени и коединицу в $H^\heartsuit$, позволяя определить на этом пространстве не более одной структуры биалгебры. С другой стороны, мы знаем, что антипод у биалгебры, если он существует, определяется однозначно, поэтому структура алгебры Хопфа на $H^\heartsuit$ также единственна. $\square$

Условия (i) и (ii) удобно изображать в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & H^\heartsuit \arrow[d, mapsto, "\star"] \\ H^\star \arrow[u, mapsto, "\star"] & (H^\heartsuit)^\star \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"'] \end{tikzcd} \tag{5.12}$$

в которую мы предлагаем вкладывать вот какой смысл: во-первых, в углах квадрата стоят жесткие стереотипные алгебры Хопфа, причем горизонтальные стрелки (операции Аренса-Майкла $\heartsuit$) являются их гомоморфизмами, и, во-вторых, чередование операций $\heartsuit$ и $\star$ (с какого места ни начинай) на четвертом шаге возвращает к исходной алгебре Хопфа (конечно, с точностью до изоморфизма функторов).

Жесткие стереотипные алгебры Хопфа H, удовлетворяющие условиям (i) и (ii), мы будем называть *голоморфно рефлексивными*, а диаграмму (5.12) для таких алгебр – *диаграммой рефлексивности.* Смысл термина "рефлексивность" в этом случае состоит в том, что если однократное последовательное применение операций $\heartsuit$ и $\star$ обозначить каким-нибудь символом, например $\widehat{\ }$,

$$\widehat{H} := (H^\heartsuit)^\star$$

и называть такой объект *алгеброй Хопфа, голоморфно двойственной к H*, то H будет естественно изоморфна своей второй двойственной в этом смысле алгебре Хопфа:

$$H \cong \widehat{\widehat{H}} \tag{5.13}$$

Это можно считать следствием предложения (5.7): поскольку для голоморфно рефлексивных алгебр Хопфа переход $H \mapsto H^{\heartsuit}$ однозначно определяет структуру алгебры Хопфа на $H^{\heartsuit}$, изоморфизм алгебр

$$((H^{\heartsuit})^{\star})^{\heartsuit} \cong H^{\star},$$

постулируемый в аксиоме (ii), автоматически должен быть изоморфизмом алгебр Хопфа. Переходя к сопряженным алгебрам Хопфа, мы как раз получаем (5.13).

Из теорем 5.2 и 5.3 следует:

Теорема 5.4. *Если G – компактно порожденная группа Штейна с алгебраической связной компонентой единицы, то алгебры $\mathcal{O}^{\star}(G)$ и $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ голоморфно рефлексивны, а диаграмма рефлексивности для них принимает вид:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{\star}(G) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit", "(5.3)"'] & \mathcal{O}^{\star}_{\mathsf{exp}}(G) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{O}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"', "(5.4)"]
\end{tikzcd} \tag{5.14}$$

(цифры под горизонтальными стрелками – ссылки на формулы в тексте).

Пример 5.4. Для группы $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ диаграмма рефлексивности (5.14) принимает вид

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{\star}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit", "(4.28)"'] & \mathcal{R}^{\star}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{O}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) \arrow[u, mapsto, "\star"] & \mathcal{R}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) \arrow[l, mapsto, "\heartsuit"', "(5.2)"]
\end{tikzcd} \tag{5.15}$$

§ 6 Голоморфная рефлексивность, как обобщение двойственности Понтрягина

(a) Двойственность Понтрягина для абелевых компактно порожденных групп Штейна

Комплексная окружность $\mathbb{C}^{\times}$, о которой мы говорили в § 3(a), занимает среди всех абелевых компактно порожденных групп Штейна то же место, что и обычная «вещественная» окружность $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ среди всех локально компактных абелевых групп (или среди компактно порожденных вещественных абелевых групп Ли), потому что для абелевых компактно порожденных групп Штейна справедлив следующий вариант теории двойственности Понтрягина.

Пусть G – абелева компактно порожденная группа Штейна. Назовем *голоморфным характером* на G произвольный голоморфный гомоморфизм группы G в комплексную окружность:

$$\chi \in G^{\bullet} \iff \chi : G \to \mathbb{C}^{\times}$$

Множество $G^{\bullet}$ всех голоморфных характеров на G является топологической группой относительно поточечной операции умножения и топологии равномерной сходимости на компактах. Следующая теорема показывает, что операция $G \mapsto G^{\bullet}$ аналогична понтрягинской операции перехода к двойственной локально компактной абелевой группе:

Теорема 6.1. *Если G – абелева компактно порожденная группа Штейна, то ее двойственная группа $G^{\bullet}$ – тоже абелева компактно порожденная группа Штейна, а отображение*

$$\mathsf{i}_G : G \to G^{\bullet\bullet}, \quad \mathsf{i}_G(x)(\chi) = \chi(x), \qquad x \in G, \ \chi \in G^{\bullet}$$

является естественным изоморфизмом функторов $G \mapsto G$ и $G \mapsto G^{\bullet\bullet}$:

$$G^{\bullet\bullet} \cong G$$

Ввиду этой теоремы мы называем $G^\bullet$ *двойственной комплексной группой к группе* G.

Доказательство. Сначала нужно заметить, что это верно для частных случаев $G = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{Z}$ и случая конечной абелевой группы $G = F$. Это следует из очевидных формул:

$$\mathbb{C}^\bullet \cong \mathbb{C}, \quad (\mathbb{C}^\times)^\bullet \cong \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z}^\bullet \cong \mathbb{C}^\times, \quad F^\bullet \cong F$$

После этого останется заметить, что всякая абелева компактно порожденная группа Штейна имеет вид

$$G \cong \mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^\times)^m \times \mathbb{Z}^n \times F \qquad (l, m, n \in \mathbb{Z}_+)$$

и поэтому ее двойственная группа будет иметь вид

$$G^\bullet \cong \mathbb{C}^l \times \mathbb{Z}^m \times (\mathbb{C}^\times)^n \times F \qquad (l, m, n \in \mathbb{Z}_+)$$

то есть тоже будет абелевой компактно порожденной группой Штейна, а вторая двойственная группа $G^{\bullet\bullet}$ получается изоморфной G:

$$G^{\bullet\bullet} \cong \mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^\times)^m \times \mathbb{Z}^n \times F \cong G$$

□

(b) Преобразование Фурье как оболочка Аренса-Майкла

Если G – абелева компактно порожденная группа Штейна, то всякий ее голоморфный характер $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ будет, как нетрудно сообразить, голоморфной функцией на G. То есть двойственную комплексную группу $G^\bullet$ можно представлять себе как подгруппу в группе обратимых элементов алгебры $\mathcal{O}(G)$ голоморфных функций на G:

$$G^\bullet \subset \mathcal{O}(G)$$

Переходя по теореме 6.1 к двойственным объектам, мы получаем, что сама группа G вкладывается преобразованием i_G в группу обратимых элементов алгебры $\mathcal{O}(G^\bullet)$ голоморфных функций на $G^\bullet$:

$$\mathsf{i}_G : G \to G^{\bullet\bullet} \subset \mathcal{O}(G^\bullet).$$

С другой стороны, G, очевидно, вкладывается (в виде дельта-функционалов) в алгебру $\mathcal{O}^\star(G)$:

$$\delta : G \to \mathcal{O}^\star(G) \qquad (x \mapsto \delta^x).$$

По теореме 10.12 из [1] отсюда следует, что существует единственный гомоморфизм стереотипных алгебр

$$\sharp_G : \mathcal{O}^\star(G) \to \mathcal{O}(G^\bullet),$$

замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\mathsf{i}_G"] & \\ \mathcal{O}^\star(G) \arrow[rr, dashed, "\sharp_G"'] & & \mathcal{O}(G^\bullet) \end{tikzcd}$$

(в этом состоит свойство $\mathcal{O}^\star(G)$ быть групповой алгеброй). Гомоморфизм $\sharp_G : \mathcal{O}^\star(G) \to \mathcal{O}(G^\bullet)$ естественно называть (обратным) *преобразованием Фурье* на группе Штейна G, потому что он явно задается формулой, которой определяется (обратное) преобразование Фурье для мер и обобщенных функций [16, 31.2]:

$$\overbrace{\alpha^\sharp(\chi)}^{\substack{\text{значение функции } \alpha^\sharp \in \mathcal{O}(G^\bullet) \\ \text{в точке } \chi \in G^\bullet \\ \downarrow}} = \underbrace{\alpha(\chi)}_{\substack{\uparrow \\ \text{действие функционала } \alpha \in \mathcal{O}^\star(G) \\ \text{на функцию } \chi \in G^\bullet \subseteq \mathcal{O}(G)}}, \qquad (\chi \in G^\bullet, \quad \alpha \in \mathcal{O}^\star(G)) \tag{6.1}$$

Теорема 6.2. *Для всякой абелевой компактно порожденной группы Штейна G ее преобразование Фурье*

$$\sharp_G : \mathcal{O}^\star(G) \to \mathcal{O}(G^\bullet),$$

является:

(a) *гомоморфизмом жестких алгебр Хопфа-Фреше и*

(b) *оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^\star(G)$.*

Как следствие, справедливы изоморфизмы алгебр Хопфа-Фреше:

$$\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) \cong \Big(\mathcal{O}^\star(G)\Big)^\heartsuit \cong \mathcal{O}(G^\bullet) \tag{6.2}$$

а диаграмма рефлексивности для G принимает вид

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^\star(G) \arrow[rr, mapsto, "\text{преобразование Фурье}", "(6.2)"'] & & \mathcal{O}(G^\bullet) \arrow[d, mapsto, "\star"] \\
\mathcal{O}(G) \arrow[u, mapsto, "\star"] & & \mathcal{O}^\star(G^\bullet) \arrow[ll, mapsto, "\text{преобразование Фурье}"', "(6.2)"]
\end{tikzcd} \tag{6.3}$$

Как и теорема 6.1, это утверждение доказывается последовательным рассмотрением случаев $G = \mathbb{C},\ \mathbb{C}^\times,\ \mathbb{Z}$ и случая конечной абелевой группы $G = F$. В оставшейся части этого параграфа до "диаграммы вложения" мы займемся этим.

Конечная абелева группа. Как уже говорилось в § 3(a), всякую конечную группу G можно считать линейной комплексной группой Ли (нулевой размерности), на которой любая функция считается голоморфной, причем в первом примере § 4(c) отмечалось, что более того, любая функция на конечной группе является голоморфной функцией экспоненциального типа, и поэтому алгебры $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$, $\mathcal{O}(G)$ и $\mathbb{C}^G$ в этом случае совпадают:

$$\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) = \mathcal{O}(G) = \mathbb{C}^G$$

Если G вдобавок коммутативна, то иллюстрируемая нами здесь теорема 6.2 превращается в формально более сильное утверждение:

Предложение 6.1. *Если G – конечная абелева группа, то формула* (6.1) *устанавливает изоморфизм алгебр Хопфа*

$$\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) = \mathcal{O}^\star(G) = \mathbb{C}_G \cong \mathbb{C}^{G^\bullet} = \mathcal{O}(G^\bullet) = \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G^\bullet) \tag{6.4}$$

Комплексная плоскость $\mathbb{C}$. Пусть для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ символ χ_λ обозначает характер на группе $\mathbb{C}$, заданный формулой

$$\chi_\lambda(t) = e^{\lambda\cdot t}$$

Отображение $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \chi_\lambda \in \mathbb{C}^\bullet$ является изоморфизмом комплексных групп

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^\bullet$$

а формула (6.1) при таком изоморфизме приобретает вид

$$\alpha^\sharp(\lambda) = \alpha(\chi_\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{C} \qquad (\alpha \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C}),\quad w \in \mathcal{O}(\mathbb{C})) \tag{6.5}$$

(мы обозначаем это отображение тем же символом $\sharp$, хотя формально оно представляет собой композицию отображения (6.1) с отображением $\lambda \mapsto \chi_\lambda$). В результате теорема 6.2, применительно к группе $G = \mathbb{C}$ превращается в

Предложение 6.2. *Формула* (6.5) *определяет гомоморфизм жестких стереотипных алгебр Хопфа*

$$\sharp_{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$$

являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$, и поэтому устанавливающий изоморфизм алгебр Хопфа-Фреше

$$\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}) \tag{6.6}$$

Для доказательства нам понадобится

Лемма 6.1. *Полунормы вида*

$$||\alpha||_C = \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| \cdot C^k, \qquad C \geqslant 0, \tag{6.7}$$

(частный случай полунорм (3.73), когда $r_k = \frac{C^k}{k!}$*) образуют фундаментальную систему в множестве всех субмультипликативных непрерывных полунорм на* $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$.

Доказательство. Как мы уже отмечали в § 3(c), операции умножения в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ задаются одинаковыми формулами на рядах (3.71). Поэтому субмультипликативность полунорм (6.7) можно считать доказанной, после того, как в примере 5.3 тот же факт мы проверили для полунорм (3.72), задаваемых той же формулой на рядах.

Покажем, что полунормы (6.7) образуют фундаментальную систему среди всех субмультипликативных полунорм на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$. Это делается так же, как в предложении 3.14. Пусть p – субмультипликативная непрерывная полунорма:

$$p(\alpha * \beta) \leqslant p(\alpha) \cdot p(\beta)$$

Положим

$$r_k = \frac{1}{k!} p(\zeta_k)$$

Тогда

$$(k+l)! \cdot r_{k+l} = p(\zeta_{k+l}) = p(\zeta_k * \zeta_l) \leqslant p(\zeta_k) \cdot p(\zeta_l) = (k! \cdot r_k) \cdot (l! \cdot r_l)$$

Если обозначить $A_k = r_k \cdot k!$, то для этой последовательности получается рекуррентное неравенство $A_{k+1} \leqslant A_k \cdot A_1$, из которого следует $A_k \leqslant C^k$, для $C = A_1$. Это в свою очередь влечет неравенства

$$r_k \leqslant \frac{C^k}{k!}$$

Теперь используя те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 3.14, получаем:

$$p(\alpha) \leqslant (3.76) \leqslant |||\alpha|||_r = \sum_{k\in\mathbb{N}} r_k \cdot |\alpha_k| \cdot k! \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| \cdot C^k = ||\alpha||_C$$

□

Доказательство предложения 6.2. Заметим сразу, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$, определенное формулой (6.5) непрерывно: в силу непрерывности отображения $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \chi_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, всякий компакт T в $\mathbb{C}$ превращается в компакт $\{\chi_\lambda;\ \lambda \in T\}$ в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$, поэтому если направленность функционалов α_i сходится к нулю в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$, то для всякого компакта T в $\mathbb{C}$ получаем

$$\alpha_i^\sharp(\lambda) = \alpha_i(\chi_\lambda) \underset{\lambda\in T}{\rightrightarrows} 0, \qquad i \to \infty$$

То есть функции $\alpha_i^\sharp$ стремятся к нулю в $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Далее заметим, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}}$ переводит функционалы ζ_n в функции z^n:

$$(\zeta_n)^\sharp(\lambda) = \zeta_n(\chi_\lambda) = \left(\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}\,t^n} e^{\lambda t}\right)\Bigg|_{t=0} = \lambda^n = z^n(\lambda)$$

Отсюда и из непрерывности $\sharp_{\mathbb{C}}$ следует, что это отображение действует на функционалы α заменой в разложении (3.70) мономов ζ_n на мономы z^n:

$$\alpha^\sharp = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \zeta_n\right)^\sharp = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot (\zeta_n)^\sharp = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot z^n$$

Отсюда сразу следует все остальное.

1. Во-первых, отображение $\sharp_{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$ будет оболочкой Аренса-Майкла, потому что по лемме 6.1, всякая субмультипликативная непрерывная полунорма на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ мажорируется полунормой вида (6.7), которая в свою очередь продолжается отображением $\sharp_{\mathbb{C}}$ до полунормы (3.72) на $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

2. Во-вторых, отображение $\sharp_{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$ будет гомоморфизмом алгебр, потому что эти алгебры мы можем представлять себе по формулам (3.69)-(3.70) алгебрами степенных рядов, в которых умножение

задается обычными для степенных рядов правилами (3.71), и $\sharp_{\mathbb{C}}$ тогда будет просто вложением одной алгебры в другую, более широкую.

3. Чтобы доказать, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C})$ – изоморфизм коалгебр, заметим, что сопряженное отображение

$$(\sharp_{\mathbb{C}})^\star : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \to (\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}))^\star = \mathcal{O}(\mathbb{C})^{\star\star}$$

с точностью до изоморфизма $\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} : \mathcal{O}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C})^{\star\star}$ совпадает с $\sharp_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \arrow[rr, "(\sharp_{\mathbb{C}})^\star"] \arrow[dr, "\sharp_{\mathbb{C}}"'] & & \mathcal{O}(\mathbb{C})^{\star\star} \\ & \mathcal{O}(\mathbb{C}) \arrow[ur, "\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}"'] & \end{tikzcd} \tag{6.8}$$

Это следует из формулы

$$\sharp_{\mathbb{C}}(\delta^x) = \chi_x \tag{6.9}$$

Действительно,

$$\sharp_{\mathbb{C}}(\delta^x)(\lambda) = \delta^x(\chi_\lambda) = \chi_\lambda(x) = e^{\lambda x} = \chi_x(\lambda)$$

Теперь получаем:

$$\sharp^\star(\delta^a)(\delta^b) = \delta^a(\sharp_{\mathbb{C}}(\delta^b)) = (6.9) = \delta^a(\chi_b) = \sharp_{\mathbb{C}}(\delta^a)(b) = \delta^b(\sharp_{\mathbb{C}}(\delta^a)) == \mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\sharp_{\mathbb{C}}(\delta^a))(\delta^b) = (\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \circ \sharp)(\delta^a)(\delta^b)$$

Это верно для любых $a, b \in \mathbb{C}$, а дельта-функционалы полны в $\mathcal{O}^\star$, поэтому

$$(\sharp_{\mathbb{C}})^\star = \mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})} \circ \sharp_{\mathbb{C}}$$

то есть диаграмма (6.8) коммутативна. Теперь мы можем заметить, что про $\sharp_{\mathbb{C}}$ мы уже доказали, что это гомоморфизм алгебр, а для $\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}$ это очевидно, значит мы получаем, что $(\sharp_{\mathbb{C}})^\star$ – также гомоморфизм алгебр, и это означает, что $\sharp_{\mathbb{C}}$ – гомоморфизм коалгебр.

4. Теперь остается проверить, что $\sharp_{\mathbb{C}}$ сохраняет антипод:

$$\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\chi_\lambda)(x) = \chi_\lambda(-x) = e^{-\lambda x} = (e^{\lambda x})^{-1} = \chi_\lambda(x)^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\chi_\lambda) = \chi_\lambda^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})}(\alpha))^\sharp(\lambda) = (\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})}(\alpha))(\chi_\lambda) = (\alpha \circ \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C})})(\chi_\lambda) = \alpha(\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\chi_\lambda)) = \alpha(\chi_\lambda^{-1}) = \alpha^\sharp(-\lambda) = \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\alpha^\sharp)(\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C})}(\alpha))^\sharp = \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C})}(\alpha^\sharp)$$

□

Комплексная окружность $\mathbb{C}^\times$. Пусть для всякого $n \in \mathbb{Z}$ символ z^n обозначает характер на группе $\mathbb{C}^\times$, заданный формулой

$$z^n(t) = t^n$$

Отображение $n \in \mathbb{Z} \mapsto z^n \in (\mathbb{C}^\times)^\bullet$ является изоморфизмом комплексных групп

$$\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^\times)^\bullet$$

а формула (6.1) при таком изоморфизме приобретает вид

$$\alpha^\sharp(n) = \alpha(z^n), \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad (\alpha \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C}^\times)) \tag{6.10}$$

(как и в предыдущем примере мы обозначаем получаемое отображение тем же символом $\sharp$, хотя формально оно представляет собой композицию отображения (6.1) с отображением $n \mapsto z^n$). В результате теорема 6.2, применительно к группе $G = \mathbb{C}^\times$ превращается в

Предложение 6.3. *Формула* (6.10) *определяет гомоморфизм жестких стереотипных алгебр Хопфа*

$$\sharp_{\mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}(\mathbb{Z})$$

являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$*, и поэтому устанавливающий изоморфизм алгебр Хопфа-Фреше*

$$\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C}^\times) \cong \mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \tag{6.11}$$

Нам понадобится

Лемма 6.2. *Полунормы вида*

$$||\alpha||_N = \sum_{|n|\leqslant N} |\alpha_n|, \qquad N \in \mathbb{N} \tag{6.12}$$

– частный случай полунорм (3.48)*, когда*

$$r_n = \begin{cases} 1, & |n| \leqslant N \\ 0, & |n| > N \end{cases}$$

– образуют фундаментальную систему в множестве всех субмультипликативных непрерывных полунорм на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$.

Доказательство. Субмультипликативность полунорм (6.12) следует из формулы для операции умножения в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$:

$$||\alpha * \beta||_N = \sum_{|n|\leqslant N} |(\alpha * \beta)_n| = (3.46) = \sum_{|n|\leqslant N} |\alpha_n \cdot \beta_n| \leqslant \left(\sum_{|n|\leqslant N} |\alpha_n| \right) \cdot \left(\sum_{|n|\leqslant N} |\beta_n| \right) = ||\alpha||_N \cdot ||\beta||_N$$

Покажем, что полунормы (3.48) образуют фундаментальную систему среди всех субмультипликативных непрерывных полунорм на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Пусть p – субмультипликативная непрерывная полунорма:

$$p(\alpha * \beta) \leqslant p(\alpha) \cdot p(\beta)$$

Положим

$$r_n = p(\zeta_n)$$

Тогда

$$r_n = p(\zeta_n) = p(\zeta_n * \zeta_n) \leqslant p(\zeta_n) \cdot p(\zeta_n) = r_n^2$$

То есть $0 \leqslant r_n \leqslant r_n^2$, а это возможно только если $r_n \geqslant 1$ или $r_n = 0$. Но по лемме 3.2, числа r_n должны удовлетворять условию (3.49), из которого следует в частности, что $r_n \to 0$. Такое возможно только если все они, кроме конечного набора, равны нулю:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad |n| > N \quad \Longrightarrow \quad r_n = 0$$

Положим $M = \max_n r_n$, тогда по лемме 3.2 получаем:

$$p(\alpha) \leqslant |||\alpha|||_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |\alpha_n| = \sum_{|n|\leqslant N} r_n \cdot |\alpha_n| \leqslant \sum_{|n|\leqslant N} M \cdot |\alpha_n| = M \cdot ||\alpha||_N$$

□

Начало доказательство предложения 6.3. Заметим, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}(\mathbb{Z})$, определенное формулой (6.10) непрерывно: если направленность функционалов α_i сходится к нулю в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$, то для всякого $n \in \mathbb{Z}$ получаем

$$\alpha_i^\sharp(n) = \alpha_i(z^n) \longrightarrow 0, \qquad i \to \infty$$

Это означает, что $\alpha_i^\sharp$ сходится к нулю в $\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Далее заметим, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$ переводит функционалы ζ_k в характеристические функции одноэлементных множеств в $\mathbb{Z}$:

$$(\zeta_k)^\sharp(n) = \zeta_k(z^n) = (3.32) = \left\{ \begin{matrix} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{matrix} \right\} = (3.16) = 1_k(n)$$

Отсюда и из непрерывности $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$ следует, что это отображение действует на функционалы α заменой в разложении (3.70) мономов ζ_n на мономы 1_n:

$$\alpha^\sharp = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \zeta_n\right)^\sharp = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot (\zeta_n)^\sharp = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot 1_n$$

Это в свою очередь влечет за собой большую часть предложения 6.3.

1. Во-первых, отображение $\sharp_{\mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}(\mathbb{Z})$ будет оболочкой Аренса-Майкла, потому что по лемме 6.2, всякая субмультипликативная непрерывная полунорма на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ мажорируется полунормой вида (6.12), которая в свою очередь продолжается отображением $\sharp_{\mathbb{C}}$ до непрерывной полунормы на $\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

2. Во-вторых, отображение $\sharp_{\mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}(\mathbb{Z})$ будет гомоморфизмом алгебр , потому что в силу формулы умножения (3.46) в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$, это пространство можно представлять себе как пространство двусторонних последовательностей α_n с покоординатным умножением, которое отображением $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$ тождественно вкладывается в более широкое пространство $\mathcal{O}(\mathbb{Z}) = \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ всех двусторонних последовательностей с покоординатным умножением.

3. Доказательство того, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}(\mathbb{Z})$ является изоморфизмом коалгебр нам придется отложить до следующего примера (с.95).

4. Проверим, что $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$ сохраняет антипод:

$$\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}(z^n)(x) = z^n(x^{-1}) = x^{-n} = z^{-n}(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}(z^n) = z^{-n}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)}(\alpha))^\sharp(n) = (\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)}(\alpha))(z^n) = (\alpha \circ \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)})(z^n) = \alpha(\sigma_{\mathbb{C}^\times}(z^n)) = \alpha(z^{-n}) = \alpha^\sharp(-n) = \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}(\alpha^\sharp)(n)$$

$$\Downarrow$$

$$(\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)}(\alpha))^\sharp = \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}(\alpha^\sharp)$$

□

Группа целых чисел $\mathbb{Z}$. Пусть для всякого $t \in \mathbb{C}^\times$ символ χ_t обозначает характер на группе $\mathbb{Z}$, заданный формулой

$$\chi_t(n) = t^n \tag{6.13}$$

Отображение $t \in \mathbb{C}^\times \mapsto \chi_t \in \mathbb{Z}^\bullet$ является изоморфизмом комплексных групп

$$\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{Z}^\bullet$$

а формула (6.1) при таком изоморфизме приобретает вид

$$\alpha^\sharp(t) = \alpha(\chi_t), \qquad t \in \mathbb{C}^\times \qquad (\alpha \in \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{Z})) \tag{6.14}$$

(мы обозначаем получаемое отображение тем же символом $\sharp$, хотя формально оно представляет собой композицию отображения (6.1) с отображением $t \mapsto \chi_t$). В результате теорема 6.2, применительно к группе $G = \mathbb{Z}$ превращается в

Предложение 6.4. *Формула* (6.14) *определяет гомоморфизм жестких стереотипных алгебр Хопфа*

$$\sharp_{\mathbb{Z}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$$

являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$, и поэтому устанавливающий изоморфизм алгебр Хопфа-Фреше

$$\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \tag{6.15}$$

Нам понадобится

Лемма 6.3. *Полунормы вида*

$$||\alpha||_C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| \cdot C^{|n|}, \qquad C \geqslant 1 \tag{6.16}$$

(частный случай полунорм (3.24), когда $r_n = C^{|n|}$) образуют фундаментальную систему в множестве всех субмультипликативных непрерывных полунорм на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Субмультипликативность полунорм вида (6.16) мы уже отмечали в примере 5.2. Покажем, что они образуют фундаментальную систему среди всех субмультипликативных полунорм на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$. Пусть p – субмультипликативная непрерывная полунорма:

$$p(\alpha * \beta) \leqslant p(\alpha) \cdot p(\beta)$$

Положим $r_n = p(\delta^n)$. Тогда

$$r_{k+l} = p(\delta^{k+l}) = p(\delta^k * \delta^l) \leqslant p(\delta^k) \cdot p(\delta^l) = r_k \cdot r_l$$

Из этого рекуррентного соотношения следует, что

$$r_n \leqslant M \cdot C^{|n|}$$

где $M = r_0$, $C = \max\{r_1; r_{-1}\}$, и теперь по лемме 3.1 получаем:

$$p(\alpha) \leqslant (3.28) \leqslant |||\alpha|||_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r_n \cdot |\alpha_n| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} M \cdot C^{|n|} \cdot |\alpha_n| = M \cdot ||\alpha||_C$$

□

Доказательство предложения 6.4. Прежде всего, заметим, что отображение $\sharp_{\mathbb{Z}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, определенное формулой (6.14) непрерывно: в силу непрерывности отображения $t \in \mathbb{C}^\times \mapsto \chi_t \in \mathcal{O}(\mathbb{Z})$, всякий компакт T в $\mathbb{C}^\times$ превращается в компакт $\{\chi_t;\ t \in T\}$ в $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$, поэтому если направленность функционалов α_i сходится к нулю в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$, то для всякого компакта T в $\mathbb{C}^\times$ получаем

$$\alpha_i^\sharp(t) = \alpha_i(\chi_t) \underset{\lambda\in T}{\rightrightarrows} 0, \qquad i \to \infty$$

Это означает, что $\alpha_i^\sharp$ сходится к нулю в $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$.

Далее заметим, что отображение $\sharp_{\mathbb{Z}}$ переводит функционалы δ^n в мономы z^n:

$$(\delta^n)^\sharp(t) = \delta^n(\chi_t) = \chi_t(n) = t^n = z^n(t)$$

Отсюда и из непрерывности $\sharp_{\mathbb{Z}}$ следует, что это отображение действует на функционалы α заменой в разложении (3.18) мономов δ^n на мономы z^n:

$$\alpha^\sharp = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \delta^n\right)^\sharp = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot (\delta^n)^\sharp = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot z^n$$

Отсюда следует остальное.

1. Во-первых, отображение $\sharp_{\mathbb{Z}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ будет оболочкой Аренса-Майкла, потому что по лемме 6.3, всякая субмультипликативная полунорма на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$ мажорируется полунормой вида (6.16), которая в свою очередь продолжается отображением $\sharp_{\mathbb{Z}}$ до полунормы (3.47) на $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$.

2. Во-вторых, отображение $\sharp_{\mathbb{Z}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ будет гомоморфизмом алгебр, потому что эти алгебры мы можем представлять себе в соответствии с формулами (3.19)-(3.46) алгебрами степенных рядов, в которых умножение задается обычными для степенных рядов правилами, и $\sharp_{\mathbb{C}}$ тогда будет просто вложением одной алгебры в другую, более широкую.

3. Чтобы доказать, что отображение $\sharp_{\mathbb{Z}} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ – изоморфизм коалгебр, заметим, что сопряженное отображение

$$(\sharp_{\mathbb{Z}})^\star : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to (\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}))^\star = \mathcal{O}(\mathbb{Z})^{\star\star}$$

с точностью до изоморфизма $\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})} : \mathcal{O}(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{Z})^{\star\star}$ совпадает с $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \arrow[rr, "(\sharp_{\mathbb{Z}})^\star"] \arrow[dr, "\sharp_{\mathbb{C}^\times}"'] & & \mathcal{O}(\mathbb{Z})^{\star\star} \\ & \mathcal{O}(\mathbb{Z}) \arrow[ur, "\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}"'] & \end{tikzcd} \qquad (6.17)$$

Это следует из формулы

$$\delta^t(\sharp_{\mathbb{Z}}(\delta^n)) = t^n = \delta^n(\sharp_{\mathbb{C}^\times}(\delta^t)), \qquad t \in \mathbb{C}^\times, \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (6.18)$$

Действительно,
$$\delta^t(\sharp_{\mathbb{Z}}(\delta^n)) = \sharp_{\mathbb{Z}}(\delta^n)(t) = \delta^n(\chi_t) = \chi_t(n) = t^n$$
и
$$\delta^n(\sharp_{\mathbb{C}^\times}(\delta^t)) = \sharp_{\mathbb{C}^\times}(\delta^t)(n) = \delta^t(z^n) = z^n(t) = t^n$$
Теперь получаем: для $t \in \mathbb{C}^\times$ и $n \in \mathbb{Z}$
$$(\sharp_{\mathbb{Z}})^\star(\delta^t)(\delta^n) = \delta^t(\sharp_{\mathbb{Z}}(\delta^n)) = (6.18) = \delta^n(\sharp_{\mathbb{C}^\times}(\delta^t)) = \mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}(\sharp_{\mathbb{C}^\times}(\delta^t))(\delta^n) = (\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})} \circ \sharp_{\mathbb{C}^\times})(\delta^t)(\delta^n)$$
Это верно для любых $t \in \mathbb{C}^\times$ и $n \in \mathbb{Z}$, а дельта-функционалы плотны в $\mathcal{O}^\star$, поэтому
$$(\sharp_{\mathbb{Z}})^\star = \mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})} \circ \sharp_{\mathbb{C}^\times}$$
то есть диаграмма (6.17) коммутативна. Теперь мы можем заметить, что в первой части доказательства предложения 6.3 (с.93) мы уже убедились, что $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$ является гомоморфизмом алгебр. А для $\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}$ это очевидно, значит мы получаем, что $(\sharp_{\mathbb{Z}})^\star$ – также гомоморфизм алгебр, и это означает, что $\sharp_{\mathbb{Z}}$ – гомоморфизм коалгебр.

4. Теперь остается проверить, что $\sharp_{\mathbb{Z}}$ сохраняет антипод:
$$\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}(\chi_t)(n) = \chi_t(-n) = t^{-n} = (t^{-1})^n = \chi_{t^{-1}}(n)$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}(\chi_t) = \chi_{t^{-1}}$$
$$\Downarrow$$
$$(\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})}(\alpha))^\sharp(t) = (\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})}(\alpha))(\chi_t) = (\alpha \circ \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})})(\chi_t) = \alpha(\sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})}(\chi_t)) = \alpha(\chi_{t^{-1}}) = \alpha^\sharp(t^{-1}) = \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}(\alpha^\sharp)(t)$$
$$\Downarrow$$
$$(\sigma_{\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})}(\alpha))^\sharp = \sigma_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}(\alpha^\sharp)$$
□

Окончание доказательства предложения 6.3. В предложении 6.3 нам осталось доказать, что отображение $\sharp_{\mathbb{C}^\times} : \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \to \mathcal{O}(\mathbb{Z})$ является изоморфизмом коалгебр. Заметим, что сопряженное отображение
$$(\sharp_{\mathbb{C}^\times})^\star : \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \to (\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times))^\star = \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)^{\star\star}$$
с точностью до изоморфизма $\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)} : \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)^{\star\star}$ совпадает с $\sharp_{\mathbb{Z}}$:
$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^\star(\mathbb{Z}) \arrow[rr, "(\sharp_{\mathbb{C}^\times})^\star"] \arrow[dr, "\sharp_{\mathbb{Z}}"'] & & \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)^{\star\star} \\ & \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \arrow[ur, "\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}"'] & \end{tikzcd} \tag{6.19}$$
Это также следует из формулы (6.18): для $t \in \mathbb{C}^\times$ и $n \in \mathbb{Z}$
$$(\sharp_{\mathbb{C}^\times})^\star(\delta^n)(\delta^t) = \delta^n(\sharp_{\mathbb{C}^\times}(\delta^t)) = (6.18) = \delta^t(\sharp_{\mathbb{Z}}(\delta^n)) = \mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}(\sharp_{\mathbb{Z}}(\delta^n))(\delta^t) = (\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{Z})} \circ \sharp_{\mathbb{C}^\times})(\delta^n)(\delta^t)$$
Это верно для любых $t \in \mathbb{C}^\times$ и $n \in \mathbb{Z}$, а дельта-функционалы плотны в $\mathcal{O}^\star$, поэтому
$$(\sharp_{\mathbb{C}^\times})^\star = \mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)} \circ \sharp_{\mathbb{Z}}$$
то есть диаграмма (6.19) коммутативна. Теперь мы можем заметить, что в доказательстве предложения 6.4 мы уже убедились, что $\sharp_{\mathbb{Z}}$ является гомоморфизмом алгебр. А для $\mathsf{i}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)}$ это очевидно, значит мы получаем, что $(\sharp_{\mathbb{C}^\times})^\star$ – также гомоморфизм алгебр, и это означает, что $\sharp_{\mathbb{C}^\times}$ – гомоморфизм коалгебр. □

Доказательство теоремы 6.2 После того, как формулами (6.4), (6.6), (6.11), (6.15) мы установили изоморфизм (6.2) для случаев $G = \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^\times$, $\mathbb{Z}$ и для случая конечной группы G, нам остается просто применить формулы (4.43) и (4.44): разложив произвольную абелеву компактно порожденную группу Штейна G в произведение

$$G = \mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^\times)^m \times \mathbb{Z}^n \times F$$

где F – конечная группа, мы получим:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) = \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C}^l \times (\mathbb{C}^\times)^m \times \mathbb{Z}^n \times F) = (4.43) = \\
= \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C})^{\odot l} \odot \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{C}^\times)^{\odot m} \odot \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(\mathbb{Z})^{\odot n} \odot \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(F) = \\
= \mathcal{O}(\mathbb{C}^\bullet)^{\odot l} \odot \mathcal{O}((\mathbb{C}^\times)^\bullet)^{\odot m} \odot \mathcal{O}(\mathbb{Z}^\bullet)^{\odot n} \odot \mathcal{O}(F^\bullet) = \\
= (4.43) = \mathcal{O}((\mathbb{C}^\bullet)^l \times ((\mathbb{C}^\times)^\bullet)^m \times (\mathbb{Z}^\bullet)^n \times F^\bullet) = \mathcal{O}(G^\bullet)
\end{aligned}$$

(c) Диаграмма вложения

Теорема 6.3. *Следующая конструкция представляет собой обобщение теории двойственности Понтрягина с категории абелевых компактно порожденных групп Штейна на категорию компактно порожденных групп Штейна с алгебраической компонентой единицы,*

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{голоморфно рефлексивные}\\ \text{алгебры Хопфа}\end{array}} \arrow[r, "H\mapsto (H^\heartsuit)^\star"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{голоморфно рефлексивные}\\ \text{алгебры Хопфа}\end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{компактно порожденные группы Штейна}\\ \text{с алгебраической компонентой единицы}\end{array}} \arrow[u, "\begin{array}{c}\mathcal{O}^\star(G)\\ \uparrow\\ G\end{array}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{компактно порожденные группы Штейна}\\ \text{с алгебраической компонентой единицы}\end{array}} \arrow[u, "\begin{array}{c}\mathcal{O}^\star(G)\\ \uparrow\\ G\end{array}"'] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы}\\ \text{компактно порожденные группы Штейна}\end{array}} \arrow[u, "\subset"] \arrow[r, "G\mapsto G^\bullet"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{абелевы}\\ \text{компактно порожденные группы Штейна}\end{array}} \arrow[u, "\subset"']
\end{tikzcd}$$

и коммутативность этой диаграммы обеспечивается изоморфизмом функторов

$$\mathcal{O}^\star(G^\bullet) \cong \left(\left(\mathcal{O}^\star(G)\right)^\heartsuit\right)^\star.$$

Доказательство. В теореме 5.4 мы уже показали, что функтор $G \mapsto \mathcal{O}^\star(G)$ действует из категории компактно порожденных групп Штейна с алгебраической связной компонентой единицы в категорию голоморфно рефлексивных жестких стереотипных алгебр Хопфа. Поэтому нам нужно только проверить коммутативность диаграммы категорий. Это следует из теоремы 6.1: если G – абелева компактно порожденная группа Штейна, то, проходя по диаграмме, мы будем получать следующие объекты:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^\star(G) \arrow[r, mapsto, "\heartsuit"] & \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G) \cong (6.2) \cong \mathcal{O}(G^\bullet) \arrow[r, mapsto, "\star"] & \mathcal{O}^\star(G^\bullet) \\
G \arrow[u, mapsto, "\mathcal{O}^\star"] \arrow[rr, mapsto, "\bullet"] & & G^\bullet \arrow[u, mapsto, "\mathcal{O}^\star"']
\end{tikzcd}$$

□

§ 7 Добавление: голоморфная рефлексивность квантовой группы '$az + b$'

В этом заключительном параграфе мы, как и обещали во Введении, покажем на примере квантовой группы '$az+b$', что описанная нами голоморфная двойственность не ограничивается алгебрами аналитических функционалов $\mathcal{O}^\star(G)$, но распространяется также в теорию квантовых групп.

(a) Квантовые комбинаторные формулы

В теории квантовых групп имеется некий собственный аналог элементарной комбинаторики, применяемый к ситуациям, когда вычисления проводятся над переменными, закон коммутации которых описывается правилом

$$yx = qxy \tag{7.1}$$

где q – фиксированное число. Для этих вычислений, в частности, выводятся квантовые аналоги обычных биномиальных формул. Некоторые из этих формул понадобятся нам в конструкциях связанных с ‘$az+b$’, поэтому нам будет удобно выписать их здесь для ссылок (за подробностями мы отсылаем читателя к учебнику К.Касселя [19]).

Для произвольного натурального числа n обозначим

$$(n)_q = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}, \qquad (n)!_q = (1)_q(2)_q...(n)_q = \frac{(q-1)(q^2-1)...(q^n-1)}{(q-1)^n} \tag{7.2}$$

Число $(n)!_q$ называется *квантовым факториалом* числа n. *Квантовое число сочетаний* из n по k определяется формулой

$$\binom{n}{k}_q = \begin{cases} \frac{(n)!_q}{(k)!_q \cdot (n-k)!_q}, & k \leqslant n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{7.3}$$

Теорема 7.1 (квантовая формула бинома Ньютона). *Пусть x и y два элемента ассоциативной алгебры A, подчиненные соотношению* (7.1). *Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q \cdot x^k \cdot y^{n-k} \tag{7.4}$$

Теорема 7.2 (квантовая формула Чу-Вандермонда). *Для любых $l, m, n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\binom{m+n}{l}_q = \sum_{\max\{0,l-n\} \leqslant i \leqslant \min\{l,m\}} q^{(m-i)\cdot(l-i)} \cdot \binom{m}{i}_q \cdot \binom{n}{l-i}_q =$$
$$= \sum_{0 \leqslant i \leqslant l} q^{(m-i)\cdot(l-i)} \cdot \binom{m}{i}_q \cdot \binom{n}{l-i}_q \tag{7.5}$$

Доказательство. [6] Если $l > m+n$, то для всякого $i = 0, ..., m$ мы получим $n < l - m \leqslant l - i$, поэтому $\binom{n}{l-i}_q = 0$. Значит, обе суммы в (7.5) обнуляются. И то же самое происходит и с $\binom{m+n}{l}_q$, значит формула (7.5) будет верна тривиально.

Таким образом, интерес представляет лишь случай $l \leqslant m+n$. Рассмотрим равенство $(x+y)^{m+n} = (x+y)^m(x+y)^n$. Раскрывая по формуле (7.4) скобки в обеих частях, получим

$$\sum_{l=0}^{m+n} \binom{m+n}{l}_q \cdot x^l \cdot y^{n-l} = \left(\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}_q \cdot x^i \cdot y^{m-i} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}_q \cdot x^j \cdot y^{n-j} \right) =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}_q \cdot \binom{n}{j}_q \cdot x^i \cdot y^{m-i} \cdot x^j \cdot y^{n-j} = (7.1) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}_q \cdot \binom{n}{j}_q \cdot q^{(m-i)\cdot j} \cdot x^{i+j} \cdot y^{m+n-i-j}$$

Рассмотрим в последней сумме только те слагаемые, в которых индексы i и j связаны равенством $i+j = l$. Все эти слагаемые можно индексировать одним параметром i, если выразить j через i формулой $j = l-i$. Нужно только заметить, что для того, чтобы получилось взаимно однозначное соответствие, индекс i должен меняться в пределах

$$\max\{0, l-n\} \leqslant i \leqslant \min\{l, m\}$$

Это следует из ограничений на i и j:

$$\begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant l-i \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant m \\ -n \leqslant i-l \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \leqslant i \leqslant m \\ l-n \leqslant i \leqslant l \end{cases}$$

[6] Мы приводим здесь доказательство формулы Чу-Вандермонда только ради указанных пределов суммирования $\max\{0, l-n\} \leqslant i \leqslant \min\{l, m\}$, которые понадобятся нам ниже.

Теперь, приравняв коэффициенты при мономе $x^l \cdot y^{n-l}$, мы получим первое равенство в (7.5):

$$\binom{m+n}{l}_q = \sum_{\max\{0,l-n\}\leqslant i\leqslant \min\{l,m\}} q^{(m-i)\cdot(l-i)} \cdot \binom{m}{i}_q \cdot \binom{n}{l-i}_q$$

Второе равенство очевидно, потому что при $i < l - n$ или $i > l$ получается соответственно $n < l - i$ или $l - i < 0$, поэтому $\binom{n}{l-i}_q = 0$, и слагаемые в сумме обнуляются:

$$\sum_{\max\{0,l-n\}\leqslant i\leqslant \min\{l,m\}} = \underbrace{\sum_{0\leqslant i<\max\{0,l-n\}}}_{0} + \sum_{\max\{0,l-n\}\leqslant i\leqslant \min\{l,m\}} + \underbrace{\sum_{\min\{l,m\}<i\leqslant m}}_{0} = \sum_{0\leqslant i\leqslant m}$$

$\square$

(b) Алгебры Хопфа косых многочленов и близкие конструкции

Тензорные произведения $X \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $X \circledast \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $X \odot \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, $X \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$

Теорема 7.3. *Пусть X – стереотипное пространство. Тогда*

— *элементы тензорного произведения $X \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$ однозначно представимы суммами (возможно, бесконечными) по мономам t^k,*
$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \odot t^k, \tag{7.6}$$
в которых коэффициенты $u_k \in X$ непрерывно зависят от $u \in X \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$,

— *элементы тензорного произведения $X \circledast \mathcal{R}(\mathbb{C})$ однозначно представимы суммами (возможно, бесконечными) по мономам t^k,*
$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circledast t^k, \tag{7.7}$$
в которых коэффициенты $u_k \in X$ непрерывно зависят от $u \in X \circledast \mathcal{R}(\mathbb{C})$,

— *элементы тензорного произведения $X \odot \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ однозначно представимы суммами (возможно, бесконечными) по мономам τ^k,*
$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \odot \tau^k, \tag{7.8}$$
в которых коэффициенты $u_k \in X$ непрерывно зависят от $u \in X \odot \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$,

— *элементы тензорного произведения $X \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ однозначно представимы суммами (возможно, бесконечными) по мономам τ^k,*
$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \circledast \tau^k, \tag{7.9}$$
в которых коэффициенты $u_k \in X$ непрерывно зависят от $u \in X \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$,

Алгебры косых многочленов $A \overset{\varphi}{\odot} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и косых степенных рядов $A \overset{\varphi}{\circledast} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$

Теорема 7.4. *Пусть A – инъективная стереотипная алгебра и $\varphi : A \to A$– какой-нибудь ее (непрерывный) автоморфизм. Тогда формула*

$$u \cdot v = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \odot t^k \cdot \sum_{l\in\mathbb{N}} v_l \odot t^l = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} \underbrace{u_i \cdot \varphi^i(v_{n-i})}_{\text{умножение в } A} \odot t^n \tag{7.10}$$

задает ассоциативное и непрерывное умножение на тензорном произведении $A \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$, превращая его в инъективную стереотипную алгебру, называемую алгеброй косых многочленов (относительно автоморфизма φ) с коэффициентами в A *и обозначается $A \overset{\varphi}{\odot} \mathcal{R}(\mathbb{C})$. Если вдобавок A – алгебра Браунера, то $A \overset{\varphi}{\odot} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ – тоже алгебра Браунера.*

Теорема 7.5. *Пусть A – стереотипная алгебра и $\varphi : A \to A$ – какой-нибудь ее (непрерывный) автоморфизм. Тогда формула*

$$\alpha * \beta = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \circledast \tau^k * \sum_{l\in\mathbb{N}} \beta_l \circledast \tau^l = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\alpha_i \cdot \varphi^i(\beta_{n-i})}_{\text{умножение в } A} \circledast \tau^n \tag{7.11}$$

задает ассоциативное и непрерывное умножение на тензорном произведении $A \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, превращая его в стереотипную алгебру, называемую алгеброй косых степенных рядов (относительно автоморфизма φ) с коэффициентами в A *и обозначаемую $A \overset{\varphi}{\circledast} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$. Если вдобавок A – алгебра Фреше, то $A \overset{\varphi}{\circledast} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ – тоже алгебра Фреше.*

Квантовые пары в алгебре Хопфа. Пусть H – инъективная (проективная) стереотипная алгебра Хопфа и пусть даны:

– групповой центральный элемент z в H

– групповой центральный элемент ω в $H^\star$

Пусть, кроме того, операторы $\mathsf{M}^\star_\omega$ и $\mathsf{M}^\star_z$, сопряженные к операторам умножения на элементы ω и z, действуют на элементы z и ω умножением на фиксированное число $q \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$:

$$\mathsf{M}^\star_\omega(z) = q\cdot z, \qquad \mathsf{M}^\star_z(\omega) = q\cdot\omega \tag{7.12}$$

Тогда пару (z,ω) мы условимся называть *квантовой парой* в алгебре Хопфа H (с параметром q).

Руководящим примером для нас будут пары алгебр $\langle \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times), \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)\rangle$ и $\langle \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times), \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)\rangle$ на комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$, рассматривавшиеся нами выше в § 3(c). Символом z мы обозначали там моном степени 1 на $\mathbb{C}^\times$:

$$z(x) := x, \qquad x\in\mathbb{C}^\times$$

Зафиксируем число $q\in\mathbb{C}^\times$ и рассмотрим дельта-функционал δ^q в точке q:

$$\delta^q(u) = u(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\cdot q^n, \qquad u\in\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$$

Понятно, что это будет поток на $\mathbb{C}^\times$, то есть элемент пространства $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Его разложение по базису ζ_n имеет вид:

$$\delta^q = \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n\cdot\zeta_n \tag{7.13}$$

Предложение 7.1. *Элементы (z,δ^q) образуют квантовую пару в алгебрах Хопфа $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ с параметром q.*

Доказательство. Докажем это для $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$. В соответствии с определением с. 99, нам нужно сначала проверить, что z и δ^q – центральные и групповые элементы. Первое тривиально поскольку $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$ – коммутативные алгебры. То, что z – групповой элемент следует из (3.37):

$$\varkappa(z) = z\odot z$$

А для δ^q это следует из мультипликативности дельта-функционалов:

$$\langle u\odot v, \varkappa(\delta^q)\rangle = \langle u\cdot v, \delta^q\rangle = (u\cdot v)(q) = u(q)\cdot v(q) = \langle u,\delta^q\rangle\cdot\langle v,\delta^q\rangle = \langle u\odot v, \delta^q\circledast\delta^q\rangle$$
$$\Longrightarrow \qquad \varkappa(\delta^q) = \delta^q\circledast\delta^q.$$

Наконец, равенства (7.12) проверяются непосредственным вычислением:

$$\langle \mathsf{M}^\star_{\delta^q} z, \alpha\rangle = \langle z, \delta^q * \alpha\rangle = \langle z, \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^m\zeta_m * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n\zeta_n\rangle = (3.33) = \langle z, \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n\cdot\alpha_n\cdot\zeta_n\rangle = q\cdot\alpha_1 = q\cdot\langle z,\alpha\rangle$$

и

$$\langle u, \mathsf{M}^\star_z\,\delta^q\rangle = \langle z\cdot u, \delta^q\rangle = \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m\cdot z^{m+1}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n\cdot\zeta_n\right\rangle =$$
$$= \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m\cdot z^{m+1}, \sum_{l\in\mathbb{Z}} q^{l+1}\cdot\zeta_{l+1}\right\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m\cdot q^{m+1} = q\cdot\sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m\cdot q^m = q\cdot\langle u,\delta^q\rangle$$

□

Алгебры Хопфа $H \odot^z_\omega \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и $H^\star \circledast^\omega_z \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$. В следующей теореме θ обозначает изоморфизм функторов (1.13), а $(k)!_q$ – квантовый факториал (7.2):

Теорема 7.6. *Пусть H – инъективная стереотипная алгебра Хопфа и пусть (z,ω) – квантовая пара в H с параметром $q \in \mathbb{C}^\times$. Тогда*

(a) *тензорное произведение $H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$ обладает единственной структурой инъективной алгебры Хопфа с алгебраическими операциями, определенными формулами:*

$$\text{умножение:} \quad a \odot t^k \cdot b \odot t^l = a \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b) \odot t^{k+l} \tag{7.14}$$

$$\text{единица:} \quad 1_{H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})} = 1_H \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \tag{7.15}$$

$$\text{коумножение:} \quad \varkappa(a \odot t^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_q \cdot \theta\Big(\big(1_H \odot \mathsf{M}^i_z\big)(\varkappa_H(a)) \odot t^i \odot t^{k-i}\Big) = \tag{7.16}$$

$$= \sum_{(a)} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_q \cdot a' \odot t^i \odot (z^i \cdot a'') \odot t^{k-i}$$

$$\text{коединица:} \quad \varepsilon(a \odot t^k) = \begin{cases} \varepsilon_H(a), & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

$$\text{антипод:} \quad \sigma(a \odot t^k) = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot z^{-k} \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k(\sigma_H(a)) \odot t^k \tag{7.18}$$

$H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$ с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $H \overset{z}{\underset{\omega}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$; общая формула умножения в этой алгебре выглядит так:

$$u \cdot v = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \odot t^k\right) \cdot \left(\sum_{l \in \mathbb{N}} v_l \odot t^l\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^m u_k \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k (v_{m-k})\right) \odot t^m \tag{7.19}$$

(b) *тензорное произведение $H^\star \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ обладает единственной структурой проективной алгебры Хопфа с алгебраическими операциями, определенными формулами*

$$\text{умножение:} \quad \alpha \circledast \tau^k * \beta \circledast \tau^l = \alpha \cdot (\mathsf{M}^\star_z)^k(\beta) \circledast \tau^{k+l} \tag{7.20}$$

$$\text{единица:} \quad 1_{H^\star \circledast \mathcal{R}(\mathbb{C})} = 1_{H^\star} \circledast 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})} \tag{7.21}$$

$$\text{коумножение:} \quad \varkappa(\alpha \circledast \tau^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_q \cdot \theta\Big(\big(\mathsf{id}_{H^\star} \circledast \mathsf{M}^i_\omega\big)(\varkappa_{H^\star}(\alpha)) \circledast \tau^i \circledast \tau^{k-i}\Big) = \tag{7.22}$$

$$= \sum_{(\alpha)} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_q \cdot \alpha' \circledast \tau^i \circledast (\omega^i * \alpha'') \circledast \tau^{k-i}$$

$$\text{коединица:} \quad \varepsilon(\alpha \circledast \tau^k) = \begin{cases} \varepsilon_{H^\star}(\alpha), & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{7.23}$$

$$\text{антипод:} \quad \sigma(\alpha \circledast \tau^k) = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \omega^{-k} * (\mathsf{M}^\star_z)^k(\sigma_{H^\star}(\alpha)) \circledast \tau^k \tag{7.24}$$

$H^\star \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $H^\star \overset{\omega}{\underset{z}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$; общая формула умножения в этой алгебре выглядит так:

$$\alpha * \beta = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \odot \tau^k\right) \cdot \left(\sum_{l \in \mathbb{N}} \beta_l \odot \tau^l\right) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^m \alpha_k * (\mathsf{M}^\star_z)^k (\beta_{m-k})\right) \odot \tau^m \tag{7.25}$$

(c) *билинейная форма*

$$\left\langle \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \odot t^k, \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \circledast \tau^k \right\rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle u_k, \alpha_k \rangle \cdot (k)!_q \tag{7.26}$$

превращает $H \overset{z}{\underset{\omega}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и $H^\star \overset{\omega}{\underset{z}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ в дуальную пару стереотипных алгебр Хопфа:

$$\left(H \overset{z}{\underset{\omega}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})\right)^\star \cong H^\star \overset{\omega}{\underset{z}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \tag{7.27}$$

Доказательство этой теоремы мы разобьем на 7 лемм. Некоторые из них очевидны, и в этих случаях мы опускаем доказательство.

Лемма 7.1. *Умножение и единица, определяемые формулами* (7.14), (7.15) *задают структуру инъективной стереотипной алгебры на тензорном произведении $H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$, превращая его в алгебру косых многочленов с коэффициентами в алгебре H и порождающим автоморфизмом*

$$\varphi = \mathsf{M}^\star_\omega$$

Лемма 7.2. *Умножение и единица, определяемые формулами* (7.20), (7.21) *задают структуру проективной стереотипной алгебры на тензорном произведении $H^\star \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, превращая его в алгебру косых степенных рядов с коэффициентами в алгебре $H^\star$ и порождающим автоморфизмом*

$$\varphi = \mathsf{M}^\star_z$$

Лемма 7.3. *Билинейная форма* (7.26) *превращает коумножение* (7.16) *в умножение* (7.20)*, а коединицу* (7.17) *в единицу* (7.21)*:*

$$\langle \varkappa(u), \alpha \circledast \beta \rangle = \langle u, \alpha * \beta \rangle\,, \qquad \varepsilon(u) = \langle u, 1_{H^\star} \circledast 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})} \rangle \tag{7.28}$$

Как следствие, коумножение (7.16) *и коединица* (7.17) *задают структуру инъективной стереотипной коалгебры на $H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$.*

Лемма 7.4. *Билинейная форма* (7.26) *превращает умножение* (7.14) *в коумножение* (7.22)*, а единицу* (7.15) *в коединицу* (7.23)*:*

$$\langle u \cdot v, \alpha \rangle = \langle u \odot v, \varkappa(\alpha) \rangle\,, \qquad \langle 1_H \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})}, \alpha \rangle = \varepsilon(\alpha) \tag{7.29}$$

Как следствие, коумножение (7.22) *и коединица* (7.23) *задают структуру проективной стереотипной коалгебры на $H^\star \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$.*

Доказательство лемм 7.3 и 7.4. Из-за симметрии между формулами (7.16)-(7.20) и (7.14)-(7.22) здесь достаточно доказать тождества (7.28). Для этого в свою очередь достаточно рассмотреть случай $u = a \odot t^k$. Тогда второе равенство становится очевидно

$$\varepsilon(a \odot t^k) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_H(a), & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{Bmatrix} = \langle a \odot t^k, 1_{H^\star} \circledast 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})} \rangle$$

А первое доказывается цепочкой

$$\begin{aligned}
\big\langle \varkappa(a \odot t^k), \alpha \circledast \beta \big\rangle &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot \left\langle \theta\Big((1_H \odot \mathsf{M}^i_z)(\varkappa_H(a)) \odot t^i \odot t^{k-i} \Big), \sum_{l \in \mathbb{N}} \alpha_l \circledast \tau^l \circledast \sum_{m \in \mathbb{N}} \beta_m \circledast \tau^m \right\rangle = \\
&= \sum_{l,m \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot \Big\langle \theta\Big((1_H \odot \mathsf{M}^i_z)(\varkappa_H(a)) \odot t^i \odot t^{k-i} \Big), \alpha_l \circledast \tau^l \circledast \beta_m \circledast \tau^m \Big\rangle = \\
&= \sum_{l,m \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot \Big\langle (1_H \odot \mathsf{M}^i_z)(\varkappa_H(a)) \odot t^i \odot t^{k-i}, \theta\Big(\alpha_l \circledast \tau^l \circledast \beta_m \circledast \tau^m \Big) \Big\rangle = \\
&= \sum_{l,m \in \mathbb{N}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot \big\langle (1_H \odot \mathsf{M}^i_z)(\varkappa_H(a)) \odot t^i \odot t^{k-i}, \alpha_l \circledast \beta_m \circledast \tau^l \circledast \tau^m \big\rangle = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot (i)!_q \cdot (k-i)!_q \big\langle (1_H \odot \mathsf{M}^i_z)(\varkappa_H(a)), \alpha_i \circledast \beta_{k-i} \big\rangle = \\
&= (k)!_q \cdot \sum_{i=0}^{k} \big\langle \varkappa_H(a), \alpha_i \circledast (\mathsf{M}^\star_z)^i(\beta_{k-i}) \big\rangle = (k)!_q \cdot \sum_{i=0}^{k} \big\langle a, \alpha_i * (\mathsf{M}^\star_z)^i(\beta_{k-i}) \big\rangle = \\
&= \left\langle a \odot t^k, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i * (\mathsf{M}^\star_z)^i(\beta_{k-i}) \circledast \tau^k \right\rangle = \left\langle a \odot t^k, \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i * (\mathsf{M}^\star_z)^i(\beta_{n-i}) \right) \circledast \tau^n \right\rangle = \\
&= \big\langle a \odot t^k, \alpha * \beta \big\rangle
\end{aligned}$$

□

Лемма 7.5. *Коумножение* (7.16) *и коединица* (7.17) *являются гомоморфизмами инъективных стереотипных алгебр, и, как следствие, задают на* $H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$ *структуру инъективной стереотипной биалгебры.*

Лемма 7.6. *Коумножение* (7.22) *и коединица* (7.23) *являются гомоморфизмами проективных стереотипных алгебр, и, как следствие, задают на* $H^\star \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ *структуру проективной стереотипной биалгебры.*

Доказательство. Снова из-за симметрии формул здесь достаточно доказать лишь первую лемму. Мы лишь проверим, что коумножение (7.16) будет гомоморфизмом алгебр, оставляя читателю разбираться с коединицей по аналогии. Заметим следующие тождества:

$$\varkappa(a \odot 1 \cdot b \odot 1) = \varkappa(a \odot 1) \cdot \varkappa(b \odot 1) \tag{7.30}$$

$$\varkappa(1 \odot t^k \cdot 1 \odot t^l) = \varkappa(1 \odot t^k) \cdot \varkappa(1 \odot t^l) \tag{7.31}$$

$$\varkappa(1 \odot t^k \cdot a \odot 1) = \varkappa(1 \odot t^k) \cdot \varkappa(a \odot 1) \tag{7.32}$$

$$\varkappa(a \odot 1 \cdot 1 \odot t^k) = \varkappa(a \odot 1) \cdot \varkappa(1 \odot t^k) \tag{7.33}$$

(7.30):

$$\varkappa(a \odot 1) \cdot \varkappa(b \odot 1) = \sum_{(a)} (a' \odot 1 \odot a'' \odot 1) \cdot \sum_{(b)} (b' \odot 1 \odot b'' \odot 1) =$$

$$= \sum_{(a),(b)} a'b' \odot 1 \odot a''b'' \odot 1 = \varkappa((a \cdot b) \odot 1) = \varkappa(a \odot 1 \cdot b \odot 1)$$

(7.31):

$$\varkappa(1 \odot t^k) \cdot \varkappa(1 \odot t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot 1 \odot t^i \odot z^i \odot t^{k-i} \cdot \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j}_q \cdot 1 \odot t^j \odot z^j \odot t^{l-j} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \binom{k}{i}_q \cdot \binom{l}{j}_q \cdot \Big((1 \odot t^i) \cdot (1 \odot t^j) \Big) \odot \Big((z^i \odot t^{k-i}) \cdot (z^j \odot t^{l-j}) \Big) = (7.14) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \binom{k}{i}_q \cdot \binom{l}{j}_q \cdot \Big(1 \odot t^{i+j} \Big) \odot \Big((z^i \cdot (\mathsf{M}_\omega^\star)^{k-i}(z^j) \odot t^{k+l-i-j} \Big) = (7.12) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \binom{k}{i}_q \cdot \binom{l}{j}_q \cdot q^{(k-i)j} \cdot 1 \odot t^{i+j} \odot z^{i+j} \odot t^{k+l-i-j} =$$

$$= \begin{pmatrix} i+j=m \\ j=m-i \\ 0 \leqslant m \leqslant k+l \\ \max\{0, m-l\} \leqslant i \leqslant \min\{k, m\} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k+l} \sum_{\max\{0,m-l\} \leqslant i \leqslant \min\{k,m\}} \binom{k}{i}_q \cdot \binom{l}{m-i}_q \cdot q^{(k-i)(m-i)} \cdot 1 \odot t^m \odot z^m \odot t^{k+l-m} = (7.5) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k+l} \binom{k+l}{m}_q \cdot 1 \odot t^m \odot z^m \odot t^{k+l-m} = \varkappa(1 \odot t^{k+l}) = \varkappa(1 \odot t^k \cdot 1 \odot t^l)$$

(7.32):

$$\varkappa(1 \odot t^k) \cdot \varkappa(a \odot 1) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot 1 \odot t^i \odot z^i \odot t^{k-i} \cdot \sum_{(a)} a' \odot 1 \odot a'' \odot 1 =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{(a)} \binom{k}{i}_q \cdot \Big((1 \odot t^i) \cdot (a' \odot 1) \Big) \odot \Big((z^i \odot t^{k-i}) \cdot (a'' \odot 1) \Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \sum_{(a)} \binom{k}{i}_q \cdot (\mathsf{M}_\omega^\star)^i(a') \odot t^i \odot z^i (\mathsf{M}_\omega^\star)^{k-i}(a'') \odot t^{k-i} = (1.40) =$$

$$= \varkappa((\mathsf{M}_\omega^\star)^k(a) \odot t^k) = (7.14) = \varkappa(1 \odot t^k \cdot a \odot 1)$$

(7.33):

$$\begin{aligned}
\varkappa(a\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^k) &= \sum_{(a)} a'\odot 1\odot a''\odot 1\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}_q\cdot 1\odot t^i\odot z^i\odot t^{k-i} = \\
&= \sum_{(a)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}_q\cdot\Big((a'\odot 1)\cdot(1\odot t^i)\Big)\odot\Big((a''\odot 1)\cdot(z^i\odot t^{k-i})\Big) = \\
&= \sum_{(a)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}_q\cdot a'\odot t^i\odot a''z^i\odot t^{k-i} = (7.16) = \varkappa(a\odot t^k) = \varkappa(a\odot 1\cdot 1\odot t^k)
\end{aligned}$$

Из (7.30)-(7.33) следует что коумножение (7.16) является гомоморфизмом алгебр:

$$\begin{aligned}
&\varkappa(a\odot t^k\cdot b\odot t^l) = \varkappa(a\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot t^{k+l}) = \varkappa(a\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot 1\cdot 1\odot t^{k+l}) = (7.33) = \\
&= \varkappa(a\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^{k+l}) = \varkappa(a\odot 1\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^k\cdot 1\odot t^l) = \\
&= (7.30),(7.31) = \varkappa(a\odot 1)\cdot\varkappa((\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^k)\cdot\varkappa(1\odot t^l) = \\
&= (7.33) = \varkappa(a\odot 1)\cdot\varkappa((\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot 1\cdot 1\odot t^k)\cdot\varkappa(1\odot t^l) = \\
&= \varkappa(a\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^k\cdot b\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^l) = \\
&= (7.32) = \varkappa(a\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^k)\cdot\varkappa(b\odot 1)\cdot\varkappa(1\odot t^l) = (7.33) = \\
&= \varkappa(a\odot 1\cdot 1\odot t^k)\cdot\varkappa(b\odot 1\cdot 1\odot t^l) = \varkappa(a\odot t^k)\cdot\varkappa(b\odot t^l)
\end{aligned}$$

□

Лемма 7.7. *Формулы* (7.18) *и* (7.24) *задают антиподы в биалгебрах* $H\odot\mathcal{R}(\mathbb{C})$ *и* $H^\star\circledast\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, *сопряженные друг другу относительно билинейной формы* (7.26):

$$\langle\sigma(u),\alpha\rangle = \langle u,\sigma(\alpha)\rangle \tag{7.34}$$

Доказательство. Покажем, что формула (7.18) задает антипод в $H\odot\mathcal{R}(\mathbb{C})$. Для этого сначала нужно убедиться, что σ – антигомоморфизм:

$$\begin{aligned}
&\sigma(a\odot t^k\cdot b\odot t^l) = \sigma(a\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\odot t^{k+l}) = \\
&= (-1)^{k+l}\cdot q^{-\frac{(k+l)(k+l+1)}{2}}\cdot z^{-k-l}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{k+l}\Bigg(\sigma_H\Big(a\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\Big)\Bigg)\odot t^{k+l} = \\
&= (-1)^{k+l}\cdot q^{-\frac{(k+l)(k+l+1)}{2}}\cdot z^{-k-l}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{k+l}\Bigg(\sigma_H\Big((\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b)\Big)\cdot\sigma_H(a)\Bigg)\odot t^{k+l} = \\
&= (-1)^{k+l}\cdot q^{-\frac{(k+l)(k+l+1)}{2}}\cdot z^{-k-l}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{l}\Bigg(\Big((\mathsf{M}^\star_\omega)^k\circ\sigma_H\circ(\mathsf{M}^\star_\omega)^k\Big)(b)\Bigg)\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{k+l}(\sigma_H(a))\odot t^{k+l} = \\
&= (1.38) = (-1)^{k+l}\cdot q^{-\frac{k^2+l^2+k+l}{2}}\cdot q^{-kl}\cdot z^{-k-l}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{l}(\sigma_H(b))\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{k+l}(\sigma_H(a))\odot t^{k+l} = \\
&= (-1)^{k+l}\cdot q^{-\frac{k(k+1)+l(l+1)}{2}}\cdot z^{-l}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{l}(\sigma_H(b))\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{l}\Big(z^{-k}(\mathsf{M}^\star_\omega)^{k}(\sigma_H(a))\Big)\odot t^{k+l} = \\
&= (-1)^{l}\cdot q^{-\frac{l(l+1)}{2}}\cdot z^{-l}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{l}(\sigma_H(b))\odot t^l\cdot(-1)^k\cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}}\cdot z^{-k}\cdot(\mathsf{M}^\star_\omega)^{k}(\sigma_H(a))\odot t^k = \\
&= \sigma(b\odot t^l)\cdot\sigma(a\odot t^k)
\end{aligned}$$

Теперь заметим, что диаграмма (1.18) становится коммутативной при подстановке в нее в качестве аргумента $a \odot 1$:

$$
\begin{tikzcd}
& \sum\limits_{(a)} a' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \odot a'' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \arrow[r, mapsto, bend left, "\sigma \otimes 1_H"] & \sum\limits_{(a)} \sigma_H(a') \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \odot a'' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \arrow[dr, mapsto, bend right, "\mu"'] & \\
& & & \sum\limits_{(a)} \sigma_H(a') \cdot a'' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \arrow[d, equal] \\
a \odot 1 \arrow[uur, mapsto, bend left, "\varkappa"] \arrow[ddr, mapsto, bend right, "\varkappa"'] \arrow[rr, mapsto, "\varepsilon"] & & \varepsilon_H(a) \arrow[r, mapsto, "\iota"] & \varepsilon_H(a) \cdot 1_H \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \\
& & & \sum\limits_{(a)} a' \cdot \sigma_H(a'') \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \arrow[u, equal] \\
& \sum\limits_{(a)} a' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \odot a'' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \arrow[r, mapsto, bend right, "1_H \otimes \sigma"'] & \sum\limits_{(a)} a' \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \odot \sigma_H(a'') \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \arrow[ur, mapsto, bend left, "\mu"] &
\end{tikzcd}
$$

или $1 \odot t$:

$$
\begin{tikzcd}
& 1 \odot 1 \odot 1 \odot t + 1 \odot t \odot z \odot 1 \arrow[r, mapsto, bend left, "\sigma \otimes 1_H"] & 1 \odot 1 \odot 1 \odot t - q^{-1} z^{-1} \odot t \odot z \odot 1 \arrow[dr, mapsto, bend right, "\mu"'] & \\
& & & 1 \odot t - q^{-1} q \cdot z^{-1} z \odot t \arrow[d, equal] \\
1 \odot t \arrow[uur, mapsto, bend left, "\varkappa"] \arrow[ddr, mapsto, bend right, "\varkappa"'] \arrow[rr, mapsto, "\varepsilon"] & & 0 \arrow[r, mapsto, "\iota"] & 0 \\
& & & -q^{-1} z^{-1} \odot t + q^{-1} \cdot z^{-1} \odot t \arrow[u, equal] \\
& 1 \odot 1 \odot 1 \odot t + 1 \odot t \odot z \odot 1 \arrow[r, mapsto, bend right, "1_H \otimes \sigma"'] & -q^{-1} 1 \odot 1 \odot z^{-1} \odot t + 1 \odot t \odot z^{-1} \odot 1 \arrow[ur, mapsto, bend left, "\mu"] &
\end{tikzcd}
$$

По лемме об антиподе 1.1 отсюда следует, что диаграмма (1.18) будет коммутативна и при подстановке в нее всевозможных произведений $a \odot 1$ и $1 \odot t$. В частности, при подстановке $a \odot t^k$. То есть 1.1 коммутативна (при любом аргументе), и мы получаем, что отображение (7.18) – антипод в $H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Далее, в силу симметрии формул, отображение (7.24) также будет антиподом в $H^\star \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$.

Нам остается проверить, что билинейная форма (7.26) превращает антипод (7.18) в антипод (7.24). Понятно, что формула (7.34) эквивалентна формуле

$$\langle \sigma(a \odot t^k), \alpha \circledast \tau^l \rangle = \langle a \odot t^k, \sigma(\alpha \circledast \tau^l) \rangle$$

При $k \neq l$ обе части здесь будут равны нулю, поэтому важно проверить лишь случай $k = l$. Действительно,

$$
\begin{gathered}
\langle \sigma(a \odot t^k), \alpha \circledast \tau^k \rangle = (7.18) = \langle (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot z^{-k} \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k (\sigma_H(a)) \odot t^k, \alpha \circledast \tau^k \rangle = \\
= (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle z^{-k} \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k (\sigma_H(a)), \alpha \rangle \cdot (k)!_q = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle (\mathsf{M}^\star_\omega)^k (\sigma_H(a)), (\mathsf{M}^\star_{z^{-1}})^k (\alpha) \rangle \cdot (k)!_q = \\
= (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle \sigma_H(a), \omega^k * (\mathsf{M}^\star_{z^{-1}})^k (\alpha) \rangle \cdot (k)!_q = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle a, \sigma^\star_H \Big((\omega^k * (\mathsf{M}^\star_{z^{-1}})^k (\alpha) \Big) \rangle \cdot (k)!_q = \\
= (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle a, \omega^{-k} * \sigma^\star_H \Big((\mathsf{M}^\star_{z^{-1}})^k (\alpha) \Big) \rangle \cdot (k)!_q = (1.38) = \\
= (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle a, \omega^{-k} * (\mathsf{M}^\star_z)^k (\sigma^\star_H(\alpha)) \rangle \cdot (k)!_q = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot \langle a \odot t^k, \omega^{-k} * (\mathsf{M}^\star_z)^k (\sigma^\star_H(\alpha)) \circledast \tau^k \rangle = \\
= (7.24) = \langle a \odot t^k, \sigma(\alpha \circledast \tau^k) \rangle
\end{gathered}
$$

$\square$

Цепочки $H \odot^z_\omega \mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset H \odot^z_\omega \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset H \odot^z_\omega \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset H \odot^z_\omega \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ **и** $H \circledast^z_\omega \mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset H \circledast^z_\omega \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset H \circledast^z_\omega \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset H \circledast^z_\omega \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$**.**

Те же формулы и рассуждения, что применялись нами в теореме 7.6, позволяют определить, помимо $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и $H^\star \underset{z}{\overset{\omega}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, целую серию очень похожих стереотипных алгебр Хопфа. Это алгебры

— косых многочленов $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и $H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$,

— косых целых функций $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{O}(\mathbb{C})$,

— косых аналитических функционалов $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$ и $H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C})$,

— косых степенных рядов $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ и $H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$.

Наглядно связь между ними удобно изображается в виде следующих двух цепочек вложений:

$$H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$$

и

$$H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$$

Если H – инъективная алгебра Хопфа, то будет определена верхняя цепочка, если H – проективная, то будет определена нижняя цепочка, а если H – жесткая стереотипная алгебра Хопфа, то обе эти цепочки будут определены, и, очевидно, они будут совпадать.

Теорема 7.6 корректно определяет только первое звено первой цепочки и последнее звено второй цепочки. Если давать аккуратное определение всем звеньям, то по совести нужно было бы сформулировать еще три теоремы, подобные 7.6.

Чтобы не возиться с этим, можно поступить двумя способами: либо просто сказать, что остальные звенья цепочек определяются по аналогии (только с заменой, при необходимости, $\odot$ на $\circledast$, а $\mathcal{R}$ на $\mathcal{O}$). Либо можно объединить все четыре теоремы (одну уже доказанную, и три еще не сформулированные) в следующее довольно громоздкое утверждение:

Теорема 7.7. *Пусть*

— *F обозначает какую-нибудь из двух алгебр Хопфа $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ или $\mathcal{O}(\mathbb{C})$,*

— *H – произвольная инъективная стереотипная алгебра Хопфа,*

— *(z, ω) – какая-нибудь квантовая пара в H с параметром $q \in \mathbb{C}^\times$.*

Тогда[7]

(a) *тензорное произведение $H \odot F$ обладает единственной структурой инъективной алгебры Хопфа с алгебраическими операциями, определенными формулами:*

$$\textit{умножение:} \quad a \odot t^k \cdot b \odot t^l = a \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k(b) \odot t^{k+l} \tag{7.35}$$

$$\textit{единица:} \quad 1_{H \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})} = 1_H \odot 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C})} \tag{7.36}$$

$$\textit{коумножение:} \quad \varkappa(a \odot t^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_q \cdot \theta\Big(\big(1_H \odot \mathsf{M}^i_z\big)(\varkappa_H(a)) \odot t^i \odot t^{k-i}\Big) = \tag{7.37}$$

$$= \sum_{(a)} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_q \cdot a' \odot t^i \odot (z^i \cdot a'') \odot t^{k-i}$$

$$\textit{коединица:} \quad \varepsilon(a \odot t^k) = \begin{cases} \varepsilon_H(a), & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{7.38}$$

$$\textit{антипод:} \quad \sigma(a \odot t^k) = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}} \cdot z^{-k} \cdot (\mathsf{M}^\star_\omega)^k(\sigma_H(a)) \odot t^k \tag{7.39}$$

$H \odot F$ с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} F$;

[7] Здесь, по-прежнему, θ – изоморфизм функторов (1.13), а $(k)!_q$ – квантовый факториал, определенный формулой (7.2).

(b) *тензорное произведение $H^\star \circledast F^\star$ обладает единственной структурой проективной алгебры Хопфа с алгебраическими операциями, определенными формулами*

$$\text{умножение:}\quad \alpha\circledast\tau^k * \beta\circledast\tau^l = \alpha\cdot(\mathsf{M}_z^\star)^k(\beta)\circledast\tau^{k+l} \tag{7.40}$$

$$\text{единица:}\quad 1_{H^\star\circledast\mathcal{R}(\mathbb{C})} = 1_{H^\star}\circledast 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})} \tag{7.41}$$

$$\text{коумножение:}\quad \varkappa(\alpha\circledast\tau^k) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}_q\cdot\theta\Big(\big(\mathsf{id}_{H^\star}\circledast\mathsf{M}_\omega^i\big)(\varkappa_{H^\star}(\alpha))\circledast\tau^i\circledast\tau^{k-i}\Big) = \tag{7.42}$$

$$= \sum_{(\alpha)}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}_q\cdot\alpha'\circledast\tau^i\circledast(\omega^i\cdot\alpha'')\circledast\tau^{k-i}$$

$$\text{коединица:}\quad \varepsilon(\alpha\circledast\tau^k) = \begin{cases}\varepsilon_{H^\star}(\alpha), & k=0\\ 0, & k>0\end{cases} \tag{7.43}$$

$$\text{антипод:}\quad \sigma(\alpha\circledast\tau^k) = (-1)^k\cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\omega^{-k} * (\mathsf{M}_z^\star)^k(\sigma_{H^\star}(\alpha))\circledast\tau^k \tag{7.44}$$

$H^\star\circledast F^\star$ с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $H^\star \underset{z}{\overset{\omega}{\circledast}} F^\star$;

(c) *билинейная форма*

$$\left\langle\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k\odot t^k, \sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k\circledast\tau^k\right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}}\langle u_k,\alpha_k\rangle\cdot(k)!_q \tag{7.45}$$

превращает $H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} F$ и $H^\star \underset{z}{\overset{\omega}{\circledast}} F^\star$ в дуальную пару стереотипных алгебр Хопфа.

Если же, при тех же прочих предположениях, H – проективная стереотипная алгебра Хопфа, то

(a) *тензорное произведение $H\circledast F$ обладает единственной структурой проективной алгебры Хопфа с алгебраическими операциями, определенными формулами* (7.35)-(7.39)*, только с заменой инъективного тензорного произведения $\odot$ на проективное тензорное произведение $\circledast$; $H\circledast F$ с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} F$;*

(b) *тензорное произведение $H^\star\odot F^\star$ обладает единственной структурой инъективной алгебры Хопфа с алгебраическими операциями, определенными формулами* (7.40)-(7.44)*, только с заменой проективного тензорного произведения $\circledast$ на инъективное тензорное произведение $\odot$; $H^\star\odot F^\star$ с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $H^\star \underset{z}{\overset{\omega}{\odot}} F^\star$*

(c) *билинейная форма*

$$\left\langle\sum_{k\in\mathbb{N}}u_k\circledast t^k, \sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k\odot\tau^k\right\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}}\langle u_k,\alpha_k\rangle\cdot(k)!_q \tag{7.46}$$

превращает $H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} F$ и $H^\star \underset{z}{\overset{\omega}{\odot}} F^\star$ в дуальную пару стереотипных алгебр Хопфа.

Как мы уже говорили, доказывается это утверждение в точности как теорема 7.6.

Предложение 7.2. *Пусть H – инъективная алгебра Хопфа, и пусть (z,ω) – квантовая пара в H с параметром $q\in\mathbb{C}^\times$. Тогда правила*

$$a\odot t^k\mapsto a\odot t^k\mapsto a\odot\tau^k\mapsto a\odot\tau^k\qquad(k\in\mathbb{N},\quad a\in H)$$

однозначно определяют цепочку (непрерывных) гомоморфизмов инъективных стереотипных алгебр Хопфа:

$$H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}(\mathbb{C})^\star \to H \underset{\omega}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})^\star$$

Предложение 7.3. *Пусть H – проективная алгебра Хопфа, и пусть (z,ω) – квантовая пара в H с параметром $q\in\mathbb{C}^\times$. Тогда правила*

$$a\circledast t^k\mapsto a\circledast t^k\mapsto a\circledast\tau^k\mapsto a\circledast\tau^k\qquad(k\in\mathbb{N},\quad a\in H)$$

однозначно определяют цепочку (непрерывных) гомоморфизмов проективных стереотипных алгебр Хопфа:

$$H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{O}(\mathbb{C}) \to H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{O}(\mathbb{C})^\star \to H \underset{\omega}{\overset{z}{\circledast}} \mathcal{R}(\mathbb{C})^\star$$

(c) Квантовая группа ‘$az + b$’ $= \mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$

В этом пункте мы покажем, что квантовая группа ‘$az+b$’ (см. [48, 40, 47, 28]) является частным случаем конструкции, описанной в теореме 7.6.

Группа $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ аффинных преобразований плоскости. Группа аффинных преобразований комплексной плоскости, часто обозначаемая ‘$az + b$’, с алгебраической точки зрения представляет собой полупрямое произведение $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ комплексной окружности $\mathbb{C}^\times$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$, в котором $\mathbb{C}^\times$ действует на $\mathbb{C}$ обычным умножением. Иначе говоря, $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ есть просто декартово произведение $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ с алгебраическими операциями

$$\begin{array}{lll} \text{умножение:} & (a,x)\cdot(b,y) = (ab, xb+y) & (a,b\in\mathbb{C}^\times,\ x,y\in\mathbb{C}) \\ \text{единица:} & 1_{\mathbb{C}^\times\ltimes\mathbb{C}} = (1,0) & \\ \text{обратный элемент:} & (a,x)^{-1} = \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{x}{a}\right) & (a\in\mathbb{C}^\times,\ x\in\mathbb{C}) \end{array}$$

Ясно, что это будет связная группа Штейна. Более того, $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ будет алгебраической группой, поскольку ее можно представить как линейную группу матрицами вида

$$(a,x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \qquad (a\in\mathbb{C}^\times,\ x\in\mathbb{C})$$

(при этом умножение, единица и обратный элемент превращаются в обычные операции над матрицами).

Стереотипные алгебры $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. Символом $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ мы, как обычно, обозначаем алгебру многочленов на алгебраической группе $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$. В соответствии с общим подходом § 3(b), мы наделяем пространство $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ сильнейшей локально выпуклой топологией. Сопряженное пространство потоков $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ будет алгеброй относительно обычной свертки функционалов (3.14). Как любое сопряженное пространство к стереотипному пространству, мы наделяем его топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. В данном случае это эквивалентно $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$-слабой топологии.

Напомним, что буквами z^n и t^k мы условились обозначать базисные мономы в пространствах $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{R}(\mathbb{C})$ (мы определяли их формулами (3.30) и (3.52)). В соответствии с общим обозначением (1.24), базисные мономы в пространстве функций $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ теперь будет логично обозначать символом $z^n \boxdot t^k$:

$$(z^n \boxdot t^k)(a,x) := a^n \cdot x^k, \qquad a\in\mathbb{C}^\times,\ x\in\mathbb{C}$$

Точно так же, продолжая старые обозначения ζ_n и τ^k из формул (3.31) и (3.59), условимся символом $\zeta_n \circledast \tau^k$ обозначать функционал на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ взятия n-го коэффициента ряда Лорана по первой переменной и одновременно k-й производной в точке $(1,0)$ по второй переменной:

$$\zeta_n \circledast \tau^k(u) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u(x, e^{2\pi i t})\Big|_{x=0} \mathsf{d}\, t = \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} \int_0^1 e^{-2\pi i n t} u(x, e^{2\pi i t})\, \mathsf{d}\, t\Big|_{x=0} \tag{7.47}$$

Предложение 7.4. *1) Функции $\{z^n \boxdot t^k;\ n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\}$ образуют алгебраический базис в пространстве $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ многочленов на $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$: всякий многочлен $u\in\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ однозначно раскладывается в ряд*

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}} u_{n,k}\cdot z^n \boxdot t^k, \qquad \mathsf{card}\{(n,k):\ u_{n,k}\neq 0\} < \infty, \tag{7.48}$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$u_{n,k} = \frac{1}{k!}\cdot \zeta_n \circledast \tau^k(u) \tag{7.49}$$

Соответствие $u \leftrightarrow \{u_{n,k};\ n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\}$ устанавливает изоморфизм топологических векторных пространств

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$$

2) Функционалы $\{\zeta_n \circledast \tau^k;\ n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{N}\}$ образуют базис в стереотипном пространстве $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$: всякий функционал $\alpha\in\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ однозначно раскладывается в ряд (сходящийся в пространстве $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$)

$$\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n,k}\cdot \zeta_n \circledast \tau^k, \tag{7.50}$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$\alpha_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \alpha(z^n \boxdot t^k) \tag{7.51}$$

Соответствие $\alpha \leftrightarrow \{\alpha_{n,k};\ n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ *устанавливает изоморфизм топологических векторных пространств*

$$\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}}$$

3) Базисы $\{z^n \boxdot t^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ *и* $\{\zeta_n \circledast \tau^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ *сопряжены друг другу с точностью до константы* $k!$

$$\langle z^m \boxdot t^k, \zeta_n * \tau^l \rangle = \langle z^m, \zeta_n \rangle \cdot \langle t^k, \tau^l \rangle = \begin{cases} 0, & (m,k) \neq (n,l) \\ k!, & (m,k) = (n,l) \end{cases} \tag{7.52}$$

а действие функционалов $\alpha \in \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ *на функции* $u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ *описывается формулой*

$$\langle u, \alpha \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} u_{n,k} \cdot \alpha_{n,k} \cdot k! \tag{7.53}$$

Замечание 7.1. Функционал $\zeta_n \circledast \tau^k$ можно представлять себе как свертку двух своих компонент (причем здесь будет важен порядок, в котором они перемножаются): если через Z_n обозначить функционал вычисления n-го коэффициента ряда Лорана по первой переменной в точке $(1,0)$,

$$Z_n(u) = \zeta_n \circledast \tau^0(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{u(z,0)}{z^{n+1}} \,\mathsf{d}\, z = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} u(e^{2\pi i t}, 0) \,\mathsf{d}\, t, \qquad u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}), \tag{7.54}$$

а через T^k функционал взятия k-й производной по второй переменной в точке $(1,0)$ на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$,

$$T^k(u) = \zeta_0 \circledast \tau^k(u) = \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u(1,x)\Big|_{x=0}, \qquad u \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}), \tag{7.55}$$

то будут справедливы следующие формулы:

$$Z_n * T^k = \zeta_n \circledast \tau^k, \qquad T^k * Z_n = Z_{n-k} * T^k = \zeta_{n-k} \circledast \tau^k \tag{7.56}$$

Для доказательства можно воспользоваться формулами (3.15): во-первых,

$$\delta^a * T^k = a \cdot T^k$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}(\delta^{(e^{2\pi i t},0)} * T^k)(u) &= ((e^{2\pi i t},0) \cdot T^k)(u) = T^k(u \cdot (e^{2\pi i t},0)) = \\ &= \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u\Big((e^{2\pi i t},0) \cdot (1,x)\Big)\Big|_{x=0} = \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u(e^{2\pi i t}, x)\Big|_{x=0}\end{aligned} \tag{7.57}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}(Z_n * T^k)(u) &= \left(\int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} \,\mathsf{d}\, t * T^k\right)(u) = \left(\int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)*T^k} \,\mathsf{d}\, t\right)(u) = \\ &= \int_0^1 \left(e^{-2\pi i n t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} * T^k\right)(u) \,\mathsf{d}\, t = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u(e^{2\pi i t}, x)\Big|_{x=0} \mathsf{d}\, t\end{aligned}$$

И, во-вторых,

$$T^k * \delta^a = T^k \cdot a$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}(T^k * \delta^{(e^{2\pi i t},0)})(u) &= (T^k \cdot (e^{2\pi i t},0))(u) = T^k((e^{2\pi i t},0) \cdot u) = \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u\Big((1,x) \cdot (e^{2\pi i t},0)\Big)\Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, x^k} u(e^{2\pi i t}, x \cdot e^{2\pi i t})\Big|_{x=0} = (e^{2\pi i t})^k \cdot \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}\, y^k} u(e^{2\pi i t}, y)\Big|_{y=0} = (7.57) = e^{2\pi i k t} \cdot (\delta^{(e^{2\pi i t},0)} * T^k)(u)\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$T^k * \delta^{(e^{2\pi i t},0)} = e^{2\pi i k t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} * T^k \tag{7.58}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} T^k * Z_n = T^k * \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} \,\mathsf{d}\, t = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot T^k * \delta^{(e^{2\pi i t},0)} \,\mathsf{d}\, t = (7.58) = \\ = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} \cdot e^{2\pi i k t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} * T^k \,\mathsf{d}\, t = \int_0^1 e^{-2\pi i (n-k) t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} * T^k \,\mathsf{d}\, t = \\ = \int_0^1 e^{-2\pi i (n-k) t} \cdot \delta^{(e^{2\pi i t},0)} \,\mathsf{d}\, t * T^k = Z_{n-k} * T^k \end{aligned}$$

Стереотипные алгебры $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. Алгебру $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ голоморфных функций на $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ мы, как обычно, наделяем топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$. Ее сопряженная алгебра $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ наделяется топологией равномерной сходимости на компактах в $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, и умножением в ней будет свертка (3.14).

Предложение 7.5. *1) Функции $\{z^n \boxdot t^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ образуют базис в стереотипном пространстве $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ голоморфных функций на $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$: всякая функция $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ однозначно раскладывается в (сходящийся в $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) ряд*

$$u = \sum_{k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}} u_{n,k} \cdot z^n \boxdot t^k, \qquad \forall C > 0 \quad \sum_{k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}} |u_{k,n}| \cdot C^{k+|n|} < \infty, \tag{7.59}$$

коэффициенты которого (непрерывно зависят от u и) вычисляются по формуле

$$u_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \zeta_n \circledast \tau^k(u) \tag{7.60}$$

Топологию пространства $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ можно описать полунормами, выражающимися через коэффициенты разложения (7.59):

$$||u||_C = \sum_{k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}} |u_{k,n}| \cdot C^{k+|n|}, \qquad C \geqslant 1 \tag{7.61}$$

2) Функционалы $\{\zeta_n \circledast \tau^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ образуют базис пространства $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$: всякий функционал $\alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ однозначно раскладывается в (сходящийся в $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) ряд

$$\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{Z}} \alpha_{n,k} \cdot \zeta_n \circledast \tau^k, \tag{7.62}$$

коэффициенты которого (непрерывно зависят от α и) вычисляются по формуле

$$\alpha_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \alpha(z^n \boxdot t^k) \tag{7.63}$$

Топологию пространства $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ можно описать полунормами, выражающимися через коэффициенты разложения (7.62):

$$|||\alpha|||_r = \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} r_{n,k} \cdot |\alpha_{n,k}| \cdot k!, \qquad r_{n,k} \geqslant 0 : \ \forall C \geqslant 1 \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} r_{k,n} \cdot C^{k+|n|} < \infty \tag{7.64}$$

3) Базисы $\{z^n \boxdot t^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ и $\{\zeta_n \circledast \tau^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ сопряжены друг другу с точностью до константы $k!$

$$\langle z^m \boxdot t^k, \zeta_n * \tau^l \rangle = \langle z^m, \zeta_n \rangle \cdot \langle t^k, \tau^l \rangle = \begin{cases} 0, & (m,k) \neq (n,l) \\ k!, & (m,k) = (n,l) \end{cases} \tag{7.65}$$

а действие функционалов $\alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ на функции $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ описывается формулой

$$\langle u, \alpha \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} u_{n,k} \cdot \alpha_{n,k} \cdot k! \tag{7.66}$$

$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ как алгебры Хопфа. Алгебры $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, как стандартные функциональные алгебры на группах, наделены естественной структурой алгебр Хопфа (в общем виде этот факт мы отмечали в теоремах 3.2 и 3.1). Следующие предложения описывают структуру этих алгебр Хопфа.

Предложение 7.6. *Алгебра $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, алгебра $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) является ядерной алгеброй Хопфа-Браунера (соответственно, Хопфа-Фреше) с алгебраическим операциями, определенными на базисных элементах $z^n \boxdot t^k$ формулами*

$$z^m \boxdot t^k \cdot z^n \boxdot t^l = z^{m+n} \boxdot t^{k+l} \qquad 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})} = z^0 t^0 \tag{7.67}$$

$$\varkappa(z^n \boxdot t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot z^n t^i \odot z^{n+i} t^{k-i} \qquad \varepsilon(z^n \boxdot t^k) = \begin{cases} 0, & (n,k) \neq (0,0) \\ 1, & (n,k) = (0,0) \end{cases} \tag{7.68}$$

$$\sigma(z^n \boxdot t^k) = (-1)^k z^{-k-n} t^k \tag{7.69}$$

Как следствие, общая формула умножения в $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ выглядит так:

$$u \cdot v = \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{j=0}^{k} \sum_{i\in\mathbb{Z}} u_{i,j} \cdot v_{n-i,k-j} \right) \cdot z^n \boxdot t^k. \tag{7.70}$$

Доказательство. Коумножение, коединица и антипод вычисляются по формулам (3.5)-(3.7). Например, коумножение:

$$\widetilde{\varkappa}(z^n \boxdot t^k)\Big((a,x),(b,y)\Big) = (z^n \boxdot t^k)\Big((a,x)\cdot(b,y)\Big) = (z^n \boxdot t^k)(ab, xb+y) = (ab)^n (xb+y)^k =$$

$$= a^n b^n \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i b^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^n x^i b^{n+i} y^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (z^n \boxdot t^i) \boxdot (z^{n+i} \boxdot t^{k-i})\Big((a,x),(b,y)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\widetilde{\varkappa}(z^n \boxdot t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot (z^n \boxdot t^i) \boxdot (z^{n+i} \boxdot t^{k-i})$$

$$\Downarrow$$

$$\varkappa(z^n \boxdot t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot z^n \boxdot t^i \odot z^{n+i} \boxdot t^{k-i}$$

$\square$

Предложение 7.7. *Алгебра $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, алгебра $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) является ядерной алгеброй Хопфа-Фреше (соответственно, Хопфа-Браунера) с алгебраическим операциями, определенными на базисных элементах $\zeta_n \circledast \tau^k$ формулами*

$$(\zeta_m \boxast \tau^k) * (\zeta_n \boxast \tau^l) = \begin{cases} \zeta_m \boxast \tau^{k+l}, & m+k=n \\ 0, & m+k \neq n \end{cases} \qquad 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_n \boxast \tau^0 \tag{7.71}$$

$$\varkappa(\zeta_n \boxast \tau^k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \zeta_m \boxast \tau^i \circledast \zeta_{n-m} \boxast \tau^{k-i} \qquad \varepsilon(\zeta_n \boxast \tau^k) = \begin{cases} 1, & (n,k) = (0,0) \\ 0, & (n,k) \neq (0,0) \end{cases} \tag{7.72}$$

$$\sigma(\zeta^n \boxast \tau^k) = (-1)^k \cdot \zeta_{-n-k} \boxast \tau^k \tag{7.73}$$

Как следствие, общая формула умножения в $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ выглядит так:

$$\alpha * \beta = \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{k} \alpha_{n,j} \cdot \beta_{n+j,k-j} \Big) \cdot \zeta_n \boxast \tau^k. \tag{7.74}$$

Доказательство. Эти формулы получаются сопряжением из формул (7.67)-(7.69). Например, коумножение:

$$
\langle u \odot v, \varkappa(\zeta_n \circledast \tau^k)\rangle = \langle u \cdot v, \zeta_n \circledast \tau^k\rangle = \left\langle \sum_{r\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{l} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_{m,i} \cdot v_{r-m,l-i} \right) \cdot z^r t^l, \zeta_n \circledast \tau^k \right\rangle =
$$

$$
= k! \cdot \sum_{i=0}^{k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_{m,i} \cdot v_{n-m,k-i} = k! \cdot \sum_{i=0}^{k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{i!} \langle u, \zeta_m \circledast \tau^i\rangle \cdot \frac{1}{(k-i)!} \langle v, \zeta_{n-m} \circledast \tau^{k-i}\rangle =
$$

$$
= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \langle u \odot v, \zeta_m \circledast \tau^i \circledast \zeta_{n-m} \circledast \tau^{k-i}\rangle = \left\langle u \odot v, \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \zeta_m \circledast \tau^i \circledast \zeta_{n-m} \circledast \tau^{k-i} \right\rangle
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\varkappa(\zeta_n \circledast \tau^k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \zeta_m \circledast \tau^i \circledast \zeta_{n-m} \circledast \tau^{k-i}
$$

$\square$

Алгебры Хопфа $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. Квантовую группу '$az+b$', о которой мы говорили выше, можно определить, как алгебру Хопфа $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, в которой алгебраические операции специальным образом деформируются. Мы опишем здесь эту деформацию, причем параллельно с алгеброй $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ мы рассмотрим алгебру $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ – обе конструкции понадобятся нам ниже в теореме 7.8.

Построения начинаются с выбора константы $q \in \mathbb{C}^\times$.

Предложение 7.8. *На стереотипном пространстве $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) существует единственная структура жесткой стереотипной алгебры Хопфа с алгебраическим операциями, определенными на базисных элементах $z^n \boxdot t^k$ формулами*

$$
z^m \boxdot t^k \cdot z^n \boxdot t^l = q^{kn} \cdot z^{m+n} \boxdot t^{k+l} \qquad 1_{\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})} = z^0 \boxdot t^0 \tag{7.75}
$$

$$
\varkappa(z^n \boxdot t^k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot z^n \boxdot t^i \odot z^{n+i} \boxdot t^{k-i} \qquad \varepsilon(z^n \boxdot t^k) = \begin{cases} 0, & (n,k) \neq (0,0) \\ 1, & (n,k) = (0,0) \end{cases} \tag{7.76}
$$

$$
\sigma(z^n \boxdot t^k) = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2} - kn} \cdot z^{-k-n} \boxdot t^k \tag{7.77}
$$

Пространство $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$). При этом

1) *общая формула умножения в $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) принимает вид:*

$$
u \cdot v = \sum_{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^{i(n-m)} \cdot u_{m,i} \cdot v_{n-m,k-i} \right) \cdot z^n \boxdot t^k. \tag{7.78}
$$

2) *отображение*

$$
z^n \boxdot t^k \mapsto z^n \odot t^k
$$

устанавливает изоморфизм между $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) и алгеброй Хопфа косых многочленов (целых функций) с коэффициентами из $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ (соответственно, из $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$) относительно квантовой пары (z, δ^q) из предложения 7.1:

$$
\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \qquad \left(\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}(\mathbb{C}) \right) \tag{7.79}
$$

3) *при $q = 1$ алгебра Хопфа $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) превращается в алгебру Хопфа $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) со структурой алгебры Хопфа, описанной на с. 107:*

$$
\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) = \mathcal{R}_1(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \qquad \left(\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) = \mathcal{O}_1(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \right)
$$

Доказательство. Здесь все начинается с формул (7.79): отображение $z^n \boxdot t^k \mapsto z^n \odot t^k$ устанавливает изоморфизм стереотипных пространств

$$\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$$

(это в точности тот изоморфизм, который для общего случая записывался тождеством (3.9)). Этот изоморфизм индуцирует на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ структуру жесткой алгебры Хопфа из $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ (где эта структура определяется формулами (7.14)-(7.18)). При таком изоморфизме формулы (7.14)-(7.18) превращаются в формулы (7.75)-(7.77). Для их вывода нужно только воспользоваться первой формулой из (7.12):

$$\mathsf{M}^\star_{\delta^q}(z) = q \cdot z$$

Из нее мы получаем

$$(\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^k(z^n) = q^{kn} \cdot z^n$$

Затем, например, формула умножения (7.75) выводится из (7.14) так:

$$z^m \boxdot t^k \cdot z^n \odot t^l = z^m \cdot (\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^k(z^n) \cdot t^{k+l} = z^m \cdot q^{kn} \cdot z^n \odot t^{k+l} = q^{kn} \cdot z^{k+n} \odot t^{k+l}$$

Остальные формулы выводятся аналогично. Общая формула умножения (7.78) получается из (7.75):

$$u \cdot v = \left(\sum_{m\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}} u_{m,k} \cdot z^m \boxdot t^k \right) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}} v_{n,l} \cdot z^n \boxdot t^l \right) = \sum_{m\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}} u_{m,k} \cdot v_{n,l} \cdot z^m \boxdot t^k \cdot z^n \boxdot t^l =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}} \sum_{n\in\mathbb{Z},l\in\mathbb{N}} u_{m,k} \cdot v_{n,l} \cdot q^{kn} \cdot z^{m+n} t^{k+l} = \begin{pmatrix} n = r-m \\ l = s-k \end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{r\in\mathbb{Z},s\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}} q^{k(r-m)} \cdot u_{m,k} \cdot v_{r-m,s-k} \cdot z^{m+n} t^{k+l}$$

Остается добавить, что при $q = 1$ формулы (7.75)-(7.77) превращаются в формулы (7.67)-(7.69), поэтому алгебра Хопфа $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) превращается в алгебру Хопфа $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$). $\square$

Предложение 7.9. *На стереотипном пространстве $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) существует единственная структура жесткой стереотипной алгебры Хопфа с алгебраическим операциями, определенными на базисных элементах $\zeta_n \boxast \tau^k$ формулами*

$$(\zeta_m \boxast \tau^k) * (\zeta_n \boxast \tau^l) = \begin{cases} \zeta_m \boxast \tau^{k+l}, & m = n-k \\ 0, & m \neq n-k \end{cases} \qquad 1_{\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \zeta_n \boxast \tau^0 \tag{7.80}$$

$$\varkappa(\zeta_n \boxast \tau^k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}_q \cdot q^{i(n-m)} \cdot \zeta_m \boxast \tau^i \circledast \zeta_{n-m} \boxast \tau^{k-i} \qquad \varepsilon(\zeta_n \boxast \tau^k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \tag{7.81}$$

$$\sigma(\zeta^n \boxast \tau^k) = (-1)^k \cdot q^{-\frac{k(k+1)}{2} + k(n+k)} \zeta_{-n-k} \boxast \tau^k \tag{7.82}$$

Пространство $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) с такой структурой алгебры Хопфа обозначается $\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$). При этом

1) *общая формула умножения в $\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, в $\mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) принимает вид:*

$$\alpha * \beta = \sum_{n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_{n,i} \cdot \beta_{n+i,k-i} \right) \cdot \zeta_n \boxast \tau^k. \tag{7.83}$$

2) *отображение*

$$\zeta_n \boxast \tau^k \mapsto \zeta_n \circledast \tau^k$$

устанавливает изоморфизм между $\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) и алгеброй Хопфа косых степенных рядов (соответственно, аналитических функционалов) с коэффициентами из $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$ (соответственно, из $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$) относительно квантовой пары (δ^q, z) из предложения 7.1:

$$\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}), \qquad \mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \tag{7.84}$$

3) при $q=1$ алгебра Хопфа $\mathcal{R}_q^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}_q^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) превращается в алгебру Хопфа $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ (соответственно, $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$) со структурой алгебры Хопфа, описанной на с. 107:

$$\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) = \mathcal{R}_1^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \qquad \left(\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) = \mathcal{O}_1^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})\right)$$

Доказательство. Здесь тоже все содержится в формулах (7.84): отображение $\zeta_n \circledast \tau^k \mapsto \zeta_n \circledast \tau^k$ устанавливает изоморфизм стереотипных пространств

$$\mathcal{R}_q^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$$

(это сопряженный изоморфизм к изоморфизму (3.9)). Этот изоморфизм индуцирует на $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ структуру жесткой алгебры Хопфа из $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \overset{\delta^q}{\underset{z}{\circledast}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ (где эта структура определяется формулами (7.20)-(7.24)). При таком изоморфизме формулы (7.20)-(7.24) превращаются в формулы (7.80)-(7.82). Для их вывода нужно только воспользоваться двумя формулами:

$$\mathsf{M}_z^\star(\zeta_n) = \zeta_{n-1}, \qquad \delta^q * \zeta_n = q^n \cdot \zeta_n \tag{7.85}$$

Первая из них (она понадобится при доказательстве формул умножения и антипода), выводится так:

$$\langle u, \mathsf{M}_z^\star(\zeta_n)\rangle = \langle z \cdot u, \zeta_n\rangle = \left\langle z \cdot \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m \cdot z^m, \zeta_n \right\rangle = \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_m \cdot z^{m+1}, \zeta_n \right\rangle =$$
$$= \left\langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} u_{m-1} \cdot z^m, \zeta_n \right\rangle = u_{n-1} = \langle u, \zeta_{n-1}\rangle$$

А вторая (она будет нужна при доказательстве формулы коумножения) – так:

$$\delta^q * \zeta_n = (7.13) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} q^m \cdot \zeta_m * \zeta_n = (3.41) = q^n \cdot \zeta_n$$

□

$\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ **как алгебра с образующими и определяющими отношениями.** Нам остается объяснить, почему построенную алгебру $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ действительно можно отождествлять с квантовой группой ‘$az+b$’, то есть с той алгеброй Хопфа, которую обычно обозначают ‘$az+b$’ (см. [48, 40, 47, 28]). Формально ‘$az+b$’ определяется как алгебра Хопфа с тремя образующими t, z, z^{-1} и определяющими отношениями

$$t \cdot z = q \cdot z \cdot t \qquad z \cdot z^{-1} = 1 \qquad 1 = z^{-1} \cdot z \tag{7.86}$$
$$\varkappa(t) = t \otimes 1 + z \otimes t, \qquad \varkappa(z) = z \otimes z, \qquad \varkappa(z^{-1}) = z^{-1} \otimes z^{-1} \tag{7.87}$$
$$\varepsilon(t) = 0, \qquad \varepsilon(z) = 1, \qquad \varepsilon(z^{-1}) = 0 \tag{7.88}$$
$$\sigma(t) = -t \cdot z^{-1}, \qquad \sigma(z) = z^{-1}, \qquad \sigma(z^{-1}) = z, \tag{7.89}$$

Справедливо

Предложение 7.10. *Отображение,*

$$z \mapsto z \boxdot 1, \qquad z^{-1} \mapsto z^{-1} \boxdot 1, \qquad t \mapsto 1 \boxdot t$$

единственным образом продолжается до изоморфизма между алгебрами Хопфа ‘$az+b$’ и $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$.

Доказательство. Из (7.75) следует, что в $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ выполняются равенства

$$1 \boxdot t \cdot z \boxdot 1 = q \cdot z \boxdot 1 \cdot 1 \boxdot t, \qquad z \boxdot 1 \cdot z^{-1} \boxdot 1 = 1, \qquad 1 = z^{-1} \boxdot 1 \cdot z \boxdot 1$$

в которых можно узнать формулы (7.86), преобразованные действием нашего отображения. Это означает, что наше отображение однозначным образом продолжается до некоторого гомоморфизма алгебр φ : ‘$az+b' \to \mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. Этот гомоморфизм будет биекцией, потому что алгебраический базис $\{z^n t^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ в алгебре ‘$az+b$’ он переводит в алгебраический базис $\{z^n \boxdot t^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ в алгебре $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$.

То есть φ – изоморфизм алгебр. Заметим далее, что φ сохраняет коумножение на порождающих элементах:

$$(\varphi\otimes\varphi)(\varkappa(t)) = (\varphi\otimes\varphi)(t\otimes 1 + z\otimes t) = 1\boxdot t\otimes 1\boxdot 1 + z\boxdot 1\otimes 1\boxdot t = \varkappa(1\boxdot t) = \varkappa(\varphi(t))$$

и таким же образом,

$$(\varphi\otimes\varphi)(\varkappa(z)) = \varkappa(\varphi(z)), \qquad (\varphi\otimes\varphi)(\varkappa(z^{-1})) = \varkappa(\varphi(z^{-1}))$$

Поскольку операция коумножения, как и φ, является гомоморфизмом алгебр, из этого следует, что те же формулы верны для аргументов вида $z^n t^k$, и поэтому вообще для всех элементов алгебры '$az+b$'. Таким образом, φ сохраняет коумножение (на всех элементах). Точно также доказывается, что φ сохраняет коединицу и антипод (здесь используется тот факт, что коединица – тоже гомоморфизм, а антипод – антигомоморфизм). То есть φ – изоморфизмом алгебр Хопфа. $\square$

(d) Рефлексивность $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$

Диаграммы рефлексивности для $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$.

Теорема 7.8. *При любом $q\in\mathbb{C}^\times$ жесткая алгебра Хопфа $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ голоморфно рефлексивна, причем*

1) при $|q|=1$ ее диаграмма рефлексивности имеет вид

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) & \overset{\heartsuit}{\longmapsto} & \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{O}(\mathbb{C}) \cong \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \\
{}^\star\big\uparrow & & \big\downarrow{}^\star \\
\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) & \overset{\heartsuit}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \cong \mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})
\end{array} \tag{7.90}$$

2) а при $|q|\neq 1$ – вид:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) & \overset{\heartsuit}{\longmapsto} & \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) \\
{}^\star\big\uparrow & & \big\downarrow{}^\star \\
\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \cong \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}) & \overset{\heartsuit}{\longleftarrow\!\shortmid} & \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})
\end{array} \tag{7.91}$$

Для симметрии здесь можно заметить, что все упоминаемые здесь пространства-множители – $\mathcal{R}(\mathbb{C})$, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ – ядерны и встречаются только в парах вида Фреше-Фреше или Браунер-Браунер. Поэтому если в диаграммах (7.90)-(7.91) все (или какие-нибудь) инъективные тензорные произведения $\odot$ заменить на проективные тензорные произведения $\circledast$, то при этом будут получаться изоморфные диаграммы.

Оставшаяся часть этого параграфа посвящена доказательству теоремы 7.8. Мы проведем его в три этапа.

$\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \overset{\heartsuit}{\to} \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ при $|q|=1$.

Предложение 7.11. *При $|q|=1$ алгебра $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ является алгеброй Аренса-Майкла, а естественное вложение $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ – оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$:*

$$\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})^\heartsuit = \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$$

Доказательство. Это следует из того, что при $|q|=1$ полунормы (7.61) субмультипликативны на $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. $\square$

$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \odot^z_{\delta^q} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\heartsuit} \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \odot^z_{\delta^q} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ **при** $|q| \neq 1$**.** Напомним, что строение алгебр $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$ и $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ обсуждалось в § 3(c). В частности, там отмечалось, что топология $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$ порождается полунормами (3.47):

$$||u||_C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot C^{|n|}, \qquad C \geqslant 1.$$

В примере 5.2 мы уже отмечали, что эти полунормы субмультипликативны. Отметим еще два их свойства: во-первых, очевидно,

$$C \leqslant D \quad \Longrightarrow \quad \|u\|_C \leqslant \|u\|_D \tag{7.92}$$

и, во-вторых, при $|q| < 1$ справедливо неравенство

$$|q|^n \leqslant |q|^{-|n|}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{7.93}$$

из которого следует

$$\|\mathsf{M}^\star_{\delta^q}(u)\|_C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot |q|^n \cdot C^{|n|} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot |q|^{-|n|} \cdot C^{|n|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot \left(\frac{C}{|q|}\right)^{|n|} = \|u\|_{C/|q|}$$

то есть

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad \left\|(\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^i(u)\right\|_C \leqslant \|u\|_{C/|q|^i} \qquad (|q| < 1) \tag{7.94}$$

Точно так же, при $|q| > 1$ получаем

$$|q|^n \leqslant |q|^{|n|}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{7.95}$$

откуда

$$\|\mathsf{M}^\star_{\delta^q}(u)\|_C = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot |q|^n \cdot C^{|n|} \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot |q|^{|n|} \cdot C^{|n|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n| \cdot (C\cdot|q|)^{|n|} = \|u\|_{C\cdot|q|}$$

то есть

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad \left\|(\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^i(u)\right\|_C \leqslant \|u\|_{C\cdot|q|^i} \qquad (|q| > 1) \tag{7.96}$$

Условимся для удобства вычислений отождествлять в соответствии с предложением 7.10, символы $1 \boxdot t$ и $z \boxdot 1$ с символами z и t:

$$1 \boxdot t \equiv t, \qquad z \boxdot 1 \equiv z$$

Лемма 7.8. *Если $|q| \neq 1$ и r – субмультипликативная полунорма на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$, то для некоторого $K \in \mathbb{N}$*

$$\forall k > K \qquad r(t^k) = 0 \tag{7.97}$$

Доказательство. 1. Пусть вначале $|q| < 1$. Тогда, подобрав K так, чтобы $|q|^K < \frac{1}{r(z)\cdot r(z^{-1})}$, мы для всякого $k > K$ получим $|q|^k \cdot r(z) \cdot r(z^{-1}) < 1$, и поэтому

$$\begin{aligned} r(t^k) = r(t^k \cdot z^l \cdot z^{-l}) = |q|^{lk} \cdot r(z^l \cdot t^k \cdot z^{-l}) \leqslant |q|^{lk} \cdot r(z^l) \cdot r(t^k) \cdot r(z^{-l}) \leqslant \\ \leqslant |q|^{lk} \cdot r(z)^l \cdot r(t)^k \cdot r(z^{-1})^l = r(t)^k \cdot (|q|^k \cdot r(z) \cdot r(z^{-1}))^l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

2. Наоборот, если $|q| > 1$, то, выбрав K так, чтобы $|q|^K > r(z) \cdot r(z^{-1})$, мы для всякого $k > K$ получим $\frac{r(z)\cdot r(z^{-1})}{|q|^k} < 1$, и поэтому

$$\begin{aligned} r(t^k) = r(t^k \cdot z^{-l} \cdot z^l) = |q|^{-lk} \cdot r(z^{-l} \cdot t^k \cdot z^l) \leqslant |q|^{-lk} \cdot r(z^l) \cdot r(t^k) \cdot r(z^{-l}) \leqslant \\ \leqslant |q|^{-lk} \cdot r(z)^l \cdot r(t)^k \cdot r(z^{-1})^l = r(t)^k \cdot \left(\frac{r(z)\cdot r(z^{-1})}{|q|^k}\right)^l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

□

Предложение 7.12. *1) Пусть $|q| < 1$, а числа $D \geqslant 1$ и $K \in \mathbb{N}$ выбраны так, чтобы*

$$D \cdot |q|^K \geqslant 1 \tag{7.98}$$

Тогда полунорма $p_{D,K} : \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$, *определенная равенством*

$$p_{D,K}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \odot t^k\right) = \sum_{k=0}^{K} \underbrace{||u_k||_{D\cdot|q|^k}}_{\substack{\text{полунорма}\\(3.47)}} = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_{k,n}| \cdot \left(D\cdot|q|^k\right)^{|n|} \tag{7.99}$$

субмультипликативна. Наоборот, любая субмультипликативная полунорма на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ *подчинена некоторой полунорме вида* (7.99).

2) Если же $|q| > 1$, *а числа* $D \geqslant 1$ *и* $K \in \mathbb{N}$ *выбраны так, чтобы*

$$\frac{D}{|q|^K} \geqslant 1 \tag{7.100}$$

то полунорма $p_{D,K} : \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$, *определенная равенством*

$$p_{D,K}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \odot t^k\right) = \sum_{k=0}^{K} \underbrace{||u_k||_{\frac{D}{|q|^K}}}_{\substack{\text{полунорма}\\(3.47)}} = \sum_{k=0}^{K}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_{k,n}| \cdot \left(\frac{D}{|q|^K}\right)^{|n|} \tag{7.101}$$

субмультипликативна. Наоборот, любая субмультипликативная полунорма на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ *подчинена некоторой полунорме вида* (7.99).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $|q| < 1$. Субмультипликативность полунормы (7.99) проверяется непосредственно:

$$p_{D,K}(u\cdot v) = \sum_{k=0}^{K} \|(u\cdot v)_k\|_{D\cdot|q|^k} = (7.19) = \sum_{k=0}^{K} \left\| \sum_{i=0}^{k} u_i \cdot (\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^i(v_{k-i}) \right\|_{D\cdot|q|^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{k} \left\|u_i \cdot (\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^i(v_{k-i})\right\|_{D\cdot|q|^k} \leqslant \sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{k} \|u_i\|_{D\cdot|q|^k} \cdot \left\|(\mathsf{M}^\star_{\delta^q})^i(v_{k-i})\right\|_{D\cdot|q|^k} \leqslant (7.92), (7.94) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{K}\sum_{i=0}^{k} \|u_i\|_{D\cdot|q|^i} \cdot \|v_{k-i}\|_{D\cdot|q|^{k-i}} \leqslant \left(\sum_{i=0}^{K} \|u_i\|_{D\cdot|q|^i}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{K} \|v_j\|_{D\cdot|q|^j}\right) = p_{D,K}(u)\cdot p_{D,K}(v)$$

Затем, пусть r – субмультипликативная полунорма на $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \overset{z}{\underset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$. Подберем по лемме 7.8 число $K \in \mathbb{N}$ так чтобы выполнялось (7.97), и положим

$$L = \max_{0\leqslant k\leqslant K} r(t^k)$$

Заметим также, что, поскольку r будет также субмультипликативной полунормой на подалгебре $1\odot\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$, состоящей из функций вида $a\odot 1$, $a \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$, и изоморфной $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$, на этой подалгебре r, как любая субмультипликативная полунорма, должна быть подчинена некоторой полунорме (3.47):

$$r(a\odot 1) \leqslant M\cdot\|a\|_C, \qquad a \in \mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \tag{7.102}$$

для некоторых $C \geqslant 1$, $M > 0$. Выберем теперь $D \geqslant 1$ так, чтобы

$$C \leqslant D\cdot|q|^K \leqslant D\cdot|q|^{K-1} \leqslant ... \leqslant D\cdot|q| \leqslant D \tag{7.103}$$

Тогда

$$r(u) = r\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \odot t^k\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} r(u_k)\cdot r(t^k) = \sum_{k=0}^{K} r(u_k)\cdot r(t^k) \leqslant \sum_{k=0}^{K} M\cdot\|u_k\|_C \cdot L =$$

$$= L \cdot M \cdot \sum_{k=0}^{K} \|u_k\|_{D\cdot|q|^k} = L \cdot M \cdot p_{D,K}(u)$$

То есть r подчинена некоторой полунорме $p_{D,K}$.

Случай $|q| > 1$ рассматривается аналогично, только вместо (7.94) в нем применяется формула (7.96), а вместо (7.103) – цепочка

$$C \leqslant \frac{D}{|q|^K} \leqslant \frac{D}{|q|^{K-1}} \leqslant ... \leqslant \frac{D}{|q|} \leqslant D$$

□

Предложение 7.13. *При $|q| \neq 1$ формула*

$$\zeta_n \odot t^k \quad \mapsto \quad z_n \odot \tau^k \tag{7.104}$$

однозначно определяет гомоморфизм алгебр Хопфа

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \to \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}),$$

являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \underset{\delta^q}{\overset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Здесь остается только проверить, что $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \odot \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ будет пополнением $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$ относительно полунорм (7.99) или, в зависимости от q, (7.101). □

$\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \odot_z^{\delta^q} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{\heartsuit}{\to} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \odot_z^{\delta^q} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ **при произвольном** q**.** Рассмотрим пространство $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Из первой формулы в (7.85)

$$\mathsf{M}_z^\star(\zeta_n) = \zeta_{n-1},$$

можно вывести тождество:

$$(\mathsf{M}_z^\star)^k(\alpha) = (\mathsf{M}_z^\star)^k \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \zeta_n \right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \zeta_{n-k} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_{m+k} \cdot \zeta_m \tag{7.105}$$

Вспомним полунормы $||\cdot||_N$ на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$, определенные формулой (6.12):

$$\|\alpha\|_N = \sum_{|n|\leqslant N} |\alpha_n|, \qquad N \in \mathbb{N}, \qquad \alpha = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \cdot \zeta_n$$

Отметим следующие два их свойства:

$$M \leqslant N \quad \Longrightarrow \quad ||\beta||_M \leqslant ||\beta||_N \tag{7.106}$$

и

$$\left\|(\mathsf{M}_z^\star)^i(\beta)\right\|_M = \sum_{|n|\leqslant M} |(\mathsf{M}_z^\star)^i(\beta)_n| = (7.105) = \sum_{|n|\leqslant M} |\beta_{n+i}| \leqslant \sum_{|n|\leqslant M+i} |\beta_n| = \|\beta\|_{M+i} \tag{7.107}$$

По теореме (7.6), общая формула умножения в алгебре $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ имеет вид

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{k} \alpha_i * (\mathsf{M}_z^\star)^i(\beta_{k-i}) \right) \odot t^k \tag{7.108}$$

а на базисных элементах выглядит так:

$$\zeta_m \odot t^k \cdot \zeta_n \odot t^l = (7.14) = \zeta_m * (\mathsf{M}_z^\star)^k(\zeta_n) \odot t^{k+l} = (7.85) =$$
$$= \zeta_m * \zeta_{n-k} \odot t^{k+l} = \begin{cases} \zeta_m \odot t^{k+l}, & m = n-k \\ 0, & m \neq n-k \end{cases} = \begin{cases} \zeta_m \odot t^{k+l}, & m+k = n \\ 0, & m+k \neq n \end{cases} \tag{7.109}$$

Лемма 7.9. *Всякая непрерывная субмультипликативная полунорма p на алгебре $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ равна нулю на почти всех элементах базиса $\{\zeta_n \odot t^k;\ n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\}$ (то есть на всех, кроме конечного набора):*

$$\mathsf{card}\{(n,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} :\ p\left(\zeta_n \odot t^k\right) \neq 0\} < \infty$$

Доказательство. Обозначим $p_{n,k} = p(\zeta_n \odot t^k)$ и заметим следующее соотношение:

$$p_{m,k+l} \leqslant p_{m,k} \cdot p_{m+k,l}, \qquad k,m \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{Z} \tag{7.110}$$

Действительно, из (7.109) следует

$$\zeta_m \odot t^{k+l} = \zeta_m \odot t^k \cdot \zeta_{m+k} \odot t^l$$

поэтому

$$p_{m,k+l} = p(\zeta_m \odot t^{k+l}) \leqslant p(\zeta_m \odot t^k) \cdot p(\zeta_{m+k} \odot t^l) = p_{m,k} \cdot p_{m+k,l}$$

Рассмотрим множества

$$S_k = \{n \in \mathbb{Z} :\ p_{n,k} \neq 0\}$$

и заметим две вещи.

1. Во-первых, из непрерывности и субмультипликативности полунормы p на $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ следует, что функционал

$$p_0(\alpha) = p(\alpha \odot 1) = p(\alpha \odot t^0), \qquad \alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$$

должен быть непрерывной субмультипликативной полунормой на $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$:

$$p_0(\alpha * \beta) = p((\alpha * \beta) \odot 1) = p\Big((\alpha \odot 1) \cdot (\beta \odot 1)\Big) \leqslant p(\alpha \odot 1) \cdot p(\beta \odot 1) = p_0(\alpha) \cdot p_0(\beta)$$

Отсюда по лемме 6.2, мы получаем, что p_0 должна быть подчинена некоторой полунорме вида (6.12):

$$p_0(\alpha) \leqslant C \cdot \|\alpha\|_N = C \cdot \sum_{|n| \leqslant N} |\alpha_n|, \qquad \alpha \in \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$$

а это в свою очередь, означает, что множество $S_0 = \{n \in \mathbb{Z} :\ p_0(\zeta_n) = p(1 \odot \zeta_n) \neq 0\}$ должно быть конечно:

$$\mathsf{card}\, S_0 < \infty$$

2. Во-вторых, из неравенств (7.110) выводятся следующие импликации:

$$\begin{cases} p_{m,k+1} \leqslant p_{m,k} \cdot p_{m+k,1} \\ p_{m,k+1} \leqslant p_{m,k+1} \cdot p_{m+k+1,0} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} S_{k+1} \subseteq S_k \\ S_{k+1} \subseteq S_0 - (k+1) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad S_{k+1} \subseteq S_k \cap (S_0 - k - 1)$$

(здесь $S - i$ обозначает сдвиг множества S на i единиц влево на группе $\mathbb{Z}$), из которых в свою очередь можно заключить, что S_k образуют сужающуюся цепочку конечных (потому что S_0 конечно) множеств

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq ... \supseteq S_k \supseteq S_{k+1} \supseteq ...$$

причем, как минимум после номера $K = \max S_0 - \min S_0$, эта цепочка становится пустой:

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq ... \supseteq S_K \supseteq S_{K+1} = \varnothing$$

(потому что $S_{K+1} \subseteq S_0 \cap (S_0 - K - 1) = \varnothing$). Это нам и нужно было доказать. $\square$

Предложение 7.14. *Для всякого $N \in \mathbb{N}$ функционал*

$$r_N(\alpha) = r_N\left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \odot t^k\right) = \sum_{k=0}^{N} \|\alpha_k\|_{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \sum_{|n| \leqslant N-k} |\alpha_{n,k}| \tag{7.111}$$

является непрерывной субмультипликативной полунормой на $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. Любая непрерывная субмультипликативная полунорма на $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{\delta^q}{\underset{z}{\odot}} \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ подчинена некоторой полунорме r_N.

Доказательство. То, что r_N – полунорма, следует из линейности отображений $\alpha \mapsto \alpha_k$:

$$r_N(\lambda\cdot\alpha+\beta)=\sum_{k=0}^{N}\|\lambda\cdot\alpha_k+\beta_k\|_{N-k}\leqslant|\lambda|\cdot\sum_{k=0}^{N}\|\alpha_k\|_{N-k}+\sum_{k=0}^{N}\|\beta_k\|_{N-k}=|\lambda|\cdot r_N(\alpha)+r_N(\beta)$$

Проверим субмультипликативность:

$$r_N(\alpha\cdot\beta)=(7.108)=r_N\left(\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i*(\mathsf{M}_z^\star)^i(\beta_{k-i})\odot t^k\right)=\sum_{k=0}^{N}\left\|\sum_{i=0}^{k}\alpha_i*(\mathsf{M}_z^\star)^i(\beta_{k-i})\right\|_{N-k}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\|\alpha_i\|_{N-k}\cdot\left\|(\mathsf{M}_z^\star)^i(\beta_{k-i})\right\|_{N-k}\leqslant(7.107)\leqslant\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\|\alpha_i\|_{N-k}\cdot\|\beta_{k-i}\|_{N-k+i}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\underbrace{\|\alpha_i\|_{N-k}}_{\substack{\mathbin{/\!\!/\!\!\wedge}\\ \|\alpha_i\|_{N-i},\\ \text{поскольку}\\ k\geqslant i,\\ \text{и значит}\\ N-k\leqslant N-i,\\ \text{что позволяет}\\ \text{применить (7.106)}}}\cdot\|\beta_{k-i}\|_{N-(k-i)}\leqslant\sum_{k=0}^{N}\sum_{i=0}^{k}\|\alpha_i\|_{N-i}\cdot\|\beta_{k-i}\|_{N-(k-i)}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=0}^{N}\|\alpha_i\|_{N-i}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{N}\|\beta_j\|_{N-j}\right)=r_N(\alpha)\cdot r_N(\beta)$$

Нам остается убедиться, что любая непрерывная субмультипликативная полунорма p на $\mathcal{R}(\mathbb{C})\underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$ подчинена некоторой полунорме r_N. Это следует из леммы 7.9: поскольку p почти на всех базисных элементах $t^k\odot\zeta_n$ равна нулю, можно подобрать такое число $N\in\mathbb{N}$, что

$$\{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}:\ p(\zeta_n\odot t^k)\neq0\}\subseteq\{(n,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}:\ k\leqslant N\ \&\ |n|\leqslant N-k\}$$

Тогда положив

$$C=\max\{p(\zeta_n\odot t^k);\ (n,k):\ k\leqslant N,\ |n|\leqslant N-k\}$$

мы получим

$$p(\alpha)=p\left(\sum_{n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}\alpha_{n,k}\cdot\zeta_n\odot t^k\right)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}|\alpha_{n,k}|\cdot p(\zeta_n\odot t^k)=\sum_{k=0}^{N}\sum_{|n|\leqslant N-k}|\alpha_{n,k}|\cdot p(\zeta_n\odot t^k)\leqslant$$
$$\leqslant C\cdot\sum_{k=0}^{N}\sum_{|n|\leqslant N-k}|\alpha_{n,k}|=(7.111)=C\cdot r_N(\alpha)$$

□

Предложение 7.15. *Формула*

$$\zeta_n\odot t^k\quad\mapsto\quad\zeta_n\odot\tau^k\tag{7.112}$$

определяет гомоморфизм алгебр Хопфа

$$\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)\underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{R}(\mathbb{C})\to\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)\underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$$

являющийся оболочкой Аренса-Майкла алгебры $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)\underset{z}{\overset{\delta^q}{\odot}}\mathcal{R}(\mathbb{C})$.

Доказательство. Здесь остается только проверить, что $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)\odot\mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ будет пополнением $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)\odot\mathcal{R}(\mathbb{C})$ относительно полунорм (7.111). □

Литература

[1] S. S. Akbarov. "Pontryagin duality in the theory of topological vector spaces and in topological algebra." *Journal of Mathematical Sciences.* 113(2):179-349, 2003.

[2] S. S. Akbarov. "Stereotype spaces, algebras, homologies: An outline," In: *Topological Homology* (A. Ya. Helemskii, Ed.), Nova Science Publishers, pp. 1–29, 2000.

[3] S. S. Akbarov. "Pontryagin duality and topological algebras", In: *"Topological Algebras, their Applications and Related Topics* eds. Krzysztof Jarosz and Andrzej Soltysiak, Banach Center Publications 67:55-71, 2005.

[4] В. А. Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков, Л. Н. Шеврин, Е. Г. Шульгейфер. *Общая алгебра.* М.: Наука, 1991.

[5] N. Bourbaki. *Espaces vectoriels topologiques.* Chaps. I–V, Hermann, Paris.

[6] N. Bourbaki, *Topologie Générale.* Chaps. III–VIII, Hermann, Paris.

[7] K. Brauner. "Duals of Frechet spaces and a generalization of the Banach-Dieudonne theorem." *Duke Math. Jour.* 40(4):845-855, 1973.

[8] V. Chari, A. Pressley, *A guide to quantum groups.* Cambridge university press, 1995.

[9] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, Ş. Raianu. *Hopf algebras,* Marcel Dekker, 2001.

[10] M. Enock, J.-M. Schwartz. *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups.* Springer-Verlag, 1992.

[11] M. Enock et J.-M. Schwartz. "Une dualité dans les algèbres de von Neumann." *Note C. R. Acad. Sc. Paris* 277:683-685, 1973.

[12] M. Enock et J.-M. Schwartz. "Une catégorie d'algèbres de Kac." *Note C. R. Acad. Sc. Paris* 279:643-645, 1974.

[13] M. Enock et J.-M. Schwartz. "Une dualité dans les algèbres de von Neumann." *Supp. Bull. Soc. Math. France Mémoire* 44:1–144, 1975.

[14] H. Grauert, R. Remmert. *Theory of Stein spaces.* Springer, 1977.

[15] R. A. Horn, C. R. Johnson. *Martix analysis.* Cambridge university press.

[16] E. Hewitt, K. A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*, Vol. 2, Springer (1963).

[17] H. Jarchow. *Locally convex spaces.* B.G.Teubner, Stuttgart, 1981.

[18] S. Kakutani, V. Klee. "The finite topology of a linear space," *Arch. Math.* 14(1):55-58, 1963.

[19] C. Kassel. *Quantum groups.* Springer.

[20] М. Г. Крейн. "Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры." *Докл. Акад. Наук СССР* 69:725-728, 1949.

[21] J. Kustermans, S. Vaes. "Locally compact quantum groups," *Ann. scient. Èc. Norm. Sup.* 4è série, 33:837-934, 2000.

[22] B. Ya. Levin. *Lectures on entire functions.* AMS, 1996.

[23] S. MacLane. *Categories for the working mathematician.* Springer, Berlin, 1971.

[24] K.-H. Neeb. *Holomorphy and Convexity in Lie Theory.* Walter de Gruyter, 2000.

[25] A. Pietsch, *Nukleare Lokalkonvexe Raume*, Akademie-Verlag, Berlin (1965).

[26] А. Ю. Пирковский. "Оболочки Аренса-Майкла, гомологические эпиморфизмы и относительно квази-свободные алгебры," *Труды ММО*, 69: 34-123, 2008.

[27] L. Pontrjagin. "The theory of topological commutative groups," *Ann. Math.* 35(2): 361-388, 1934.

[28] J. Kustermans, W. Pusz, P. M. Sołtan, S. Vaes, A. Van Daele, L. Vainerman, S. L. Woronowicz. "Locally compact quantum groups," In: *"Quantum symmetry in noncommutative geometry"* (P. M. Hajak, Ed.), Locally compact quantum groups. Lecture Notes School / Conference on Noncommutative Geometry and Quantum groups, Warsaw, 2001, Banach Center Publications, to appear.

[29] N. Saavedra Rivano. "Catègories Tannakiennes," *Lecture Notes in Mathematics*, no. 265, Springer, 1972.

[30] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill, 1973.

[31] M. F. Smith. "The Pontrjagin duality theorem in linear spaces." *Annals of Mathematics*, 56(2):248-253, 1952.

[32] H. H. Shaeffer. *Topological Vector Spaces.* Macmillan, 1966.

[33] B. V. Shabat. *Introduction to complex analysis,* Vol. I, Nauka, Moscow, 1985.

[34] B. V. Shabat. *Introduction to complex analysis,* Vol. II, Nauka, Moscow, 1985.

[35] P. Schauenburg. "On the Braiding on a Hopf Algebra in a Braided Category", *New York J. Math.* 4: 259-263, 1998.

[36] R. Street. *Quantum Groups: a path to current algebra,* Series: Australian Mathematical Society Lecture Series (No. 19), Cambridge, 2007.

[37] M. E. Sweedler. "Cocommutative Hopf algebras with antipode," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73(1):126-128, 1967.

[38] J. L. Taylor, *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups.* Graduate Studies in Mathematics, V. 46. - AMS, Providence, Rhode Island, 2002.

[39] A. Van Daele, "Dual pairs of Hopf $*$-algebras", *Bull. Lond. Math. Soc.*, 25:209-230, 1993.

[40] A. Van Daele, "The Haar measure on some locally compact quantum groups," http://arxiv.org/abs/math/0109004v1

[41] A. Van Daele, "Multiplier Hopf algebras", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 342: 917-932, 1994.

[42] A. Van Daele, "An algebraic framework for group duality", *Adv. Math.* 140:323-366, 1998.

[43] Л. И. Вайнерман. "Характеризация объектов, двойственных к локально компактным группам." *Функц. анализ и его прил.* 8–1 (1974), 75–76.

[44] Л. И. Вайнерман, Г. И. Кац. "Неунимодулярные кольцевые группы и алгебры Хопфа—фон Неймана." *Докл. Акад. Наук СССР* 211:1031-1034, 1973.

[45] Л. И. Вайнерман, Г. И. Кац. "Неунимодулярные кольцевые группы и алгебры Хопфа—фон Неймана." *Матем. сб.* 94:194-225, 1974.

[46] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам,* М.:УРСС , 1995.

[47] S. Wang, "Quantum 'ax+b' group as quantum automorphism group of $k[x]$," http://arxiv.org/abs/math/9807094v2.

[48] S. L. Woronowicz, "Quantum 'az + b' group on complex plane." *Int. J. Math.* 12(4):461-503, 2001.

[49] S. Zhang, "Braided Hopf algebras," arXiv:math.RA/0511251 v8 25 May 2006.

Оглавление

Введение . . . 2
§ 0 Стереотипные пространства . . . 6
(a) Определение и основные примеры . . . 6
(b) Пространство Смит, порожденное компактом . . . 8
(c) Пространство Браунера, порожденное расширяющейся последовательностью компактов . . . 9
(d) Проективные системы Банаха и инъективные системы Смит . . . 10
(e) Банахово представление пространства Смит . . . 11
(f) Инъективные системы пространств Банаха, порожденные компактами . . . 12
(g) Ядерные стереотипные пространства . . . 15
(h) Пространства $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$ . . . 17
Пространство функций $\mathbb{C}^M$. . . . 17
Пространство точечных зарядов $\mathbb{C}_M$. . . . 18
Двойственность между $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$. . . . 18
Базисы в $\mathbb{C}^M$ и $\mathbb{C}_M$. . . . 19
§ 1 Стереотипные алгебры Хопфа . . . 20
(a) Тензорные произведения и структура моноидальной категории на $\mathfrak{Ste}$ . . . 20
(b) Стереотипные алгебры Хопфа . . . 22
Алгебры, коалгебры и алгебры Хопфа в симметрической моноидальной категории. . . . 22
Проективные и инъективные стереотипные алгебры. . . . 23
Стереотипные алгебры Хопфа. . . . 24
Двойственность стереотипных алгебр Хопфа. . . . 24
Дуальные пары. . . . 25
(c) Руководящий пример: алгебры Хопфа $\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$ . . . 25
Алгебра $\mathbb{C}^G$ функций на G. . . . 25
Алгебра $\mathbb{C}_G$ точечных зарядов на G. . . . 25
$\mathbb{C}^G$ и $\mathbb{C}_G$ как стереотипные алгебры Хопфа. . . . 26
(d) Обозначения Свидлера и свойство стереотипной аппроксимации . . . 32
(e) Групповые элементы . . . 33
§ 2 Многообразия Штейна: прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$ и ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$ . . . 35
(a) Многообразия Штейна . . . 35
(b) Внешние огибающие на M и прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$ . . . 35
Операции $\blacksquare$ и $\square$. . . . 35
Внешние огибающие на M. . . . 37
Прямоугольники в $\mathcal{O}(M)$. . . . 38
(c) Лемма о полярах . . . 39
(d) Внутренние огибающие на M и ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$ . . . 40
Операции $\blacklozenge$ и $\lozenge$. . . . 40
Внутренние огибающие на M. . . . 41
Ромбы в $\mathcal{O}^\star(M)$ . . . 42
(e) Двойственность между прямоугольниками и ромбами . . . 43
§ 3 Группы Штейна и связанные с ними алгебры Хопфа . . . 44
(a) Группы Штейна, линейные группы и алгебраические группы . . . 44
(b) Алгебры Хопфа $\mathcal{O}(G)$, $\mathcal{O}^\star(G)$, $\mathcal{R}(G)$, $\mathcal{R}^\star(G)$ . . . 46
Алгебры Хопфа $\mathcal{O}(G)$ и $\mathcal{O}^\star(G)$ на группе Штейна G. . . . 46
Алгебры Хопфа $\mathcal{R}(G)$ и $\mathcal{R}^\star(G)$ на аффинной алгебраической группе G. . . . 47
Свертки в $\mathcal{R}^\star(G)$ и $\mathcal{O}^\star(G)$. . . . 48

(c) Примеры . . . 48
Алгебры $\mathcal{O}(\mathbb{Z})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{Z})$. . . 48
Алгебры $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times)$, $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times)$. . . 49
Цепочка $\mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$. . . 53
§ 4 Функции экспоненциального типа на группе Штейна . . . 57
(a) Полухарактеры и обратные полухарактеры на группах Штейна . . . 57
(b) Субмультипликативные ромбы и дуально субмультипликативные прямоугольники . . 61
(c) Голоморфные функции экспоненциального типа . . . 63
Алгебра $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ голоморфных функций экспоненциального типа. . . 63
Алгебра $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ экспоненциальных аналитических функционалов. . . 65
(d) Примеры . . . 67
Конечные группы. . . 67
Группы $\mathbb{C}^n$. . . 67
Группы $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$. . . 68
(e) Инъекция $\flat_G : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}(G)$ . . . 69
(f) Ядерность пространств $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ . . . 70
(g) Голоморфные отображения экспоненциального типа и тензорные произведения пространств $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ . . . 73
(h) Структура алгебр Хопфа на $\mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G)$ и $\mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ . . . 78
§ 5 Оболочки Аренса-Майкла и голоморфная рефлексивность . . . 79
(a) Субмультипликативные полунормы и алгебры Аренса-Майкла . . . 79
(b) Оболочки Аренса-Майкла . . . 80
(c) Отображение $\flat^\star_G : \mathcal{O}^\star(G) \to \mathcal{O}^\star_{\mathsf{exp}}(G)$ – оболочка Аренса-Майкла . . . 81
(d) Отображение $\flat_G : \mathcal{O}_{\mathsf{exp}}(G) \to \mathcal{O}(G)$ – оболочка Аренса-Майкла для групп с алгебраической связной компонентой единицы . . . 82
(e) Голоморфная рефлексивность . . . 86
§ 6 Голоморфная рефлексивность, как обобщение двойственности Понтрягина . . . 87
(a) Двойственность Понтрягина для абелевых компактно порожденных групп Штейна . 87
(b) Преобразование Фурье как оболочка Аренса-Майкла . . . 88
Конечная абелева группа. . . 89
Комплексная плоскость $\mathbb{C}$. . . 89
Комплексная окружность $\mathbb{C}^\times$. . . 91
Группа целых чисел $\mathbb{Z}$. . . 93
Доказательство теоремы 6.2 . . . 96
(c) Диаграмма вложения . . . 96
§ 7 Добавление: голоморфная рефлексивность квантовой группы '$az + b$' . . . 96
(a) Квантовые комбинаторные формулы . . . 97
(b) Алгебры Хопфа косых многочленов и близкие конструкции . . . 98
Тензорные произведения $X \odot \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $X \circledast \mathcal{R}(\mathbb{C})$, $X \odot \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$, $X \circledast \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ . . . 98
Алгебры косых многочленов $A \overset{\varphi}{\odot} \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и косых степенных рядов $A \overset{\varphi}{\circledast} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ . . 98
Квантовые пары в алгебре Хопфа. . . 99
Алгебры Хопфа $H \odot^z_\omega \mathcal{R}(\mathbb{C})$ и $H^\star \circledast^\omega_z \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$. . . 100
Цепочки $H \odot^z_\omega \mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset H \odot^z_\omega \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset H \odot^z_\omega \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset H \odot^z_\omega \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$
и $H \circledast^z_\omega \mathcal{R}(\mathbb{C}) \subset H \circledast^z_\omega \mathcal{O}(\mathbb{C}) \subset H \circledast^z_\omega \mathcal{O}^\star(\mathbb{C}) \subset H \circledast^z_\omega \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$. . . 105
(c) Квантовая группа '$az + b$' $= \mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ . . . 107
Группа $\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}$ аффинных преобразований плоскости. . . 107
Стереотипные алгебры $\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. . . 107
Стереотипные алгебры $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. . . 109
$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{O}(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ и $\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ как алгебры Хопфа. . . 110
Алгебры Хопфа $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{R}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$, $\mathcal{O}^\star_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. . . 111
$\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ как алгебра с образующими и определяющими отношениями. . . 113
(d) Рефлексивность $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ . . . 114
Диаграммы рефлексивности для $\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$. . . 114
$\mathcal{R}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C}) \overset{\heartsuit}{\to} \mathcal{O}_q(\mathbb{C}^\times \ltimes \mathbb{C})$ при $|q| = 1$. . . 114
$\mathcal{R}(\mathbb{C}^\times) \odot^z_{\delta^q} \mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{\heartsuit}{\to} \mathcal{O}(\mathbb{C}^\times) \odot^z_{\delta^q} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ при $|q| \neq 1$. . . 115
$\mathcal{O}^\star(\mathbb{C}^\times) \odot^{\delta^q}_z \mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{\heartsuit}{\to} \mathcal{R}^\star(\mathbb{C}^\times) \odot^{\delta^q}_z \mathcal{R}^\star(\mathbb{C})$ при произвольном q. . . 117