ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2009, т. 265, с. 288–319

УДК 517.958: 530.145

О квантовых сжатых состояниях на отрезке и соотношениях неопределенностей для наноскопических систем[1]

©2009 г. И. В. Волович[2,3], А. С. Трушечкин[2,4]

Поступило в декабре 2008 г.

Построены семейства квантовых сжатых (squeezed) состояний на отрезке, исследовано их асимптотическое поведение. Рассмотрены свойства локализации таких состояний, построенных на основе тета-функции. Получены оценки дисперсии координаты и импульса для квантовой частицы на отрезке, применимые, в частности, для наноскопических систем.

1. ВВЕДЕНИЕ

В квантовой механике хорошо известны введенные Шрёдингером [1, 2] когерентные состояния на вещественной прямой. Поведение квантовой системы в таких состояниях в определенном смысле близко к поведению соответствующих классических систем. Обобщением когерентных состояний являются сжатые (squeezed) состояния, получаемые из когерентных состояний при помощи операции дилатации [3].

Когерентные и сжатые состояния на многообразиях и в ограниченных областях пространства изучены значительно меньше, в текущей литературе продолжается обсуждение их определений и свойств [4–11].

Заметим, что исследование таких состояний может оказаться полезным при рассмотрении наносистем, локализованных в соответствующих областях пространства [12]. Для того чтобы можно было оперировать с наносистемами, требуется возможность достаточно точной локализации квантовых частиц в приемлемом диапазоне импульсов. Напомним, что возможность такой локализации в бесконечном объеме ограничивается соотношением неопределенностей Гейзенберга. Было установлено, что соотношение неопределенностей требует существенной модификации для конечного объема (см. обсуждение в разд. 3). Без дополнительного анализа не очевидно, что существуют квантовые состояния в ограниченном объеме, для которых возможна локализация квантовых частиц с точностью, необходимой для операций, выполняемых в предполагаемых нанотехнологиях.

В настоящей работе построены семейства квантовых сжатых состояний на отрезке и исследовано их асимптотическое поведение. Получены оценки дисперсии координаты и импульса для квантовой частицы на отрезке в таких состояниях, применимые, в частности, для наноскопических систем. Рассмотрены свойства локализации сжатых состояний на отрезке, построенных на основе тета-функции.

Осуществлен также квазиклассический предельный переход для сжатых состояний на отрезке, в результате которого разбросы и по импульсу, и по координате стремятся к нулю.

---

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 08-01-00727а), гранта Президента РФ (проект НШ-3224.2008.1), программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 3341), DFG (project 436 RUS 113/951) и программы ОМН РАН.

[2]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.

[3]E-mail: volovich@mi.ras.ru

[4]E-mail: trushechkin@mi.ras.ru

Рассмотрена дополнительная трудность в работе с квантовыми волновыми пакетами на отрезке (по сравнению с пакетами для свободной частицы на прямой): некоммутируемость операторов импульса и энергии. Подробнее разобраны два случая ограниченной области: квантовая частица в бесконечно глубокой потенциальной яме с твердыми стенками и квантовая частица на окружности.

Получены численные оценки: на отрезке длиной порядка 100 нм существуют волновые пакеты со среднеквадратичным отклонением координаты порядка 0.1 нм и среднеквадратичным отклонением импульса порядка 10^{-24} кг · м/с.

Основные оценки и асимптотики для сжатых состояний на отрезке приведены в теоремах 1–4.

2. КВАНТОВАЯ ЧАСТИЦА НА ОТРЕЗКЕ

Квантовой частице на отрезке $[-l,l]$ соответствует гильбертово пространство $L_2(-l,l)$ (см. [2]). Если между концами отрезка частица движется свободно, то оператор Гамильтона на подпространстве $C_0^\infty(-l,l)$ (функций, носитель которых содержится в некотором подынтервале отрезка $[-l,l]$) имеет вид

$$\check{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2},$$

где $m>0$ — масса частицы, $\hbar$ — постоянная Планка. Оператор $\check{H}$ с областью определения $D(\check{H}) = C_0^\infty(-l,l)$ является симметрическим, но не самосопряженным. Он имеет множество самосопряженных расширений, отвечающих различным физическим ситуациям [13]. Каждое самосопряженное расширение определено на функциях из $AC^2(-l,l)$, удовлетворяющих линейно независимой паре граничных условий вида

$$A\psi(l) + B\psi(-l) + C\psi'(l) + D\psi'(-l) = 0, \tag{1}$$

где $A,B,C,D\in\mathbb{C}$. Здесь $AC^2(-l,l)$ — множество дифференцируемых функций, производные которых лежат в $AC(-l,l)$, а $AC(-l,l)$ — множество абсолютно непрерывных функций, производные которых (существующие почти всюду согласно свойствам абсолютно непрерывных функций) лежат в $L_2(-l,l)$. Каждое самосопряженное расширение $\check{H}$ действует на своей области определения как $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$. Отметим, что не все (даже линейно независимые) пары граничных условий вида (1) отвечают некоторому самосопряженному расширению оператора $\check{H}$. Условия на коэффициенты, необходимые и достаточные для того, чтобы пара таких граничных условий отвечала некоторому самосопряженному расширению, даны в [14], однако они в этой работе не важны.

Отметим два самосопряженных расширения оператора $\check{H}$. Частице в бесконечно глубокой потенциальной яме с твердыми стенками отвечает оператор Гамильтона

$$\widehat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

с областью определения

$$D(\widehat{H}_1) = \bigl\{\psi\in AC^2(-l,l)\mid \psi(-l)=\psi(l)=0\bigr\}.$$

Собственные значения и собственные функции этого оператора легко найти, и они хорошо известны [17]:

$$E_n^{(1)} = \frac{\hbar^2}{2m}\Bigl(\frac{\pi n}{2l}\Bigr)^2, \qquad \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi n}{2l}(x-l), \qquad n=1,2,\dots$$

Легко видеть, что вектор плотности потока вероятности для собственных функций $\widehat{H}_1$ равен нулю в каждой точке: плотности двух волн $e^{\frac{\pi n}{2l}(x-l)}$ и $e^{-\frac{\pi n}{2l}(x-l)}$, движущихся в противоположные стороны, равны; отражаясь от стенок, эти волны меняют направления движения и, таким образом, как бы переходят друг в друга.

Частице на окружности (длины $2l$) отвечает оператор Гамильтона

$$\widehat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

с областью определения

$$D(\widehat{H}_2) = \bigl\{\psi \in AC^2(-l,l) \mid \psi(-l) = \psi(l),\ \psi'(-l) = \psi'(l)\bigr\}.$$

Собственные значения (двукратно вырожденные) и собственные функции оператора $\widehat{H}_2$ также легко найти:

$$E_n^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad \psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2l}}\,e^{i\frac{\pi}{l}nx}, \qquad \psi_{-n}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2l}}\,e^{-i\frac{\pi}{l}nx}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

Легко видеть, что вектор плотности потока вероятности для собственных функций $\widehat{H}_2$ в каждой точке постоянен и не равен нулю. Это означает, что такая собственная функция соответствует потоку частиц, движущихся в одну сторону: та часть волновой функции, которая уходит за границы отрезка, появляется с другой стороны.

Определим оператор импульса. Если волновой пакет не касается концов отрезка, т.е. принадлежит $C_0^\infty(-l,l)$, то оператор импульса для него должен быть таким же, как и на прямой, т.е. на подпространстве $C_0^\infty(-l,l)$ оператор импульса имеет вид

$$\check{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}.$$

Оператор $\check{p}$ с областью определения $D(\check{p}) = C_0^\infty(-l,l)$ также является симметрическим, но не самосопряженным. Все самосопряженные расширения этого оператора параметризуются действительными числами $\theta \in [0,2\pi)$ следующим образом [13]:

$$\widehat{p}_\theta = -i\hbar\frac{d}{dx}, \qquad D(\widehat{p}_\theta) = \bigl\{\psi \in AC(-l,l) \mid \psi(-l) = e^{i\theta}\psi(l)\bigr\}.$$

В качестве оператора импульса будем рассматривать $\widehat{p}_0 \equiv \widehat{p}$. На самом деле наши дальнейшие выводы легко перенести на случай произвольного θ.

Собственные значения и собственные функции оператора импульса $\widehat{p}$:

$$p_k = \frac{\pi}{l}\hbar k, \qquad \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2l}}\,e^{i\frac{\pi}{l}kx} = \frac{1}{\sqrt{2l}}\,e^{i\frac{p_k}{\hbar}x}, \qquad k = 0,\pm1,\pm2,\dots$$

Заметим, что в случае частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме операторы энергии и импульса не коммутируют, так как, будучи операторами с чисто дискретным спектром, не имеют общего набора собственных функций. В случае же частицы на окружности эти операторы коммутируют, как и для общеизвестного случая частицы на прямой.

Замечание. Существуют разные мнения относительно того, каков спектр импульса частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (дискретный или непрерывный) и как определить соответствующий оператор. Мы определили оператор импульса так, как получается в соответствии со стандартным формализмом квантовой механики. При этом спектр импульса получился дискретным.

Но есть аргумент, что в данном случае импульс должен иметь непрерывный спектр, а стандартный формализм здесь не вполне соответствует физике. Состоит он в следующем. Потенциальная яма бесконечной глубины — это абстракция: аппроксимация потенциальной ямы глубины очень большой, но конечной. А случаю ямы любой конечной глубины соответствует пространство $L_2(\mathbb{R})$, т.е. спектр импульса непрерывный. При стремлении глубины ямы к бесконечности спектр импульса не становится дискретным. Следовательно, и в бесконечно глубокой потенциальной яме спектр импульса тоже должен быть непрерывным. Проблемы некоммутируемости операторов импульса и энергии тогда также не возникает.

Однако в этом случае возникает проблема формального определения самосопряженного оператора импульса в гильбертовом пространстве, соответствующего бесконечно глубокой яме. Одна из попыток это сделать приведена в [15], где также можно найти обзор различных работ по этому вопросу.

В данной работе мы принимаем стандартный формализм квантовой механики, в соответствии с которым оператор импульса определен указанным выше способом и его спектр дискретный. В любом случае этим формализмом описывается квантовая частица на окружности.

Движение блоховской частицы в кристалле в магнитном поле рассматривается в [16].

Оператор координаты $\widehat{x}$ — это, как обычно в квантовой механике, умножение функции в координатном представлении на переменную x, $\widehat{x}\psi(x) = x\psi(x)$, область определения $\widehat{x}$ — все $L_2(-l,l)$. В данном гильбертовом пространстве в отличие от случая квантовой частицы на прямой оператор координаты ограничен. Поэтому в отличие от операторов энергии и импульса его самосопряженность следует из его симметричности.

3. О СООТНОШЕНИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ НА ПРЯМОЙ И НА ОТРЕЗКЕ

Хорошо известно соотношение неопределенностей Гейзенберга для частицы на прямой:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{2}$$

где Δx и Δp — среднеквадратичные отклонения от средних частицы по координате и по импульсу соответственно в состоянии $\psi \in L_2(\mathbb{R})$:

$$\Delta x^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} (x-\overline{x})^2 |\psi(x)|^2\,dx, \qquad \Delta p^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)} \left(-i\hbar\frac{d}{dx} - \overline{p}\right)^2 \psi(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\overline{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} x|\psi(x)|^2\,dx, \qquad \overline{p} = \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{\psi(x)}(-i\hbar)\frac{d}{dx}\psi(x)\,dx. \tag{4}$$

Известны также и состояния, минимизирующие эти соотношения неопределенностей. Это гауссовы волновые пакеты, параметризуемые тремя вещественными числами x^*, p^* и $\alpha > 0$:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\beta^2}}\, e^{-\frac{(x-x^*)^2}{4\beta^2} + i\frac{p^*(x-x^*)}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\psi}(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,dp, \tag{5}$$

$$\widetilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}}\, e^{-\frac{(p-p^*)^2}{4\alpha^2} - i\frac{px^*}{\hbar}}.$$

В этом случае $\overline{x} = x^*$, $\overline{p} = p^*$, $\Delta x = \beta = \frac{\hbar}{2\alpha}$, $\Delta p = \alpha$. Таким образом,

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}, \tag{6}$$

т.е. гауссовы волновые пакеты минимизируют соотношение неопределенностей. Такие состояния называются сжатыми (когерентными, если из физических соображений фиксирован параметр α). Одна из их областей применимости — это классическое приближение квантовой механики: поскольку эти состояния наиболее близки к классическим, то классической частице с произвольными координатой $x^* \in \mathbb{R}$ и импульсом $p^* \in \mathbb{R}$ сопоставляется когерентное состояние, минимизирующее соотношения неопределенностей, со средним значением координаты x^* и средним значением импульса p^*.

Из приведенных соотношений для гауссова волнового пакета следует, что мы можем сделать Δx сколь угодно малым ценой возрастания Δp, но сохраняя Δp конечным. Или, напротив, мы можем сделать сколь угодно малым и Δp ценой увеличения Δx, но сохраняя Δx конечным. А можно подобрать Δx и Δp так, чтобы обе эти величины были малыми в сравнении с макроскопическими масштабами. Принимая во внимание, что $\hbar \sim 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с, получаем, что существуют волновые пакеты, например, со следующими оценками: $\Delta x \sim 0.1$ нм и $\Delta p \sim 10^{-24}$ кг $\cdot$ м/с.

Мы хотим исследовать аналогичные проблемы для квантовой частицы на отрезке. Принципиальные отличия от частицы на прямой здесь следующие.

Во-первых, спектр импульса частицы на отрезке не непрерывен, а дискретен. Отсюда, как мы увидим, следует, что существуют волновые функции такие, что

$$\Delta x \Delta p = 0, \tag{7}$$

поэтому хорошо известное соотношение неопределенностей (2) на отрезке несправедливо. Вместо него предлагается, например (наряду с многими другими вариантами), соотношение [7, 9, 17][5]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left(1 - \frac{3}{l^2} \Delta x^2 \right). \tag{8}$$

Как видно отсюда, при $\Delta p = 0$ справедливо $\Delta x \geq l/\sqrt{3}$, что мы и увидим в следующем разделе. Напротив, при $\Delta x \to 0$ и при $l \to \infty$ снова получаем обычное соотношение на прямой (2): в обоих случаях частица перестает “чувствовать” края отрезка (или, наоборот, его замкнутость, если это окружность).

Во-вторых, как было сказано в разд. 2, оператор энергии частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме не коммутирует с оператором импульса. Классическая частица имеет хорошо определенные не только координату и импульс, но и энергию. Следовательно, чтобы квантовому волновому пакету поставить в соответствие классическую частицу, квантовый пакет должен иметь малый разброс не только по координате и импульсу, но и по энергии. Для частицы на прямой малость разброса по энергии автоматически следует из малости разброса по импульсу, поскольку операторы импульса и энергии коммутируют. В нашем случае это не так, поэтому разброс по энергии необходимо исследовать отдельно.

[5] Нелишне здесь отметить, что приведенное соотношение (8) в работе Д. Джаджа [7], на которую ссылается А.С. Давыдов [17], не доказано. В этой работе доказано лишь более слабое соотношение $\Delta x \Delta p \geq 0.16\hbar\big(1 - \frac{3}{l^2}\Delta x^2\big)$ и предположено, что справедливо (8).

4. КВАНТОВЫЕ СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ НА ОТРЕЗКЕ

Итак, мы хотим построить аналог сжатых состояний для квантовой частицы на отрезке. Классической частице с произвольными координатой $x^* \in (-l, l)$ и импульсом $p^* \in \mathbb{R}$ мы должны сопоставить квантовый волновой пакет $\psi_{x^*p^*}$ (индексы x^* и p^* в дальнейшем будем опускать, считая их произвольными, но фиксированными), который удовлетворяет условиям малости следующих моментов второго порядка распределений координаты и импульса:

$$\Delta_* x^2 = \int\limits_{-l}^{l} (x - x^*)^2 |\psi(x)|^2\, dx = \|\widehat{x}\psi - x^*\psi\|^2, \tag{9}$$

$$\Delta_* p^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (p_k - p^*)^2 |a_k|^2. \tag{10}$$

Здесь a_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ — коэффициенты разложения функции ψ по собственным функциям импульса:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\frac{\pi}{l}kx} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\frac{p_k}{\hbar}x}. \tag{11}$$

Два равносильных условия нормировки:

$$\int\limits_{-l}^{l} |\psi(x)|^2\, dx = 1, \qquad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 = 1.$$

Если вектор ψ принадлежит области определения оператора импульса $\widehat{p}$, то формулу (10) также можно переписать в компактном виде $\Delta_* p = \|\widehat{p}\psi - \overline{p}\psi\|$. Однако исходная формула (10) является более общей, поскольку не предполагает принадлежность искомого волнового пакета области определения оператора, а только требует малость дисперсии (что и нужно для того, чтобы можно было сопоставить квантовому волновому пакету классическую частицу).

Средние значения координаты и импульса вычисляются по следующим формулам:

$$\overline{x} = \int\limits_{-l}^{l} x|\psi(x)|^2\, dx, \qquad \overline{p} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k |a_k|^2. \tag{12}$$

Мы не требуем выполнения точных равенств $\overline{x} = x^*$ и $\overline{p} = p^*$, но требуем лишь малость величин $|\overline{x} - x^*|$ и $|\overline{p} - p^*|$. Соответственно введенные моменты $\Delta_* x^2$ и $\Delta_* p^2$, вообще говоря, не являются дисперсиями координаты и импульса. Но именно условие малости моментов, определяемых формулами (9) и (10), и рассматривается в [2] в качестве условия справедливости сопоставления квантовому волновому пакету ψ классической частицы с координатой x^* и импульсом p^*.

Обозначим среднеквадратичные отклонения координаты и импульса через Δx^2 и Δp^2:

$$\Delta x^2 = \int\limits_{-l}^{l} (x - \overline{x})^2 |\psi(x)|^2\, dx, \qquad \Delta p^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (p_k - \overline{p})^2 |a_k|^2. \tag{13}$$

Легко показать, что

$$\Delta_* x^2 = \Delta x^2 + (\overline{x} - x^*)^2, \qquad \Delta_* p^2 = \Delta p^2 + (\overline{p} - p^*)^2. \tag{14}$$

Таким образом, из условия малости введенных моментов $\Delta_* x$ и $\Delta_* p$ следует как малость $|\overline{x} - x^*|$ и $|\overline{p} - p^*|$, так и малость дисперсий координаты и импульса. Обратно, из одновременной близости средних значений координаты и импульса значениям x^* и p^* и малости дисперсий координаты и импульса следует и малость $\Delta_* x$ и $\Delta_* p$.

Если мы отождествляем крайние точки $(x = l)$ и $(x = -l)$ и интерпретируем отрезок как окружность (см. оператор Гамильтона $\widehat{H}_2$ в разд. 2), то $\frac{\pi}{l}x \in [-\pi, \pi]$ — это полярная координата угла. Но положить $x = 0$ мы можем для любой точки на окружности, от которой затем и будем отсчитывать значение координаты x для всех точек. Иными словами, разорвать окружность в отрезок мы можем в произвольной точке. И определения среднего значения координаты (12) и моментов (9) и (13) будут зависеть от того, от какой точки мы отсчитываем угол. Поэтому эти определения не вполне корректны для окружности. Положим $x^* = 0$, т.е. будем отсчитывать угол от той точки, в которой должна находиться классическая частица. Если около этой точки в самом деле имеется сгусток плотности квантового волнового пакета, а вдали от этой точки плотность вероятности близка к нулю, то, определяя среднее и моменты по прежним формулам (12), (9) и (13), получим значение среднего $\overline{x}$, близкое к $x^* = 0$, и малые Δx и $\Delta_* x$. Таким образом, сопоставление такому квантовому волновому пакету классической частицы, расположенной в заданной точке, будет адекватным.

Следствием дискретности импульсного спектра, о котором говорилось ранее, является существование волновых функций с определенным импульсом и конечным разбросом по координате. Например, для функции $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} e^{i\frac{\pi}{l}kx}$, $k \in \mathbb{Z}$, среднеквадратичное отклонение по координате и импульсу соответственно равно $\Delta x = l/\sqrt{3}$ и $\Delta p = 0$. Отсюда и следует (7).

Мы построим семейство ψ_α, $\alpha > 0$, функций из $L_2(-l, l)$, которое обладает следующими свойствами.

1. При $\alpha \to \infty$ выполняется соотношение

$$\Delta x_\alpha \Delta p_\alpha \to \frac{\hbar}{2}, \tag{15}$$

   где Δx_α и Δp_α — среднеквадратичные отклонения координаты и импульса для состояния ψ_α, т.е. асимптотически выполняется минимальное соотношение неопределенностей, которому удовлетворяют когерентные состояния на $\mathbb{R}$ (см. (6)).

2. При $\alpha \to \infty$ имеет место $\Delta x_\alpha \to 0$ (т.е. разброс по координате можно сколь угодно уменьшать ценой увеличения разброса по импульсу).

3. При $\alpha \to \infty$ имеет место $\overline{x} \to x^*$ и $\overline{p} \to p^*$ (т.е. средние значения координаты и импульса стремятся к заданным).

4. При $l \to \infty$ функции ψ_α сходятся к сжатым состояниям на вещественной прямой (5).

Будем тогда называть состояния из такого семейства *сжатыми состояниями на отрезке*.

Мы можем использовать построенные состояния в теории наносистем [12]. Пространственные размеры наносистем обычно ограничиваются в диапазоне от 1 нм до 100 нм. Можно показать, что существуют значения α, при которых Δx_α и Δp_α малы одновременно при длине отрезка, равной, например, $l = 100$ нм. В частности, существуют состояния из такого семейства, для которых справедливо $\Delta x \sim 0.1$ нм, $\Delta p \sim 10^{-24}$ кг$\cdot$м/с (что при массе атома водорода $m \sim 10^{-27}$ кг соответствует минимальной энергии порядка 10^{-2} эВ). Такой пакет хорошо локализован в том смысле, что дисперсия координаты частицы меньше 0.1 нм и энергия, необходимая для приготовления такого состояния, достаточно мала.

5. СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ В ВИДЕ ОБРЕЗАННОЙ ФУНКЦИИ ГАУССА

В качестве кандидата на искомое семейство волновых функций можно предложить “обрезанные функции Гаусса” вида

$$\psi_{0\beta}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\beta^2}}\, e^{-\frac{(x-x^*)^2}{4\beta^2} + i\frac{xp^*}{\hbar}} \chi_{[-l,l]}(x), \qquad \beta > 0,$$

где $\chi_{[-l,l]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-l,l]$, $x^* \in (-l,l)$, $p^* \in \mathbb{R}$ — заданные координата и импульс частицы. Однако, по всей видимости, такой выбор не является самым удачным, поскольку для функций из этого семейства $\psi'_{0\beta}(-l) \neq \psi'_{0\beta}(l)$. А если $x^* \neq 0$, то и $\psi_{0\beta}(-l) \neq \psi_{0\beta}(l)$. В то же время если импульсные коэффициенты a_k быстро убывают (например, если $a_k = O(k^{-2-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$), то ряд (11) сходится равномерно вместе с рядом из производных

$$\psi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} i\frac{\pi}{l} k\, a_k e^{i\frac{\pi}{l}kx}.$$

А тогда, очевидно, $\psi(-l) = \psi(l)$ и $\psi'(-l) = \psi'(l)$, поскольку этими свойствами обладает общий член ряда $\psi(x)$.

Обратим внимание, что поскольку функции $\psi_{0\beta}(x)$ не принадлежат области определения оператора $\widehat{p}^2$ и при $x^* \neq 0$ не принадлежат также и области определения $\widehat{p}$, то для вычисления среднего значения и дисперсии импульса нельзя использовать формулы

$$\overline{p} = \int_{-l}^{l} \overline{\psi(x)} \left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right) \psi(x)\, dx, \qquad \Delta p^2 = \int_{-l}^{l} \overline{\psi(x)} \left(-i\hbar\frac{d}{dx} - \overline{p}\right)^2 \psi(x)\, dx.$$

Рассмотрим другое семейство “обрезанных функций Гаусса”, в которых функции гладко обращаются в нуль в малых окрестностях концов отрезка:

$$\psi_\beta(x) = \frac{B_\beta}{\sqrt[4]{2\pi\beta^2}}\, e^{-\frac{(x-x^*)^2}{4\beta^2} + i\frac{xp^*}{\hbar}} \eta_\epsilon(x), \qquad \beta > 0, \tag{16}$$

где

$$\eta_\epsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\epsilon(y)\, \omega_\epsilon(x-y)\, dy, \qquad \omega_\epsilon(x) = \begin{cases} C_\epsilon e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon - |x|}}, & |x| < \epsilon, \\ 0, & |x| \geq \epsilon, \end{cases}$$

$\omega_\epsilon(x)$ — функция “шапочка” (постоянная C_ϵ выбирается таким образом, чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\epsilon(x)\, dx = 1$), $\chi_\epsilon(x)$ — характеристическая функция отрезка $[-l+2\epsilon, l-2\epsilon]$. Очевидно, $0 \leq \eta_\epsilon(x) \leq 1$,

$$\eta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-l+3\epsilon, l-3\epsilon], \\ 0, & x \notin [-l+\epsilon, l-\epsilon]. \end{cases}$$

B_β — нормировочная постоянная, $\epsilon > 0$ выбирается произвольно. Будем всегда выбирать ϵ настолько малым, чтобы по крайней мере $|x^*| < l - 3\epsilon$, т.е. $\eta_\epsilon = 1$ в некоторой окрестности точки x^*.

В отличие от функций $\psi_{0\beta}(x)$ функции $\psi_\beta(x)$ принадлежат областям определения операторов $\widehat{p}^m$ для любого $m = 1, 2, \ldots$

Лемма 1. *Если* $\int_{-l}^{l} |\psi_\beta(x)|^2\, dx = 1$, *то*

$$B_\beta = 1 + O\left(e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}}\right), \qquad \beta \to 0. \tag{17}$$

Доказательство.

$$1=\int\limits_{-l}^{l}|\psi_\beta(x)|^2\,dx\geq\frac{B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\int\limits_{-l+3\epsilon}^{l-3\epsilon}e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\beta^2}}\,dx,$$

отсюда

$$B_\beta\leq\frac{1}{\sqrt{1+O\Bigl(\beta e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}}\Bigr)}}=1+O\Bigl(\beta e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}}\Bigr),$$

где мы воспользовались асимптотикой гауссова интеграла (A.1) (см. приложение A ниже). □

Теорема 1. *Для волновых функций* $\psi_\beta(x)$, $\beta>0$, *определенных по формуле* (16), *справедливы следующие асимптотики при* $\beta\to0$:

$$\overline{x}_\beta=x^*+O\Bigl(\beta e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}}\Bigr), \tag{18}$$

$$\overline{p}_\beta=p^*, \tag{19}$$

$$\Delta_*x_\beta^2=\beta^2+O\Bigl(\beta e^{-\frac{l-|x^*|-3\epsilon}{2\beta^2}}\Bigr), \tag{20}$$

$$\Delta_*p_\beta^2=\left(\frac{\hbar}{4\beta}\right)^2+O\Bigl(\beta^{-3}e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)}{2\beta^2}}\Bigr). \tag{21}$$

Доказательство.

$$\overline{x}_\beta=\int\limits_{-l}^{l}x|\psi_\beta(x)|^2\,dx=x^*+\int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*}x|\psi_\beta(x+x^*)|^2\,dx=$$

$$=x^*+\frac{B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\int\limits_{-l-x^*+3\epsilon}^{l-x^*-3\epsilon}xe^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}\,dx+\frac{B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\left(\int\limits_{-l-x^*}^{-l-x^*+3\epsilon}+\int\limits_{l-x^*-3\epsilon}^{l-x^*}\right)xe^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}\eta_\epsilon(x)\,dx=$$

$$=x^*+O\Bigl(\beta e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}}\Bigr),$$

где мы воспользовались асимптотикой гауссова интеграла (A.1), только что полученной формулой (17) и оценкой $|\eta_\epsilon(x)|\leq1$. Формула (18) доказана.

$$\overline{p}_\beta=\int\limits_{-l}^{l}\overline{\psi_\beta(x)}(-i\hbar)\psi'_\beta(x)\,dx=\int\limits_{-l}^{l}|\psi_\beta(x)|^2\left(p^*+\frac{i\hbar(x-x^*)}{2\beta^2}\right)dx-\frac{i\hbar B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\int\limits_{-l}^{l}e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\beta^2}}\eta_\epsilon(x)\eta'_\epsilon(x)\,dx.$$

Мнимые слагаемые должны уничтожиться, поскольку среднее от самосопряженного оператора должно быть вещественным. Поэтому $\overline{p}_\beta=p^*$, т.е. получили формулу (19).

$$\Delta_*x_\beta^2=\int\limits_{-l}^{l}(x-x^*)^2|\psi_\beta(x)|^2\,dx=\int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*}x^2|\psi_\beta(x+x^*)|^2\,dx=\beta^2+O\Bigl(\beta e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}}\Bigr).$$

Здесь мы воспользовались асимптотикой (A.2). Формула (20) доказана.

$$\Delta_* p_\beta^2 = -\hbar^2 \int_{-l}^{l} \overline{\psi_\beta(x)} \psi_\beta''(x)\,dx - (p^*)^2 = \int_{-l}^{l} |\psi_\beta(x)|^2 \left[(p^*)^2 - \frac{\hbar^2 (x-x^*)^2}{4\beta^4} + \frac{\hbar^2}{2\beta^2} - \frac{ip^*\hbar(x-x^*)}{\beta^2} \right] dx +$$

$$+ \frac{B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{2\beta^2}} \left[-\hbar^2 \eta_\epsilon(x)\eta_\epsilon''(x) + 2\eta_\epsilon(x)\eta_\epsilon'(x) \left(\frac{\hbar(x-x^*)}{2\beta^2} - i\hbar p^* \right) \right] dx - (p^*)^2.$$

Снова мнимые слагаемые должны уничтожиться, поскольку среднее от самосопряженного оператора должно быть вещественным. Имеем

$$\Delta_* p_\beta^2 = \int_{-l}^{l} |\psi_\beta(x)|^2 \left(\frac{\hbar^2}{2\beta^2} - \frac{\hbar^2 (x-x^*)^2}{4\beta^4} \right) dx +$$

$$+ \frac{B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{\beta^2}} \left[\eta_\epsilon(x)\eta_\epsilon'(x) \frac{\hbar(x-x^*)}{2\beta^2} - \hbar^2 \eta_\epsilon(x)\eta_\epsilon''(x) \right] dx.$$

Здесь

$$\int_{-l}^{l} |\psi_\beta(x)|^2 \frac{\hbar^2 (x-x^*)^2}{4\beta^4}\,dx = \left(\frac{\hbar}{2\beta} \right)^2 + O\left(\beta^{-3} e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)^2}{2\beta^2}} \right).$$

В силу ограниченности (при фиксированном ϵ) функций $\eta_\epsilon(x)$, $\eta_\epsilon'(x)$ и $\eta_\epsilon''(x)$ и того, что $\eta_\epsilon'(x)$ и $\eta_\epsilon''(x)$ отличны от нуля только на отрезках $[-l+\epsilon, -l+3\epsilon]$ и $[l-3\epsilon, l-\epsilon]$,

$$\frac{B_\beta^2}{\sqrt{2\pi\beta^2}} \int_{-l}^{l} e^{-\frac{(x-x^*)^2}{\beta^2}} \left[\eta_\epsilon(x)\eta_\epsilon'(x) \frac{\hbar(x-x^*)}{2\beta^2} - \hbar^2 \eta_\epsilon(x)\eta_\epsilon''(x) \right] dx = O\left(\beta^{-1} e^{-\frac{(l-|x^*|)^2}{2\beta^2}} \right).$$

Поэтому

$$\Delta_* p_\beta^2 = \left(\frac{\hbar}{2\beta} \right)^2 + O\left(\beta^{-3} e^{-\frac{(l-|x^*|)^2}{2\beta^2}} \right).$$

Формула (21) и теорема в целом доказаны. $\square$

Следствие 1. *Для волновых функций* $\psi_\beta(x)$, $\beta > 0$, *определенных по формуле* (16), *справедлива асимптотика при* $\beta \to 0$

$$\Delta x_\beta^2 \Delta p_\beta^2 = \frac{\hbar^2}{4} + O\left(\beta^{-1} e^{-\frac{(l-|x^*|-3\epsilon)}{2\beta^2}} \right) \tag{22}$$

(*т.е. выполнено соотношение* (15)).

Итак, при $\beta \to 0$ имеет место $\Delta x_\beta \to 0$, $\Delta p_\beta \to \infty$. При $\beta \to \infty$ и $\epsilon \to 0$, очевидно, $\Delta p_\beta \to 0$ и $\Delta x_\alpha \to l/\sqrt{3}$ (ввиду того что $\psi(x) \to 1/\sqrt{2l}$ в $L_2(-l,l)$ (см. разд. 4)).

При достаточно малых β (таких, что можно пользоваться асимптотическими оценками теоремы 1) имеют место по порядку те же оценки на Δx и Δp, что и оценки для когерентных состояний на прямой $\Delta x \sim 0.1$ нм и $\Delta p \sim 10^{-24}$ кг $\cdot$ м/с.

6. СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ В ВИДЕ ТЕТА-ФУНКЦИИ

Укажем другой способ построения семейства волновых функций с искомыми свойствами. По заданным координате $x^* \in (-l, l)$ и импульсу $p^* \in \mathbb{R}$ определим семейство функций на $L_2(-l, l)$ при $\alpha > 0$ следующим образом:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(\alpha)} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)},$$

где

$$a_k^{(\alpha)} = A_\alpha e^{-\frac{(k-k^*)^2}{4\alpha^2}},$$

k^* — ближайшее целое к $\frac{l}{\pi}\frac{p^*}{\hbar}$, A_α — нормировочная вещественная постоянная.

Волновая функция такого вида представляет собой тета-функцию:

$$\psi_\alpha(x) = \frac{A_\alpha}{\sqrt{2l}}\, \theta\left(\frac{x-x^*}{2l}, \frac{1}{4\pi\alpha^2}\right) e^{i\frac{\pi}{l}k^*(x-x^*)} \tag{23}$$

(см. формулу (B.1) и приложение B).

Лемма 2. *Если* $\int_{-l}^{l} |\psi_\alpha(x)|^2\, dx = 1$, *то*

$$A_\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-2(\pi\alpha)^2}\right), \qquad \alpha \to \infty. \tag{24}$$

Доказательство. Имеем

$$1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|a_k^{(\alpha)}\right|^2 = A_\alpha^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-k^*)^2}{2\alpha^2}} = A_\alpha^2\, \theta\left(0, \frac{1}{2\pi\alpha^2}\right) =$$

$$= A_\alpha^2 \left[\sqrt{2\pi\alpha^2} + O\left(\alpha\, e^{-2(\pi\alpha)^2}\right)\right], \qquad \alpha \to \infty.$$

Здесь использована формула (B.3). Отсюда

$$A_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi\alpha^2} + O\left(\alpha e^{-2(\pi\alpha)^2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-2(\pi\alpha)^2}\right), \qquad \alpha \to \infty. \quad \square$$

Теорема 2. *Для волновых функций* $\psi_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, *определенных по формуле* (23), *справедливы следующие оценки при* $\alpha \to \infty$:

$$\psi_\alpha(x) = \sqrt[4]{\frac{2\pi\alpha^2}{l^2}} e^{-\left(\alpha\pi d\, \frac{x-x^*}{l}\right)^2 + i\frac{\pi}{l}k^*(x-x^*)} + O\left(\sqrt{\alpha} e^{-(\pi\alpha)^2}\right), \tag{25}$$

$$\overline{x}_\alpha - x^* = l\, O\left(\alpha^{-1} e^{-2\left[\pi\alpha\left(1-\frac{|x^*|}{l}\right)\right]^2}\right), \tag{26}$$

$$|\overline{p}_\alpha - p^*| \le \frac{\pi}{l}\hbar, \tag{27}$$

$$\Delta_* x_\alpha^2 = \left(\frac{l}{2\pi\alpha}\right)^2 + l^2 O\left(\alpha^{-1} e^{-2\left[\pi\alpha\left(1-\frac{|x^*|}{l}\right)\right]^2}\right), \tag{28}$$

$$\Delta_* p_\alpha^2 = \left(\frac{\pi}{l}\hbar\alpha\right)^2 \left[1 + O\left(e^{-2(\pi\alpha)^2}\right)\right]. \tag{29}$$

Здесь $0 \le d(x) \le \frac{1}{2}$ *— расстояние на вещественной прямой от точки* x *до ближайшего целого числа.*

Доказательство. Подставляя в формулу (23) формулы (24) и (B.3), получаем

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}}\, e^{i\frac{\pi}{l}k^*(x-x^*)} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} + O\biggl(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-2(\pi\alpha)^2}\biggr)\right] \times$$
$$\times \left[\sqrt{4\pi\alpha^2}\, e^{-4\left[\pi\alpha d\,\frac{x-x^*}{2l}\right]^2} + O\Bigl(\alpha e^{-4\left[\pi\alpha\left(1-d\,\frac{x-x^*}{2l}\right)\right]^2}\Bigr)\right] =$$
$$= \sqrt[4]{\frac{2\pi\alpha^2}{l^2}} e^{-\left(\alpha\pi d\,\frac{x-x^*}{l}\right)^2 + i\frac{\pi}{l}k^*(x-x^*)} + O\bigl(\sqrt{\alpha}e^{-(\pi\alpha)^2}\bigr).$$

Получена формула (25).

$$\overline{x}_\alpha = \int\limits_{-l}^{l} x|\psi_\alpha(x)|^2\,dx = \int\limits_{-l}^{l} x^*|\psi_\alpha(x)|^2\,dx + \int\limits_{-l}^{l}(x-x^*)|\psi_\alpha(x)|^2\,dx =$$
$$= x^* + \int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*} x|\psi_\alpha(x+x^*)|^2\,dx = x^* + \frac{A_\alpha^2}{2l}\int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*} x\left|\theta\biggl(\frac{x}{2l}, \frac{1}{4\pi\alpha^2}\biggr)\right|^2 dx =$$
$$= x^* + 2lA_\alpha^2 \int\limits_{-\frac{1}{2}-\frac{x^*}{2l}}^{\frac{1}{2}-\frac{x^*}{2l}} y\left|\theta\biggl(y, \frac{1}{4\pi\alpha^2}\biggr)\right|^2 dy = x^* + l\,O\Bigl(\alpha^{-1}e^{-2\left[\pi\alpha\left(1-\frac{|x^*|}{l}\right)\right]^2}\Bigr)$$

(в последнем равенстве использованы формулы (24) и (B.5)). Доказана формула (26).

Оценка (27) следует из того, что

$$\overline{p}_\alpha = \frac{\pi}{l}\hbar \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\bigl|a_k^{(\alpha)}\bigr|^2 = \frac{\pi}{l}\hbar k^*,$$

а k^* — ближайшее целое к $\frac{l}{\pi}\frac{p^*}{\hbar}$.

$$\Delta_* x_\alpha^2 = \int\limits_{-l}^{l}(x-x^*)^2|\psi_\alpha(x)|^2\,dx = \int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*} x^2|\psi_\alpha(x+x^*)|^2\,dx =$$
$$= \frac{A_\alpha^2}{2l}\int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*} x^2\left|\theta\biggl(\frac{x}{2l}, \frac{1}{4\pi\alpha^2}\biggr)\right|^2 dx = (2l)^2 A_\alpha^2 \int\limits_{-\frac{1}{2}-\frac{x^*}{2l}}^{\frac{1}{2}-\frac{x^*}{2l}} y^2\left|\theta\biggl(y, \frac{1}{4\pi\alpha^2}\biggr)\right|^2 dy =$$
$$= (2l)^2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} + O\biggl(\frac{1}{\alpha}e^{-(\pi\alpha)^2}\biggr)\right]\left[\frac{1}{4\pi\sqrt{8\pi\alpha^2}} + O\Bigl(e^{-2\left[\pi\alpha\left(1-\frac{|x^*|}{l}\right)\right]^2}\Bigr)\right] =$$
$$= \biggl(\frac{l}{2\pi\alpha}\biggr)^2 + l^2 O\Bigl(\alpha^{-1}e^{-2\left[\pi\alpha\left(1-\frac{|x^*|}{l}\right)\right]^2}\Bigr)$$

(использованы формулы (24) и (В.6)). Доказана формула (28).

$$\Delta_* p_\alpha^2 = \Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k-k^*)^2 \big|a_k^{(\alpha)}\big|^2 = A_\alpha^2 \Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2 e^{-\frac{k^2}{2\alpha^2}} =$$

$$= \Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2 \bigg[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} + O\Big(\frac{1}{\alpha} e^{-(\pi\alpha)^2}\Big)\bigg] \big[\sqrt{2\pi}\alpha^3 + O\big(\alpha^3 e^{-2(\pi\alpha)^2}\big)\big] = \Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2 \big[\alpha^2 + O\big(\alpha^2 e^{-2(\pi\alpha)^2}\big)\big]$$

(использованы формулы (24) и (В.4)). Доказана формула (29). Теорема полностью доказана. $\square$

Следствие 2. *Для волновых функций* $\psi_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, *определенных по формуле* (23), *справедлива асимптотика при* $\alpha \to \infty$

$$\Delta x_\alpha^2 \Delta p_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{4} + O\Big(\alpha e^{-2\left[\pi\alpha\left(1-\frac{|x^*|}{l}\right)\right]^2}\Big) \tag{30}$$

(*т.е. выполнено соотношение* (15)).

Из сравнения формул (20), (21) и (28), (29) видно, что параметру β соответствует значение параметра α, равное $\alpha = \frac{l}{2\pi\beta}$. Поэтому можно переписать (30) в виде

$$\Delta x_\beta^2 \Delta p_\beta^2 = \frac{\hbar^2}{4} + O\Big(\beta^{-1} e^{-\frac{(l-|x^*|)^2}{2\beta^2}}\Big).$$

В сравнении с формулой (22) видно, что скорость стремления левой части к $\hbar^2/4$ является несколько большей, чем для обрезанной функции Гаусса, поскольку $\epsilon > 0$. В то же время ϵ может быть сколь угодно малым, поэтому разность скоростей стремления может быть уменьшена до сколь угодно малой величины.

Можно, однако, отметить более быструю скорость убывания остаточного члена для $\Delta_* p^2$ в случае тета-функции (в формуле (29) в остаточном члене перед экспонентой стоит множитель α^2, а в формуле (21) — множитель β^{-3}).

Итак, при $\alpha \to \infty$ имеет место $\Delta x_\alpha \to 0$, $\Delta p_\alpha \to \infty$. При $\alpha \to 0$, очевидно, $\Delta p_\alpha \to 0$, поскольку $a_k \to \delta_{k\overline{k}}$. Тогда $\Delta x_\alpha \to l/\sqrt{3}$. При достаточно больших α (таких, что можно пользоваться асимптотическими оценками теоремы 2) снова имеют место оценки $\Delta x \sim 0.1$ нм и $\Delta p \sim 10^{-24}$ кг $\cdot$ м/с.

Мы установили асимптотическую минимизацию соотношений неопределенностей (15). Представляется интересным вопрос о нахождении состояний, при которых в соотношении неопределенностей (8) достигается равенство при конечных Δx и Δp. Мы предполагаем, что функциями, минимизирующими это соотношение неопределенностей, могут быть функции ψ_α из построенного здесь на основе тета-функции семейства.

7. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В предыдущем разделе в основу построения семейства волновых функций с искомыми свойствами была положена плотность распределения Гаусса (тета-функция — в известном смысле дискретный аналог функции Гаусса). Укажем общий метод, когда в основу импульсного распределения положена произвольная плотность.

Снова пусть $x^* \in (-l, l)$, $p^* \in \mathbb{R}$ — заданные координата и импульс частицы. Введем также обозначение $k^* = \frac{l}{\pi}\frac{p^*}{\hbar}$. Пусть $\varphi(q)$ — плотность распределения на прямой, т.е. функция такая, что $\varphi(q) \geq 0$, $q \in \mathbb{R}$, и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(q)\, dq = 1$. Потребуем, чтобы $\varphi(q)$ имела конечные моменты первого и второго порядков. Обозначим

$$\varphi_l(q) = \frac{\pi}{l}\,\varphi\Big(\frac{\pi}{l}q\Big), \tag{31}$$

$$\overline{k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\varphi_l(q)\,dq, \qquad \widetilde{\Delta}k^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (q-\overline{k})^2\varphi_l(q)\,dq, \qquad \overline{p} = \frac{\pi}{l}\hbar\overline{k}.$$

Без ограничения общности считаем, что $\overline{k}$ — ближайшее к k^* целое число (очевидно, для произвольной функции плотности это требование может быть выполнено с помощью сдвига). Тогда

$$|\overline{p} - p^*| \le \frac{\pi}{l}\hbar. \tag{32}$$

Введем семейство функций $\{\varphi_\alpha(k)\}_{\alpha\in\mathbb{R}_+}$, где $\mathbb{R}_+$ — множество действительных положительных чисел, по формуле

$$\varphi_{\alpha l}(q) = \frac{1}{\alpha}\,\varphi_l\bigg(\overline{k} + \frac{q-\overline{k}}{\alpha}\bigg). \tag{33}$$

Справедливы соотношения

$$\begin{gathered} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\alpha l}(q)\,dq = 1, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\varphi_{\alpha l}(q)\,dq = \overline{k}, \\ \widetilde{\Delta}k_\alpha^2 \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (q-\overline{k})^2\varphi_{\alpha l}(q)\,dq = \alpha^2\widetilde{\Delta}k^2. \end{gathered} \tag{34}$$

Таким образом, $\{\varphi_{\alpha l}\}$, $\alpha > 0$, — семейство плотностей распределения с одинаковыми средними и с возрастающими пропорционально α среднеквадратичными отклонениями.

Положим

$$a_k^{(\alpha)} = \left[\int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi_{\alpha l}(q)\,dq\right]^{1/2}, \tag{35}$$

где $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$;

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(\alpha)} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)}, \tag{36}$$

где $x^* \in (-l, l)$.

Обозначим средние и среднеквадратичные отклонения координаты и импульса для волновой функции ψ_α через $\overline{x}_\alpha$, $\overline{p}_\alpha$, Δx_α, Δp_α.

Теорема 3. *Пусть плотность распределения $\varphi(q)$ обладает следующими свойствами*:

1) $\varphi(\overline{k}_l + q) = \varphi(\overline{k}_l - q)$ *(т.е. функция $\varphi(q - \overline{k}_l)$ четна), где $\overline{k}_l = \frac{\pi}{l}\overline{k}$;*
2) *$\varphi(q)$ имеет в точке $k = \overline{k}_l$ максимум и не возрастает при удалении q от $\overline{k}_l$ (т.е. не возрастает при возрастании $|q - \overline{k}_l|$; таким образом, локальный максимум в точке $q = \overline{k}_l$ является и глобальным).*

Тогда выполнены следующие неравенства и соотношения:

$$\Delta_* x_\alpha^2 \le \frac{9\pi\varphi(\overline{k}_l)l}{2\alpha} \int_{-1}^{1} \frac{(y-\frac{x^*}{l})^2}{\sin^2\frac{\pi}{2}(y-\frac{x^*}{l})}\,dy, \tag{37}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\Delta_* p_\alpha}{\alpha} = C \ne 0, \tag{38}$$

$$|\overline{x}_\alpha - x^*| \le \frac{x^*}{\alpha l}\frac{18\pi\varphi(\overline{k}_l)}{\cos^2\frac{\pi x^*}{2l}}, \tag{39}$$

$$\overline{p}_\alpha = \frac{\pi}{l}\hbar\overline{k} \equiv \overline{p}. \tag{40}$$

Для доказательства теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 3. *Для произвольной функции $\varphi(k)$, удовлетворяющей условиям теоремы* 3,

1) *выполнено соотношение*

$$\overline{p}_\alpha = \frac{\pi}{l}\hbar\overline{k} \equiv \overline{p};$$

2а) *справедливо неравенство*

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{l}\hbar\right)^2\left[1+\frac{2}{\alpha}\varphi_l(\overline{k})\right] \le \Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 \le \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{l}\hbar\right)^2\left[1+\frac{2}{\alpha}\varphi_l(\overline{k})\right],$$

где $\widetilde{\Delta} p_\alpha = \frac{\pi}{l}\hbar\widetilde{\Delta} k_\alpha$;

2б) *если функция $\varphi(k)$ является дважды непрерывно дифференцируемой (т.е. $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$), $\varphi''(k) = O(1/k^2)$ при $k \to \pm\infty$ и $\varphi''(k)$ имеет конечное число локальных экстремумов, то справедлив более точный результат:*

$$\Delta_* p_\alpha^2 = \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 + \left(\frac{\pi}{l}\hbar\right)^2\left[\frac{1}{12} + O\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)\right], \qquad \alpha\to\infty.$$

Доказательство леммы см. в приложении C.

Лемма 4. *Пусть $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ — ненулевая монотонная квадратично сходящаяся (т.е. $\sum_{k=0}^\infty a_k^2 < \infty$) последовательность действительных чисел. Тогда для функции*

$$\chi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cos kx \tag{41}$$

выполнена оценка

$$|\chi(x)| \le \frac{|a_0|}{|\sin\frac{x}{2}|} \tag{42}$$

при $x \ne 2\pi n$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$

Доказательство леммы см. в приложении D.

Доказательство теоремы 3. Прежде всего заметим, что по формуле (35) и условию 1) теоремы

$$a^{(\alpha)}_{\overline{k}+k} = a^{(\alpha)}_{\overline{k}-k} \tag{43}$$

для всех k и α.

Докажем оценку (37). В силу (43) имеем

$$\psi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(\alpha)} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)} = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{\overline{k}+k}^{(\alpha)} e^{i\frac{\pi}{l}(\overline{k}+k)(x-x^*)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2l}} \left[2 \sum_{k=0}^{+\infty} a_{\overline{k}+k}^{(\alpha)} \cos \frac{\pi}{l} k(x-x^*) - a_{\overline{k}}^{(\alpha)} \right] e^{i\frac{\pi}{l}\overline{k}(x-x^*)}. \tag{44}$$

Тогда из леммы 4 следует, что

$$|\psi_\alpha(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2l}} \frac{3|a_{\overline{k}}^{(\alpha)}|}{|\sin \frac{\pi(x-x^*)}{2l}|} = \frac{3}{\sqrt{2l}} \left[\frac{1}{\alpha} \int\limits_{\overline{k}-1/2}^{\overline{k}+1/2} \varphi_l\left(\overline{k} + \frac{q-\overline{k}}{\alpha}\right) dq \right]^{1/2} \frac{1}{|\sin \frac{\pi(x-x^*)}{2l}|} \le$$

$$\le 3\sqrt{\frac{1}{2\alpha l}\varphi_l(\overline{k})} \frac{1}{|\sin \frac{\pi(x-x^*)}{2l}|} = 3\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha l^2}\varphi(\overline{k}_l)} \frac{1}{|\sin \frac{\pi(x-x^*)}{2l}|} \tag{45}$$

для любого $x \in [-l, l] \setminus \{x^*\}$. Отсюда по формуле (9)

$$\Delta_* x_\alpha^2 \le \frac{9\pi\varphi(\overline{k}_l)}{2\alpha l^2} \int\limits_{-l}^{l} \frac{(x-x^*)^2}{\sin^2 \frac{\pi(x-x^*)}{2l}}\, dx = \frac{9\pi\varphi(\overline{k}_l) l}{2\alpha} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(y-\frac{x^*}{l})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2}(y-\frac{x^*}{l})}\, dy.$$

Формула (38) непосредственно следует из леммы 3 и третьего соотношения в (34).

Докажем неравенство (39):

$$\overline{x} = \int\limits_{-l}^{l} x|\psi(x)|^2\, dx = \int\limits_{-l}^{l} (x-x^*)|\psi(x)|^2\, dx + x^* = \int\limits_{-l-x^*}^{l-x^*} x|\psi(x+x^*)|^2\, dx + x^*.$$

Пусть $x^* \ge 0$. В силу (44) $|\psi(x^*+x)| = |\psi(x^*-x)|$ для любого $x \in [l-x^*, l+x^*]$. Поэтому

$$\overline{x} - x^* = \int\limits_{-l-x^*}^{-l+x^*} x|\psi(x+x^*)|^2\, dx.$$

С одной стороны, интеграл, стоящий в правой части, не больше нуля, поскольку на интервале интегрирования $x \le 0$. С другой стороны, используя (45), получаем

$$\int\limits_{-l-x^*}^{-l+x^*} x|\psi(x+x^*)|^2\, dx \ge \frac{9\pi\varphi(\overline{k}_l)}{2\alpha l^2} \int\limits_{-l-x^*}^{-l+x^*} \frac{x\, dx}{\sin^2 \frac{\pi x}{2l}} \ge \frac{9\pi\varphi(\overline{k}_l)}{2\alpha l^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi(l+x^*)}{2l}} \int\limits_{-l-x^*}^{-l+x^*} x\, dx$$

$$\ge -\frac{x^*}{\alpha l} \frac{18\pi\varphi(\overline{k}_l)}{\cos^2 \frac{\pi x^*}{2l}}.$$

Таким образом,

$$-\frac{x^*}{\alpha l} \frac{18\pi\varphi(\overline{k}_l)}{\cos^2 \frac{\pi x^*}{2l}} \le \overline{x} - x^* \le 0.$$

Аналогично, если $x^* \leq 0$, получаем

$$0 \leq \overline{x} - x^* \leq \frac{x^*}{\alpha l} \frac{18\pi\varphi(\overline{k}_l)}{\cos^2 \frac{\pi x^*}{2l}}.$$

Оценка (39) доказана. Равенство (40) доказано в виде утверждения 1) леммы 3.

Теорема полностью доказана. $\square$

Следствие 3. *Для волновых функций* $\psi_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, *определенных по формуле* (36), *справедлива оценка*

$$\Delta x_\alpha^2 \Delta p_\alpha \leq \frac{9}{2}\pi^2 \hbar\varphi(\overline{k}_l)\widetilde{\Delta}k \int\limits_{-1}^{1} \frac{(y - \frac{x^*}{l})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2}(y - \frac{x^*}{l})}\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{\alpha\widetilde{\Delta}k}\right)^2 \delta}. \tag{46}$$

Здесь $\delta = \frac{1}{6} + \frac{1}{3\alpha}\varphi_l(\overline{k})$. *Если выполнены условия утверждения* 2б) *леммы* 3, *то* $\delta = \frac{1}{12} + O(\alpha^{-2})$, $\alpha \to \infty$.

Доказательство. Согласно лемме 3

$$\Delta_* p_\alpha^2 = \widetilde{\Delta}p_\alpha^2 + \left(\frac{\pi}{l}\hbar\right)^2 \delta.$$

Учитывая, что в соответствии с (34)

$$\widetilde{\Delta}p_\alpha^2 = \left(\frac{\pi}{l}\hbar\widetilde{\Delta}k_\alpha\right)^2 = \left(\frac{\pi}{l}\hbar\alpha\widetilde{\Delta}k\right)^2,$$

имеем

$$\Delta_* p_\alpha^2 = \left(\frac{\pi}{l}\hbar\alpha\widetilde{\Delta}k\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\hbar\right)^2 \delta.$$

Отсюда и из (37) с учетом того, что в силу (14) $\Delta x_\alpha \leq \Delta_* x_\alpha$ и $\Delta p_\alpha \leq \Delta_* p_\alpha$, получаем искомую оценку (46). $\square$

При $\alpha \to \infty$ (а также в силу малости $\hbar$) последним множителем в правой части (46) можно пренебречь, и тогда имеем

$$\Delta x_\alpha^2 \Delta p_\alpha \lesssim \frac{9}{2}\pi^2 \hbar\varphi(\overline{k})\widetilde{\Delta}k \int\limits_{-1}^{1} \frac{(y - \frac{x^*}{l})^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2}(y - \frac{x^*}{l})}\, dy. \tag{47}$$

Пусть $\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}}$ (тогда $\varphi(\overline{k}) = 1/\sqrt{2\pi}$, $\widetilde{\Delta}k = 1$), $l = 100$ нм, $x^* = 0$. Тогда, учитывая, что $\hbar \approx 1.05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с и

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2} y}\, dy \approx 1.12,$$

видим, что условие $\Delta x_\alpha \lesssim 0.1$ нм формула (47) может гарантировать только в случае $\Delta p_\alpha \sim 10^{-13}$ кг $\cdot$ м/с. Сравнивая с аналогичными результатами, полученными в двух предыдущих разделах, в которых были использованы специфические техники для гауссова интеграла и тета-функции, видим, что полученная оценка на Δx_α является довольно грубой. Однако, как уже было сказано, она пригодна для случая произвольной плотности распределения импульса. Кроме того, теорема 3 дает оценки для конечных α, а не только асимптотические при $\alpha \to \infty$.

Как и прежде, при $\alpha \to \infty$ имеет место $\Delta x_\alpha \to 0$, $\Delta p_\alpha \to \infty$, а при $\alpha \to 0$ справедливо $\Delta x_\alpha \to l/\sqrt{3}$ и $\Delta p_\alpha \to 0$.

8. РАЗБРОС ПО ЭНЕРГИИ

Как мы знаем, классическая частица имеет хорошо определенные не только координату x^* и импульс p^*, но и энергию E^*. Для свободной частицы

$$E^* = p^{*2}/2m. \tag{48}$$

Следовательно, чтобы квантовому волновому пакету поставить в соответствие классическую частицу, квантовый пакет должен иметь малые разбросы не только по координате и импульсу $\Delta_* x$ и $\Delta_* p$ соответственно, но и по энергии $\Delta_* E$, который определяется аналогично (9) и (10):

$$\Delta_* E^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n - E^*)^2 |b_n|^2. \tag{49}$$

Здесь $\{E_n\}_{n=0}^{\infty}$ — собственные значения энергии, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ — коэффициенты разложения волновой функции ψ по собственным функциям энергии $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \psi_n.$$

Для частицы на прямой малость разброса по энергии автоматически следует из малости разброса по импульсу вместе с соотношением (48), поскольку операторы импульса и энергии коммутируют. В нашем случае, как было сказано в разд. 2, это не всегда так. В случае оператора Гамильтона $\widehat{H}_2$ (частица на окружности) операторы импульса и энергии по-прежнему коммутируют, поэтому из малости $\Delta_* p$ следует малость $\Delta_* E$.

Но, например, для оператора Гамильтона $\widehat{H}_1$ (частица в бесконечно глубокой потенциальной яме) операторы координаты и импульса не коммутируют. Поэтому разброс по энергии необходимо исследовать отдельно.

Разложим волновую функцию в координатном представлении $\psi(x)$ по собственным функциям импульса и по собственным функциям энергии

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{i\frac{\pi}{l}kx} = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{2l}(x-l) \tag{50}$$

и с помощью выражения

$$\frac{1}{\sqrt{2}l} \int\limits_{-l}^{l} \sin\frac{\pi n}{2l}(x-l)\, e^{i\frac{\pi}{l}kx}\, dx = \begin{cases} \pm(-1)^{n/2}\dfrac{i}{\sqrt{2}} & \text{при четном } n \text{ и } k = \pm\dfrac{n}{2}, \\ 0 & \text{при четном } n \text{ и } k \neq \pm\dfrac{n}{2}, \\ \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{2}\pi}\dfrac{n}{k^2 - (\frac{n}{2})^2} & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

выразим коэффициенты $\{b_n\}$ через коэффициенты $\{a_k\}$:

$$b_n = \begin{cases} (-1)^{n/2}\dfrac{i}{\sqrt{2}}\,(a_{n/2} - a_{-n/2}) & \text{при четном } n, \\ \dfrac{n}{\sqrt{2}\pi} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k a_k}{k^2 - (\frac{n}{2})^2} & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Из сходимости рядов (10) и (49) следует и сходимость следующих рядов:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2|a_k|^2 < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^4|b_n|^2 < \infty. \tag{51}$$

Утверждение 1. *Необходимым условием одновременного выполнения неравенств* (51) *является*

$$\psi(l) = \psi(-l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k a_k = 0. \tag{52}$$

Доказательство. По лемме 5 (см. ниже) из сходимости рядов (51) следует сходимость рядов $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$. Тогда по признаку Вейерштрасса оба ряда в разложениях Фурье (50) сходятся к функции ψ не только в среднеквадратичном, но и равномерно. Подставляя тогда в формулу (50) значение $x = l$, получаем искомую формулу (52). □

Лемма 5. *Пусть* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ *— сходящийся числовой ряд. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} \tag{53}$$

также сходится.

Доказательство. В самом деле, поскольку среднее геометрическое двух чисел не превышает среднее арифметическое тех же чисел, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Оба ряда, стоящие в правой части, сходятся. □

Следствие 4. *В состояниях на отрезке, построенных в соответствии с формулами* (23) *или* (36), *существует минимальное значение* α^* *такое, что если* $\alpha < \alpha^*$, *то дисперсии импульса и энергии не могут быть конечными одновременно.*

Доказательство следует из того, что при $\alpha \to 0$ имеет место $a_k^{(\alpha)} \to \delta_{k\overline{k}}$, поэтому

$$a_{\overline{k}}^{(\alpha)} > \sum_{k \neq \overline{k}} |a_k^{(\alpha)}|$$

при достаточно малых α. Поэтому равенство (52) заведомо не может быть выполнено. □

Можно заметить, что конечность дисперсии физической величины для определенного состояния связана с тем, принадлежит ли это состояние области определения оператора этой физической величины. Эта связь не является очевидной: с физической точки зрения нам неважно, принадлежит ли волновая функция области определения, а важно, чтобы сходилось выражение для дисперсии в виде ряда. Можно предположить некоторое общее утверждение о том, что дисперсия произвольной физической величины (самосопряженного оператора) $\widehat{A}$ в определенном состоянии конечна тогда и только тогда, когда состояние принадлежит области определения $\widehat{A}$.

9. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ БОЛЬШОЙ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Осуществим предельный переход $l \to \infty$. В соответствии с формулами (35) и (36)

$$a_k^{(l)} = \left[\int\limits_{k-1/2}^{k+1/2} \varphi_l(q)\,dq \right]^{1/2}, \qquad \psi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^{(l)} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)}.$$

Здесь в качестве индекса у $a_k^{(l)}$ и ψ_l мы теперь используем не α, как раньше, а l, поскольку теперь α зафиксировано, а l меняется. Без ограничения общности считаем $\alpha = 1$, поскольку фиксированный параметр α может быть включен в функцию φ (поэтому вместо функции $\varphi_{\alpha l}$ мы можем использовать функцию φ_l, см. формулы (31) и (33)).

Теорема 4.

$$\psi_l(x) \to \psi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(q)}\, e^{iq(x-x^*)}\,dq, \qquad l \to \infty.$$

Предел понимается в поточечном смысле.

Таким образом, квантовое состояние на отрезке, составленное по “дискретизированному” импульсному распределению, при $l \to \infty$ переходит в состояние на вещественной прямой с соответствующим непрерывным импульсным распределением.

Доказательство. В силу (31) имеем

$$\psi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\,dq \right]^{1/2} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi\big(\kappa_k^{(l)}\big)\,\frac{\pi}{l}}\; e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)} \to$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(q)}\, e^{iq(x-x^*)}\,dq,$$

где $\kappa_k^{(l)} \in \left[\frac{\pi}{l}\big(k-\frac{1}{2}\big), \frac{\pi}{l}\big(k+\frac{1}{2}\big)\right]$. Для доказательства теоремы необходимо обосновать предельный переход. Для этого достаточно показать, что в следующем выражении пределы по l и по K можно поменять местами:

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\,dq \right]^{1/2} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)} =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-Kl}^{Kl} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\,dq \right]^{1/2} e^{i\frac{\pi}{l}k(x-x^*)}. \quad (54)$$

По условию плотность $\varphi(k)$ имеет конечный второй момент, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} q^2\varphi(q)\,dq < \infty$. Согласно утверждению 2a) леммы 3 отсюда следует, что равномерно по $l \in [l_0, \infty)$, где $l_0 > 0$ произвольно, сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{l^2} \int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\,dq < \infty.$$

Тогда, проводя рассуждение, аналогичное доказательству леммы 5, заключаем, что равномерно по $l \in [l_0, \infty)$ сходится и ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{l} \int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\, dq \right]^{1/2} < \infty.$$

А тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число K_0, что для любого $l \in [l_0, \infty)$

$$\frac{1}{\sqrt{l}} \left(\sum_{k=-\infty}^{-K_0 l} + \sum_{k=K_0 l}^{+\infty} \right) \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\, dq \right]^{1/2} < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\lim_{l\to\infty} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-Kl}^{Kl} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\, dq \right]^{1/2} = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-K_0 l}^{K_0 l} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\, dq \right]^{1/2} + \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-K_0}^{K_0} \sqrt{\varphi(q)}\, dq + \varepsilon.$$

Здесь предельный переход справедлив, так как теперь мы имеем дело с обычными интегральными суммами на конечном отрезке.

Потребуем также, чтобы K_0 было настолько большим, чтобы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{-K_0} + \int\limits_{K_0}^{+\infty} \right) \sqrt{\varphi(q)}\, dq < \varepsilon$$

(сходимость интеграла от $\sqrt{\varphi(k)}$ на бесконечности следует из того, что $\sqrt{\varphi(k)} \le \frac{1}{2}\bigl(k^2\varphi(k) + \frac{1}{k^2}\bigr)$, интегралы от обеих функций в правой части на бесконечности сходятся).

Тогда

$$\left| \lim_{l\to\infty} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-Kl}^{Kl} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\, dq \right]^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(q)}\, dq \right| \le \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом,

$$\lim_{l\to\infty} \lim_{K\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2l}} \sum_{k=-Kl}^{Kl} \left[\int\limits_{\frac{\pi}{l}(k-\frac{1}{2})}^{\frac{\pi}{l}(k+\frac{1}{2})} \varphi(q)\, dq \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\varphi(q)}\, dq,$$

т.е. повторный ряд (54) сходится абсолютно, следовательно, пределы можно поменять местами, что и требовалось доказать. □

Таким образом, получаем волновой пакет на прямой. В частности, если $\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}}$ — гауссова функция, то и предельный волновой пакет на прямой является гауссовым.

Аналогичное рассуждение с несущественными изменениями можно провести и для сжатых состояний в виде тета-функции (см. разд. 6). Для сжатых состояний в виде обрезанной гауссовой функции (см. разд. 5) факт, утверждаемый в теореме, очевиден по построению. Таким образом, последнее свойство, указанное в постановке задачи (см. конец разд. 4) для сжатых состояний на отрезке, также выполнено.

Устремим теперь $\hbar \to 0$. Одновременно устремим и $\alpha \to \infty$ так, чтобы $\hbar\alpha \to 0$. Тогда из доказанных формул (см. теоремы 1, 2 и 3) для всех трех рассмотренных случаев следует, что $\overline{x}_\alpha \to x^*$, $\overline{p}_\alpha \to p^*$, $\Delta x_\alpha \to 0$, $\Delta p_\alpha \to 0$, т.е. в пределе получаем точечную частицу с наперед заданными координатой и импульсом.

Приложение A. АСИМПТОТИКИ ГАУССОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Известна оценка

$$\int\limits_x^\infty e^{-\gamma t^2}dt = O\biggl(\frac{e^{-\gamma x^2}}{x}\biggr), \qquad x \to \infty. \tag{A.1}$$

Лемма A.1. *Справедлива асимптотика*

$$\int\limits_x^\infty t^2 e^{-\gamma t^2}dt = O\bigl(xe^{-\gamma x^2}\bigr), \qquad x \to \infty. \tag{A.2}$$

Доказательство. Возьмем производную от функции

$$\Phi(\sqrt{\gamma}x) = \int\limits_{\sqrt{\gamma}\,x}^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\gamma}\int\limits_x^\infty e^{-\gamma t^2}dt$$

по параметру γ в точке $\gamma = 1$. С одной стороны,

$$\frac{\partial\Phi(\sqrt{\gamma}x)}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=1} = \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty e^{-t^2}dt - \int\limits_x^\infty t^2e^{-t^2}dt.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial\Phi(\sqrt{\gamma}x)}{\partial\gamma}\bigg|_{\gamma=1} = \frac{x}{2}\,\Phi'(x).$$

Отсюда

$$\int\limits_x^\infty t^2e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\bigl[\Phi(x) - x\Phi'(x)\bigr]. \tag{A.3}$$

Искомая асимптотика следует из того, что $\Phi(x) = O\bigl(\frac{e^{-x^2}}{x}\bigr)$, а $\Phi'(x) = -e^{-x^2}$. $\square$

Приложение B. НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИКИ, СВЯЗАННЫЕ С ТЕТА-ФУНКЦИЕЙ

Примем следующее (удобное нам) определение тета-функции

$$\theta(x,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\tau k^2 + 2\pi i k x}, \tag{B.1}$$

где x, τ — комплексные числа, причем $\operatorname{Re}\tau > 0$.

Модулярное свойство (тождество Якоби) для тета-функции [18, 19]:

$$\theta\left(\frac{x}{i\tau},\frac{1}{\tau}\right)=\sqrt{\tau}e^{\frac{\pi x^2}{\tau}}\theta(x,\tau). \tag{B.2}$$

Используя это тождество, можно доказать ряд полезных оценок.

Лемма B.1. *При произвольном вещественном* x, $|a|<\frac{1}{2}$ *и* $\tau\to 0$ *справедливы следующие асимптотики*:

$$\theta(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,e^{-\frac{\pi d(x)^2}{\tau}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,e^{-\frac{\pi(1-d(x))^2}{\tau}}\right), \tag{B.3}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k^2e^{-\pi\tau k^2}=\frac{1}{2\pi\tau^{3/2}}+O\left(\frac{1}{2\pi\tau^{3/2}}\,e^{-\frac{\pi}{\tau}}\right), \tag{B.4}$$

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a}x\,|\theta(x,\tau)|^2\,dx=O\left(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-|a|)^2}\right), \tag{B.5}$$

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a}x^2|\theta(x,\tau)|^2\,dx=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\tau}{2}}+O\left(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-|a|)^2}\right). \tag{B.6}$$

Здесь $0\le d(x)\le\frac{1}{2}$ *— расстояние на вещественной прямой от точки* x *до ближайшего целого числа.*

Доказательство. Пользуясь модулярным свойством (B.2), получаем

$$\theta(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,e^{-\frac{\pi x^2}{\tau}}\theta\left(\frac{x}{i\tau},\frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi(k-x)^2}{\tau}}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,e^{-\frac{\pi d(x)^2}{\tau}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}e^{-\frac{\pi(1-d(x))^2}{\tau}}\right).$$

Оценка (B.3) доказана.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k^2e^{-\pi\tau k^2}=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial\tau}=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{\sqrt{\tau}}\,\theta\left(0,\frac{1}{\tau}\right)\right]=$$
$$=\frac{1}{2\pi\tau^{3/2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi k^2}{\tau}}-\frac{1}{\tau^{5/2}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}k^2e^{-\frac{\pi k^2}{\tau}}=\frac{1}{2\pi\tau^{3/2}}+O\left(\frac{1}{2\pi\tau^{3/2}}\,e^{-\frac{\pi}{\tau}}\right).$$

Оценка (B.4) доказана.

Для доказательства оценки (B.5) воспользуемся асимптотикой гауссова интеграла (A.1) и только что доказанной формулой (B.3). Тогда имеем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a}x|\theta(x,\tau)|^2\,dx=O\left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a}xe^{-\frac{2\pi d(x)^2}{\tau}}dx\right).$$

Пусть $a\ge 0$. Тогда $d(x)=|x|$ при $|x|\le\frac{1}{2}$ и $d(x)=x+1$ при $x\le-\frac{1}{2}$. Поэтому вследствие (A.1)

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a}xe^{-\frac{2\pi d(x)^2}{\tau}}dx=\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{-\frac{1}{2}}xe^{-\frac{2\pi(x+1)^2}{\tau}}dx+\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-a}xe^{-\frac{2\pi x^2}{\tau}}dx=O\big(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-a)^2}\big).$$

Аналогично если $a \le 0$, то

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} xe^{-\frac{2\pi d(x)^2}{\tau}}dx = O\big(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}+a)^2}\big).$$

Итак, для произвольного a получаем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x|\theta(x,\tau)|^2\,dx = O\big(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-|a|)^2}\big).$$

Для доказательства (B.6) воспользуемся асимптотиками (A.2) и (B.3). Имеем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2|\theta(x,\tau)|^2\,dx = \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi d(x)^2}{\tau}}dx + \frac{1}{\tau}\,O\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{\pi}{\tau}(d(x)^2+(1-d(x))^2)}\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi d(x)^2}{\tau}}dx + \frac{1}{\tau}\,O\left(\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi}{\tau}(d(x)-\frac{1}{2})^2}dx\,e^{-\frac{\pi}{2\tau}}\right).$$

Пусть $a > 0$. Тогда вследствие (A.1) и (A.2)

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi d(x)^2}{\tau}}dx = \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{-\frac{1}{2}} x^2 e^{-\frac{2\pi(x+1)^2}{\tau}}dx + \frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi x^2}{\tau}}dx = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\tau}{2}} + O\Big(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-a)^2}\Big),$$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi}{\tau}(d(x)-\frac{1}{2})^2}dx\,e^{-\frac{\pi}{2\tau}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2\tau}}}{\tau}\left[\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{-\frac{1}{2}} x^2 e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}+x)^2}dx + \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-a} x^2 e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-x)^2}dx\right] = O\Big(e^{-\frac{\pi}{2\tau}}\Big),$$

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2|\theta(x,\tau)|^2\,dx = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\tau}{2}} + O\Big(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-a)^2}\Big).$$

Аналогично для случая произвольного a имеем

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-a}^{\frac{1}{2}-a} x^2|\theta(x,\tau)|^2\,dx = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{\tau}{2}} + O\Big(e^{-\frac{2\pi}{\tau}(\frac{1}{2}-|a|)^2}\Big).$$

Формула (B.6) доказана, а вместе с ней и вся лемма. □

Приложение C. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3

1. По формулам (12) и (43) имеем

$$\overline{p}_\alpha = \hbar\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k\big|a_k^{(\alpha)}\big|^2 = \frac{\pi}{l}\hbar\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(\overline{k}+k)\big|a_{\overline{k}+k}^{(\alpha)}\big|^2 = \frac{\pi}{l}\hbar\overline{k}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\big|a_k^{(\alpha)}\big|^2 = \frac{\pi}{l}\hbar\overline{k}.$$

Утверждение 1) леммы доказано.

2. Докажем утверждение 2а). Теперь без ограничения общности считаем, что $\overline{k}=0$, поскольку общий случай сводится к данному заменой переменных. Тогда

$$\Delta_* p_\alpha^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k^2 \big|a_k^{(\alpha)}\big|^2 = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\Big(\frac{\pi}{l}\hbar k\Big)^2 \varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq,$$

$$\widetilde{\Delta} p_\alpha^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\frac{\pi}{l}\hbar q\Big)^2 \varphi_{\alpha l}(q)\,dq = \frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\Big(\frac{\pi}{l}\hbar q\Big)^2 \varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq.$$

Докажем неравенство

$$\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\big(k^2-q^2\big)\,\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq \ge \varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\big(k^2-q^2\big)\,dq \tag{C.1}$$

при произвольном целом k. Пусть для определенности $k>0$ (случай $k<0$ рассматривается аналогично, а для $k=0$ неравенство очевидно, так как это точка максимума функции φ_l). Тогда функция $\varphi_l\big(\frac{q}{\alpha}\big)$ убывает на рассматриваемом отрезке $q\in\big[k-\frac12,k+\frac12\big]$. На отрезке $q\in\big[k-\frac12,k\big]$ имеет место $k^2-q^2\ge 0$ и $\varphi_l\big(\frac{\pi}{l}\frac{q}{\alpha}\big)\ge\varphi_l\big(\frac{\pi}{l}\frac{k}{\alpha}\big)$, поэтому

$$\int\limits_{k-\frac12}^{k}\big(k^2-q^2\big)\,\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq \ge \varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\int\limits_{k-\frac12}^{k}\big(k^2-q^2\big)\,dq.$$

На отрезке $\big[k,k+\frac12\big]$, наоборот, $k^2-q^2\le 0$ и $\varphi_l\big(\frac{q}{\alpha}\big)\le\varphi_l\big(\frac{k}{\alpha}\big)$, поэтому снова

$$\int\limits_{k}^{k+\frac12}\big(k^2-q^2\big)\,\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq \ge \varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\int\limits_{k}^{k+\frac12}\big(k^2-q^2\big)\,dq,$$

что и доказывает требуемое неравенство.

Итак, имеем

$$\Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{\alpha}\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\big(k^2-q^2\big)\,\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq \ge$$

$$\ge \frac{\hbar^2}{\alpha}\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\big(k^2-q^2\big)\,dq = -\frac{\hbar^2}{\alpha}\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\frac{1}{12}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\to$$

$$\to -\Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2\frac{1}{12}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_l(k)\,dk = -\frac{1}{12}\Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2, \qquad \alpha\to\infty.$$

Обоснуем предельный переход и оценим скорость стремления суммы ряда к интегралу. По теореме о среднем

$$\min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big) \le \int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq \le \max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big),$$

поэтому

$$\left|\varphi_l\left(\frac{k}{\alpha}\right) - \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) dq\right| \le \max_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) - \min_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right).$$

Так как

$$\max_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) = \varphi_l\left(\frac{k-\frac{1}{2}\operatorname{sgn} k}{\alpha}\right), \qquad k\ne 0,$$

$$\min_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) = \varphi_l\left(\frac{k+\frac{1}{2}\operatorname{sgn} k}{\alpha}\right), \qquad k\ne 0,$$

$$\max_{q\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) = \varphi_l(0), \qquad \min_{q\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) = \varphi_l\left(\frac{1}{2\alpha}\right),$$

то

$$\sum_{k>0}\left[\max_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) - \min_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right)\right] =$$
$$= \left[\varphi_l\left(\frac{1}{2\alpha}\right) - \varphi_l\left(\frac{3}{2\alpha}\right)\right] + \left[\varphi_l\left(\frac{3}{2\alpha}\right) - \varphi_l\left(\frac{5}{2\alpha}\right)\right] + \ldots = \varphi_l\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

Аналогично

$$\sum_{k<0}\left[\max_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) - \min_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right)\right] = \varphi_l\left(-\frac{1}{2\alpha}\right) = \varphi_l\left(\frac{1}{2\alpha}\right).$$

Имеем

$$\left|\frac{\pi}{l}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\left(\frac{k}{\alpha}\right) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_l(q)\,dq\right| \le \frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\varphi_l\left(\frac{k}{\alpha}\right) - \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{q+\frac{1}{2}}\varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) dq\right| =$$
$$= \frac{1}{\alpha}\left[\varphi_l(0) + \varphi_l\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\right] \le \frac{2}{\alpha}\varphi_l(0). \qquad \text{(C.2)}$$

Таким образом,

$$\Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 \ge -\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{l}\hbar\right)^2\left[1 + \frac{2}{\alpha}\varphi_l(0)\right].$$

Получена оценка снизу. Найдем оценку сверху. Проводя рассуждения аналогично имевшим место при выводе неравенства (C.1), получаем

$$\Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 = \frac{\hbar^2}{\alpha}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\left(k^2-q^2\right)\varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right) dq \le$$
$$\le \frac{\hbar^2}{\alpha}\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k\ne 0}\operatorname{sgn} k\left\{\max_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]}\varphi_l\left(\frac{q}{\alpha}\right)\int\limits_{k-\frac{1}{2}\operatorname{sgn} k}^{k}\left(k^2-q^2\right) dq + \right.$$

$$+\min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\int\limits_k^{k+\frac12\operatorname{sgn}k}\big(k^2-q^2\big)\,dq\Bigg\}-\frac{\hbar^2}{12\alpha}\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\varphi_l\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big)=$$

$$=\frac{\hbar^2}{\alpha}\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\sum_{k\neq0}\Bigg\{\frac14|k|\Bigg[\max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)-\min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\Bigg]-$$

$$-\frac{1}{24}\Bigg[\min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)+\max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\Bigg]\Bigg\}-\frac{\hbar^2}{12\alpha}\Big(\frac{\pi}{l}\Big)^2\varphi_l\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big).$$

Поскольку

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{k\neq0}|k|\Bigg[\max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)-\min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\Bigg]=$$

$$=\Bigg[\varphi_l\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big)-\varphi_l\Big(\frac{3}{2\alpha}\Big)\Bigg]+2\Bigg[\varphi_l\Big(\frac{3}{2\alpha}\Big)-\varphi_l\Big(\frac{5}{2\alpha}\Big)\Bigg]+\ldots=$$

$$=\varphi_l\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big)+\varphi_l\Big(\frac{3}{2\alpha}\Big)+\ldots=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\Big(\frac{k+\frac12}{\alpha}\Big),\tag{C.3}$$

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{k\neq0}\frac12\Bigg[\min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)+\max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\Bigg]+\frac{1}{\alpha}\varphi_l\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big)=\frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\Big(\frac{k+\frac12}{\alpha}\Big),$$

$$\left|\frac{1}{\alpha}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\varphi_l\Big(\frac{k+\frac12}{\alpha}\Big)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_l(q)\,dq\right|\le\frac{2}{\alpha}\varphi_l(0),\tag{C.4}$$

то

$$\Delta p_\alpha^2-\widetilde{\Delta}p_\alpha^2\le\frac16\Big(\frac{\pi}{l}\hbar\Big)^2\Big[1+\frac{2}{\alpha}\varphi_l(0)\Big].$$

При возврате от случая $\overline{k}=0$ к случаю произвольного $\overline{k}$ необходимо $\varphi_l(0)$ заменить на $\varphi_l(\overline{k})$. Утверждение 2а) леммы доказано.

3. В рассматриваемых в утверждении 2б) условиях для функции $\varphi_{\alpha l}(k)$ справедлива формула Тейлора

$$\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)=\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)+\frac{1}{\alpha}\varphi_l'\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)(q-k)+\frac{1}{2\alpha^2}\varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k(q)}{\alpha}\Big)(q-k)^2,$$

где $\kappa_k(q)\in[q,k]$, если $q\le k$, или $\kappa_k(q)\in[k,q]$, если $q\ge k$;

$$\Delta\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\equiv\varphi_l\Big(\frac{k+\frac12}{\alpha}\Big)-\varphi_l\Big(\frac{k-\frac12}{\alpha}\Big)=\frac{1}{\alpha}\varphi_l'\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)+\frac{1}{8\alpha^2}\Big[\varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k^2}{\alpha}\Big)-\varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k^1}{\alpha}\Big)\Big],$$

где $\kappa_k^1\in\big[k-\frac12,k\big]$, $\kappa_k^2\in\big[k,k+\frac12\big]$.

Улучшим вначале оценку модуля разности

$$\left|\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)-\int\limits_{k-\frac12}^{k+\frac12}\varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\,dq\right|\le\frac{1}{8\alpha^2}\max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\Big|\varphi_l''\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\Big|.$$

В силу того что $\varphi_l''(k) = O(k^{-2})$ при $k \to \infty$,

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \max_{q\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \left|\varphi_l''\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\right| \to C. \tag{C.5}$$

Отсюда улучшается и оценка (C.2):

$$\left|\frac{1}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(q)\, dq\right| \le \frac{1}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) - \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\, dq\right| = O\Big(\frac{1}{\alpha^2}\Big). \tag{C.6}$$

Для разности $\Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2$ имеем

$$\begin{aligned}
\Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 &= \hbar^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (k^2 - q^2) \frac{1}{\alpha}\, \varphi_l\Big(\frac{q}{\alpha}\Big)\, dq = \\
&= \hbar^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (k^2 - q^2) \bigg\{ \frac{1}{\alpha}\, \varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) + \frac{1}{\alpha}\, \Delta\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) (q-k) + \\
&\quad + \frac{1}{8\alpha^3} \left[\varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k^1}{\alpha}\Big) - \varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k^2}{\alpha}\Big)\right] (q-k) + \frac{1}{2\alpha^3}\, \varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k(q)}{\alpha}\Big) (q-k)^2 \bigg\}\, dq \le \\
&\le \hbar^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{1}{12\alpha}\, \varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big) - \frac{1}{6\alpha}\, k\Delta\varphi_l\Big(\frac{k}{\alpha}\Big)\right] + A_1 - A_2 - A_3 \right\},
\end{aligned} \tag{C.7}$$

где

$$A_1 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{192\alpha^3}\, |k| \left[\max_{\kappa\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l''\Big(\frac{\kappa}{\alpha}\Big) - \min_{\kappa\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l''\Big(\frac{\kappa}{\alpha}\Big)\right],$$

$$A_2 = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{320\alpha^3} \left[\max_{\kappa\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l''\Big(\frac{\kappa}{\alpha}\Big) + \min_{\kappa\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l''\Big(\frac{\kappa}{\alpha}\Big)\right],$$

$$A_3 = \hbar^2 \frac{1}{80\alpha^3}\, \varphi_l''\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (k^2 - q^2) \varphi_l''\Big(\frac{\kappa_k(q)}{\alpha}\Big) (q-k)^2\, dq \le \\
&\qquad \le \sum_{k\neq 0} \operatorname{sgn} k \left[\max_{\kappa\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l''\Big(\frac{\kappa}{\alpha}\Big) \int\limits_{k-\frac{1}{2}\operatorname{sgn} k}^{k} (k^2 - q^2)(q-k)^2\, dq + \right. \\
&\qquad\quad \left. + \min_{\kappa\in[k-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}]} \varphi_l''\Big(\frac{\kappa}{\alpha}\Big) \int\limits_{k}^{k+\frac{1}{2}\operatorname{sgn} k} (k^2 - q^2)(q-k)^2\, dq \right] - \frac{1}{80}\, \varphi_l\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k\neq 0}\left\{\frac{1}{32}\,|k|\left[\max_{\kappa\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l''\Bigl(\frac{\kappa}{\alpha}\Bigr) - \min_{\kappa\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l''\Bigl(\frac{\kappa}{\alpha}\Bigr)\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{160}\left[\max_{\kappa\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l''\Bigl(\frac{\kappa}{\alpha}\Bigr) + \min_{\kappa\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l''\Bigl(\frac{\kappa}{\alpha}\Bigr)\right]\right\} - \frac{1}{80}\,\varphi_l''\Bigl(\frac{1}{2\alpha}\Bigr).$$

Аналогично

$$\Delta_* p_\alpha^2 - \widetilde{\Delta} p_\alpha^2 \geq \hbar^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{1}{12\alpha}\,\varphi_l\Bigl(\frac{k}{\alpha}\Bigr) - \frac{1}{6\alpha}\,k\Delta\varphi_l\Bigl(\frac{k}{\alpha}\Bigr)\right] - A_1 + A_2 + A_3\right\}. \tag{C.8}$$

Принимая во внимание (C.6) и (C.3), получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{1}{12\alpha}\,\varphi_l\Bigl(\frac{k}{\alpha}\Bigr) - \frac{1}{6\alpha}\,k\Delta\varphi_l\Bigl(\frac{k}{\alpha}\Bigr)\right] = \Bigl(-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\Bigr)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_l(k)\,dk + O\Bigl(\frac{1}{\alpha^2}\Bigr) =$$

$$= \frac{1}{12} + O\Bigl(\frac{1}{\alpha^2}\Bigr). \tag{C.9}$$

Изменение знака во втором слагаемом связано с тем, что в силу свойств монотонности

$$\Delta\varphi_l\Bigl(\frac{k}{\alpha}\Bigr) = -\operatorname{sgn} k\left[\max_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Bigl(\frac{q}{\alpha}\Bigr) - \min_{q\in[k-\frac12,k+\frac12]}\varphi_l\Bigl(\frac{q}{\alpha}\Bigr)\right]$$

(в частности, $\Delta\varphi_l\bigl(\frac{k}{\alpha}\bigr)$ и k имеют противоположные знаки).

Проведя выкладки, аналогичные (C.3) и (C.4), нетрудно показать, что $A_1 = O(1/\alpha^2)$ (в данном случае выкладки более громоздки, так как φ_l'' может иметь более одного экстремума; однако можно разбить всю прямую на участки между экстремумами и рассмотреть по отдельности эти участки и точки экстремума, которых по условию конечное число). Согласно (C.5) $A_2 = O(1/\alpha^2)$. Очевидно, $A_3 = O(1/\alpha^3)$. Тогда, принимая во внимание (C.7)–(C.9), получаем

$$\Delta_\alpha p = \widetilde{\Delta}_\alpha p + \Bigl(\frac{\pi}{l}\hbar\Bigr)^2\left[\frac{1}{12} + O\Bigl(\frac{1}{\alpha^2}\Bigr)\right].$$

Лемма доказана.

Приложение D. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4

Из условий леммы вытекает, что имеются две возможности: 1) все $a_k \geq 0$, $a_0 = \max a_k > 0$; 2) все $a_k \leq 0$, $a_0 = \min a_k < 0$. В любом случае $|a_0| = \max|a_k|$. Поскольку один случай переводится в другой заменой знаков всех a_k, что не отражается на обеих частях неравенства (42), то без ограничения общности считаем, что имеет место первый вариант: все $a_k \geq 0$.

Зафиксируем натуральное K и выделим из последовательности первые K элементов $a_0 \geq a_1 \geq \ldots \geq a_K$, $a_0 > 0$. Построим по шагам новую подпоследовательность из $K+1$ элементов. Нулевой шаг:

$$a_0^{(0)} \equiv a_0, \quad a_1^{(0)} \equiv a_1, \quad a_2^{(0)} \equiv a_2, \quad \ldots, \quad a_K^{(0)} \equiv a_K, \quad a_{K+1}^{(0)} \equiv 0.$$

На каждом шаге будем сохранять монотонность последовательности. Для любого шага $m \geq 0$ определим два числа $K_1^{(m)} \geq 1$ и $K_2^{(m)} \geq K_1^{(m)} \geq 1$ следующим образом:

$$a_0^{(m)} = a_1^{(m)} = \ldots = a^{(m)}_{K_1^{(m)}-1} \neq a^{(m)}_{K_1^{(m)}}, \qquad a^{(m)}_{K_1^{(m)}} = a^{(m)}_{K_1^{(m)}+1} = \ldots = a^{(m)}_{K_2^{(m)}} \neq a^{(m)}_{K_2^{(m)}+1}.$$

Частичная сумма ряда на шаге m:

$$S_K^{(m)} = a_0^{(m)} \sum_{k=0}^{K_1^{(m)}-1} \cos kx + a_{K_1^{(m)}}^{(m)} D_K^{(m)} + \sum_{k=K_2^{(m)}+1}^{K+1} a_k^{(m)} \cos kx, \tag{D.1}$$

где

$$D_K^{(m)} = \sum_{k=K_1^{(m)}}^{K_2^{(m)}} a_k^{(m)} \cos kx = a_{K_1^{(m)}}^{(m)} \sum_{k=K_1^{(m)}}^{K_2^{(m)}} \cos kx.$$

Теперь опишем непосредственно итерационное правило построения последовательности $a_0^{(m+1)}, a_1^{(m+1)}, \ldots, a_{K+1}^{(m+1)}$ исходя из $a_0^{(m)}, a_1^{(m)}, \ldots, a_{K+1}^{(m)}$, $m \geq 0$.

Если $D_K^{(m)} \geq 0$, то члены последовательности с индексами от $K_1^{(m)}$ до $K_2^{(m)}$ включительно принимают значение $a_0^{(m)}$ (т.е. увеличиваются до предыдущего члена последовательности), остальные члены не меняются:

$$a_k^{(m+1)} = \begin{cases} a_0^{(m)} & \text{при } K_1^{(m)} \leq k \leq K_2^{(m)}, \\ a_k^{(m)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае $K_1^{(m+1)} = K_2^{(m)} + 1$, $K_2^{(m+1)} \geq K_2^{(m)} + 1$.

Если $D_K^{(m)} \leq 0$, то члены последовательности с индексами от $K_1^{(m)}$ до $K_2^{(m)}$ включительно принимают значение $a_{K_2^{(m)}+1}^{(m)}$ (т.е. уменьшаются до значения следующего члена последовательности), остальные члены не меняются:

$$a_k^{(m+1)} = \begin{cases} a_{K_2^{(m)}+1}^{(m)} & \text{при } K_1^{(m)} \leq k \leq K_2^{(m)}, \\ a_k^{(m)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В этом случае $K_1^{(m+1)} = K_1^{(m)}$, $K_2^{(m+1)} \geq K_2^{(m)} + 1$.

Можно заметить, что в любом случае сохраняется монотонность последовательности. И $a_0^{(m)} \equiv a_0$ не меняет своего значения, так как $K^{(m)} \geq 1$. Поэтому $a_0^{(m)} = a_0 = \max a_k^{(m)}$, $a_k^{(m)} \geq a_{K_2^{(m)}+1}^{(m)}$ при $k \leq K_2^{(m)}$. Следовательно, если $D_K^{(m)} \geq 0$, то $a_{K_1^{(m)}}^{(m+1)} \geq a_{K_1^{(m)}}^{(m)}$, а если $D_K^{(m)} \leq 0$, то $a_{K_1^{(m)}}^{(m+1)} \leq a_{K_1^{(m)}}^{(m)}$. Поэтому в любом случае слагаемое $a_{K_1^{(m)}}^{(m)} D_K^{(m)}$ в сумме (D.1) не уменьшается, а остальные два не изменяются. Таким образом, вся частичная сумма не уменьшается: $S_K^{(m+1)} \geq S_K^{(m)}$.

Через некоторое число $M \leq K$ шагов получим $K_2^{(M)} = K + 1$, $1 \leq K_1^{(M)} \leq K_2^{(M)}$,

$$a_k^{(M)} = \begin{cases} a_0, & 0 \leq k \leq K_1^{(M)} - 1, \\ 0, & k \geq K_1^{(M)} \end{cases} \tag{D.2}$$

(последняя строчка верна, так как $a_{K+1}^{(M)} = a_{K+1}^{(0)} = 0$). Таким образом,

$$S_K \equiv S_K^{(0)} \leq a_0 \sum_{k=0}^{K_1^{(M)}-1} \cos kx.$$

Пользуясь известной формулой

$$\sum_{n=0}^{K-1} \cos kx = \frac{\sin \frac{Kx}{2} \cdot \cos \frac{(K-1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \tag{D.3}$$

получаем

$$S_K \le a_0 \frac{\sin \frac{K_1^{(M)}x}{2} \cdot \cos \frac{(K_1^{(M)}-1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Аналогичным образом можно получить и оценку для частичной суммы снизу. Для этого итерационный процесс надо вести не слева направо, а справа налево. $K_1^{(m)}$ — это номер, после которого все члены последовательности равны a_{K+1} (т.е. нулю), $K_2^{(m)} \le K_1^{(m)}$ — это номер, начиная с которого члены последовательности имеют одинаковые значения вплоть до $K_1^{(m)}$-го. $D_K^{(m)}$ определяется так же с точностью до перестановки пределов суммирования. Если $D_K^{(m)} \ge 0$, то значения членов с номерами от $K_2^{(m)}$ до $K_1^{(m)}$ понижаются до $a_{K_1^{(m)}+1} = 0$, если $D_K^{(m)} \le 0$, то повышаются до $a_{K_2^{(m)}-1}$. Тогда значение частичной суммы не увеличивается. После конечного числа итераций снова получаем формулу (D.2) с заменой $K_1^{(m)}$ на $K_2^{(m)}$ и оценку

$$S_K \ge a_0 \frac{\sin \frac{K_2^{(M)}x}{2} \cdot \cos \frac{(K_2^{(M)}-1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Соединяя полученные верхнюю и нижнюю оценки, имеем

$$|S_K| \le \frac{|a_0|}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

Заметим, что оценка частичной суммы не зависит от K. Отсюда и следует оценка (42) на сумму всего ряда.

Благодарности. Авторы выражают признательность Е.И. Зеленову, С.В. Козыреву, А.Г. Сергееву, О.Г. Смолянову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schrödinger E.* Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik // Naturwissenschaften. 1926. Bd. 14. S. 664–666.
2. *Фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.
3. *Шляйх В.П.* Квантовая оптика в фазовом пространстве. М.: Физматлит, 2005. 760 с.
4. Coherent states: Applications in physics and mathematical physics / Ed. by J.R. Klauder, B.-S. Skagerstam. Singapore: World Sci., 1985. 911 p.
5. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987. 270 с.
6. *Weil A.* Sur certains groupes d'opérateurs unitaires // Acta math. 1964. V. 111. P. 143–211.
7. *Judge D.* On the uncertainty relation for angle variables // Nuovo Cim. 1964. V. 31, N 2. P. 332–340.
8. *De Bièvre S., González J.A.* Semiclassical behaviour of coherent states on the circle // Quantization and coherent states methods. Singapore: World Sci., 1993. P. 152–157.
9. *Kowalski K., Rembieliński J.* On the uncertainty relations and squeezed states for the quantum mechanics on a circle // J. Phys. A: Math. and Gen. 2002. V. 35. P. 1405–1414.
10. *González J.A., del Olmo M.A., Tosiek J.* Quantum mechanics on the cylinder: E-print, 2003. arXiv: quant-ph/0306010.
11. *Kowalski K., Rembieliński J.* Coherent states for the quantum mechanics on a compact manifold // J. Phys. A: Math. and Theor. 2008. V. 41, N 30. Pap. 304021.

12. *Drexler K.E.* Nanosystems: Molecular machinery, manufacturing, and computation. New York: J. Wiley & Sons, 1992. 576 p.
13. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978. 393 с.
14. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
15. *Garbaczewski P., Karwowski W.* Impenetrable barriers and canonical quantization // Amer. J. Phys. 2004. V. 72, N 7. P. 924–933.
16. *Novikov S.P.* 1. Classical and modern topology. 2. Topological phenomena in real world physics: E-print, 2000. arXiv: math-ph/0004012.
17. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. М.: Наука, 1973. 704 с.
18. *Воронин С.М., Карацуба А.А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.
19. *Мамфорд Д.* Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988. 448 с.