Определение. Пусть $(X, \mathcal{A}, \mu)$ — измеримое пространство, $(Y, \mathcal{B})$ — пространство с σ-алгеброй, $F\colon X \to Y$ — измеримое отображение. Тогда образом меры μ при отображении F называется мера $F_*\mu$ такая, что

$$F_*\mu(B) = \mu(F^{-1}B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}.$$

Определение. Пусть X — линейное топологическое пространство, μ — борелевская мера на X. Тогда производной меры μ по вектору $h \in X$ называется мера $\mu'_h = D_h(\mu)$, принимающая на каждом борелевском множестве A значение

$$\mu'_h(A) = (D_h\mu)(A) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mu(A + th) - \mu(A))$$

Постановка задачи. Пусть X, Y — линейные топологические пространства, $F\colon X \to Y$ - непрерывное линейное отображение (в частности, на лекции рассматривалось $X = W_2^1[0,T]$, $Y = C[0,T]$, $F\colon W_2^1[0,T] \hookrightarrow Y = C[0,T]$ — естественное вложение $f(t) \mapsto f(t)$).

Пусть h — вектор из X. Обозначим за $\mathfrak{M}(X)$, $\mathfrak{M}(Y)$ пространства борелевских мер на X и Y, а за $\mathfrak{M}_h(X) \subset \mathfrak{M}(X)$ и $\mathfrak{M}_{Fh}(Y) \subset \mathfrak{M}(Y)$ - подпространства борелевских мер, дифференцируемых по $h \in X$ и $Fh \in Y$ соответственно. Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_h(X) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "D_h"] & \mathfrak{M}_{Fh}(Y) \arrow[d, "D_{Fh}"] \\
\mathfrak{M}(X) \arrow[r, "F_*"] & \mathfrak{M}(Y)
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Так как F непрерывно, то оно измеримо относительно борелевских σ-алгебр X и Y, и значит отображение $F_*\colon \mathfrak{M}(X) \to \mathfrak{M}(Y)$ определено. Коммутативность диаграммы равносильна выполнению равенства $(D_{Fh}F_*\mu)(B) = (F_*D_h\mu)(B)$ для любой меры $\mu \in \mathfrak{M}(X)$ и для любого борелевского $B \subset Y$:

$$\begin{aligned}
(D_{Fh}(F_*\mu))(B) &= \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((F_*\mu)(B + t\cdot Fh) - (F_*\mu)(B)) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mu(F^{-1}(B + t\cdot Fh)) - \mu(F^{-1}B)) = \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\mu(F^{-1}B + th) - \mu(F^{-1}B)) = \\
&= (D_h\mu)(F^{-1}B) = \\
&= F_*D_h\mu(B)
\end{aligned}$$

Здесь линейность использовалась в равенстве $F^{-1}(B+t\cdot Fh) = F^{-1}B+ t \cdot F^{-1}Fh = F^{-1}B + h$.