ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2010, том 431, № 2, с. 170–174

МАТЕМАТИКА

УДК 517.1

ГАМИЛЬТОНОВЫ ИНТЕГРАЛЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ВЛАДИМИРОВА

© 2010 г. О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров

Представлено академиком В.С. Владимировым 17.09.2009 г.

Поступило 07.10.2009 г.

В своей нобелевской лекции Р. Фейнман [1] отметил, что он открыл свой интеграл, развивая [2] идею Дирака [3], предположившего, что интегральное ядро эволюционного оператора, преобразующего волновую функцию за малый промежуток времени, аналогично комплексной экспоненте от классического действия. При этом Фейнман усилил гипотезу Дирака, предположив, что эти интегральные ядра должны быть просто пропорциональны таким экспонентам; именно это предположение и позволило ему найти представление решения уравнения Шрёденгера с помощью интеграла Фейнмана по бесконечномерному аффинному многообразию, состоящему из функций времени, принимающих значения в конфигурационном пространстве исходной классической лагранжевой системы. Фейнман определил свой интеграл как предел последовательности эффективно вычислимых обычных интегралов по конечным произведениям конфигурационного пространства. Полученное представление решения называется теперь формулой Фейнмана в конфигурационном пространстве, а сам интеграл – интегралом Фейнмана (по траекториям в конфигурационном пространстве). Поскольку в этом интеграле присутствует функционал действия в лагранжевой форме, его можно назвать лагранжевым интегралом Фейнмана.

Фейнман [4] получил также представление решения уравнения Шрёдингера с помощью интеграла по множеству функций, принимающих значения в фазовом пространстве квантуемой системы. Поскольку в нем используется гамильтонова форма действия, его естественно называть гамильтоновым интегралом Фейнмана. Подобно лагранжеву, гамильтонов интеграл был определен Фейнманом как предел последовательности эффективно вычислимых интегралов по декартовым произведениям конечного числа экземпляров, но на этот раз не конфигурационного, а фазового пространства.

Хотя рассуждения Фейнмана носили эвристический характер, оказалось возможным придать им точный математический смысл. Наиболее близким к первоначальной идее Фейнмана является метод, основанный на теореме Чернова; именно он применяется в этом сообщении.

Как лагранжев, так и гамильтонов интегралы оказываются применимы для представления решений широкого класса эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами (ПДО) в правой части. При этом роль функции Гамильтона играет символ ПДО, а роль функции Лагранжа – его преобразование Лежандра. Оказалось, что подобные представления можно получить и для эволюционных уравнений относительно функций вещественного аргумента, принимающих значения в пространстве комплексных функций, определенных на пространстве над полем p-адических чисел.

В этом сообщении вводится версия гамильтонова интеграла Фейнмана, представляющего решения эволюционного уравнения типа теплопроводности с ПДО В.С. Владимирова в правой части, действующим в пространстве комплексных функций p-адического аргумента. Такие уравнения можно использовать, в частности, для математического моделирования спектральной диффузии ансамбля белковых молекул [5]. Кроме того, они могут оказаться полезными для изучения физических процессов на планковских масштабах [6].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Используемые без объяснений сведения из $\mathfrak{p}$-адического анализа и теории топологических векторных пространств можно найти в [6, 7]. Напомним, что поле $\mathfrak{p}$-адических чисел $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ – простое натуральное число) представляет собой пополнение поля рациональных чисел относительно нормирования, называемого также $\mathfrak{p}$-адическим и полностью определяемого равенствами: $|\mathfrak{q}|_\mathfrak{p} = 1$ при простом $\mathfrak{q}$, не равном $\mathfrak{p}$, и $|\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}$. Каждое $\mathfrak{p}$-радическое число a допускает однозначное представление в виде сходящегося в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ ряда

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \geq -\log_{\mathfrak{p}}|a|_{\mathfrak{p}}} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k} = [a]_{\mathfrak{p}} + \{a\}_{\mathfrak{p}},$$

где $a_k \in \{0, 1, ..., \mathfrak{p} - 1\}$ для всякого $k \in \mathbb{Z}$, причем для $a \neq 0$ $\log_{\mathfrak{p}}|a|_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ и $a_{\log_{\mathfrak{p}}|a|_{\mathfrak{p}}} \neq 0$ ($\log_{\mathfrak{p}} 0 = -\infty$, $a_{-\infty} = 0$),

$$[a]_{\mathfrak{p}} = \sum_{k \geq 0} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k},$$

и сумма $\{a\}_{\mathfrak{p}} = \sum_{-\log_{\mathfrak{p}}|a|_{\mathfrak{p}} \leq k < 0} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k}$ конечна (при этом $\{a\}_{\mathfrak{p}}$ является рациональным числом из вещественного полуинтервала [0; 1)).

Непрерывный гомоморфизм $\chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}$ аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ в мультипликативную группу $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$, задаваемый формулой $\chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(a) = e^{2i\pi\{a\}_{\mathfrak{p}}}$, является аддитивным унитарным характером группы $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, +)$, причем каждый непрерывный унитарный комплексный аддитивный характер группы $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, +)$ имеет вид $a \mapsto \chi_y(a) \equiv \chi_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}}(y \cdot a)$ для некоторого $y \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, и соответствие $y \mapsto \chi_y$ является изоморфизмом аддитивной топологической группы $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ и ее группы характеров. Стандартная мера Хаара на аддитивной группе $(\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}, +)$ обозначается символом ν_H; на каждом замкнутом шаре ее значение равно диаметру шара (совпадающему с его радиусом).

Пусть $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ – векторное пространство (над полем комплексных чисел) локально-постоянных комплексных функций на $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ с компактным носителем. Иначе говоря, $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ является линейной оболочкой индикаторов (характеристических функций) всевозможных шаров положительных радиусов. Предполагается, что оно наделено (неметризуемой) топологией строгого локально-выпуклого индуктивного предела конечномерных хаусдорфовых подпространств $\mathcal{S}_{\mathfrak{p},n} \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ ($n = 1, 2, ...$), являющихся линейными оболочками индикаторов шаров с центрами, лежащими в шаре радиуса $\mathfrak{p}^n$ с центром в нуле, и радиусами, не меньшими $\mathfrak{p}^{-n}$. Пространство $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ инвариантно относительно взаимно обратных преобразований Фурье $\mathcal{F}^{\pm}_{\mathcal{S}} f(x) = \int_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}} \chi_x(\pm y)\nu_H(dy) \equiv \int_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}} e^{\pm 2\pi i\{xy\}_{\mathfrak{p}}}\nu_H(dy)$ $(f \in \mathcal{S}_{\mathfrak{p}}, x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}})$, каждое из которых является непрерывным. Обобщенными функциями на $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ называются элементы сопряженного пространства $\mathcal{S}'_{\mathfrak{p}}$. Преобразования Фурье $\mathcal{F}^{\pm}_{\mathcal{S}}$ продолжаются на $\mathcal{S}'_{\mathfrak{p}}$ по непрерывности, и эти продолжения обозначаются через $\mathcal{F}^{\pm}_{\mathcal{S}'_{\mathfrak{p}}}$. Сужения операторов $\mathcal{F}^{\pm}_{\mathcal{S}'_{\mathfrak{p}}}$ на инвариантное относительно них гильбертово пространство $L_2(\nu_H) \subset \mathcal{S}'_{\mathfrak{p}}$ являются унитарными и обозначаются символами $\mathcal{F}^{\pm}_{L_2}$.

Пусть $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$ – множество всех счетно-аддитивных комплекснозначных борелевских мер на $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$. Сверточная экспонента $e^{*\nu}$ элемента $\nu \in \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$ определяется с помощью ряда $e^{*\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\nu^{*n}$, сходящегося по вариации; при этом сверточные степени ν^{*n} меры $\nu \in \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$ определяются рекурсивно: $\nu^{*0} = \delta_0$, $\nu^{*(n+1)} = (\nu^{*n}) * \nu$, где символом δ_x обозначается вероятностная мера, сосредоточенная в точке x.

2. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРОМ ВЛАДИМИРОВА

Если $f: \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \to \mathbb{C}$ – измеримая по Борелю функция, то линейный оператор в комплексном гильбертовом пространстве $L_2 \equiv L_2(\nu_H)$ с областью определения $D_f = \{\varphi \in L_2: f \cdot \varphi \in L_2\}$, на которой он действует по формуле $D_f \ni \varphi \mapsto f \cdot \varphi$, обозначается символом $(f\cdot)$; этот оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда значения функции f вещественны ν_H-почти всюду. Пусть для каждого $\alpha > 0$ функция f^{α} определяется так: $f^{\alpha}: \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \ni x \mapsto (|x|_{\mathfrak{p}})^{\alpha} \geq 0$. Оператор Владимирова D^{α} порядка α в L_2 определяется равенством $\mathcal{F}^{+}_{L_2} \circ (f^{\alpha}\cdot) \circ \mathcal{F}^{-}_{L_2}$; его область определения обозначается символом D_{α} (очевидно, $D_{\alpha} = F^{+}_{L_2}(D_{f^{\alpha}}) \supset S_{\mathfrak{p}}$).

Всюду далее ν – некоторая мера из $\mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$, $\tilde{\nu}(x) = \int_{\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}} \chi_x(y)\nu(dy)$. Для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_{\mathfrak{p}}$ оператор $(\mu*)$ в L_2 определяется равенством $(\mu*) = \mathcal{F}^{-}_{L_2} \circ (\tilde{\mu}\cdot) \circ \mathcal{F}^{+}_{L_2}$.

Под задачей Коши с начальным условием (н.у.) $\psi_0 \in L_2$ для уравнения теплопроводности с оператором Владимирова и потенциалом $V: \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}} \to \mathbb{C}$, $V = \tilde{\nu}$, далее будем понимать задачу отыскания непрерывной функции Ψ аргумента t, определенной на неотрицательной вещественной полуоси, принимающей значения в гильбертовом пространстве L_2 и удовлетворяющей условиям

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = (-D^{\alpha} + (V\cdot))\Psi(t), \quad t > 0, \qquad \Psi(0) = \psi_0, \tag{1}$$

где $\frac{d}{dt}\Psi(t)$ при каждом $t > 0$ вычисляется как предел в L_2-норме функции $(0; +\infty) \ni \tau \mapsto \tau^{-1}(\Psi(t + \tau) - \Psi(t)) \in D_\alpha$ при $\tau \to 0$. Эту задачу Коши далее называем задачей (1), Ψ – ее решением.

3. ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Однозначная разрешимость задачи (1) при произвольном начальном условии $\psi_0 \in L_2$ вытекает из теории однопараметрических операторных полугрупп [8]. Оператор $(-D^\alpha + (\tilde{\nu}\cdot))$, стоящий в правой части уравнения (1), является псевдодифференциальным с qp-символом $K(q, p) = \tilde{\nu}(q) - f^\alpha(p)$, т.е. справедливо равенство $(-D^\alpha + (\tilde{\nu}\cdot)) = \hat{K}$, где оператор $\hat{K}$ определен на функциях $\varphi \in D_\alpha$ равенством $(\hat{K}\varphi)(x) = (\mathcal{F}^+_{L_2} \circ (K(x, \cdot)\cdot) \circ \mathcal{F}^-_{L_2})\varphi(x) = (\mathcal{F}^+_{L_2}(K(x, \cdot) \cdot \mathcal{F}^-_{L_2}\varphi))(x)$, $x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$. Таким образом, для каждого вещественного $s \geq 0$ справедливо равенство $G_s = e^{s\cdot\hat{K}}$ для разрешающих операторов G_s: $\Psi(0) \mapsto \Psi(t)$.

Далее считаем, что гильбертово пространство L_2 реализовано классами эквивалентности борелевских квадратично-интегрируемых функций $\mathbb{Q}_\mathfrak{p} \to \mathbb{C}$, и при каждой $\varphi \in L_2$ символом $[\varphi]$ обозначаем один из представителей класса $\varphi \in L_2$. В работе [9] доказано, что для $s > 0$ образ оператора G_s состоит из классов, содержащих непрерывные представители.

Целью этого раздела является доказательство для каждого $t > 0$ равенства

$$[\Psi(t)](x) = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\widehat{e^{\frac{t}{n}\cdot K}}\right)^n \psi_0\right](x), \quad x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}, \qquad (2)$$

при непрерывном выборе представителей $[\cdot]$.

При этом оператор $\widehat{e^{s\cdot K}}$, как сейчас будет показано, может быть выражен через уже известные операторы (подчеркнем, что равенство $e^{s\cdot\hat{K}} = \widehat{e^{s\cdot K}}$ при ненулевой мере ν не выполняется). Следующая лемма – непосредственное следствие результатов работы [9].

Л е м м а 1. *Для каждого вещественного $s > 0$ справедливы равенства*

$$\widehat{e^{s\cdot K}} = (e^{s\cdot\tilde{\nu}}\cdot) \circ e^{s\cdot(-D^\alpha)} = (\widetilde{e^{*(s\cdot\nu)}}\cdot) \circ e^{s\cdot(-D^\alpha)}, \quad (3)$$

где ограниченный оператор $e^{s\cdot(-D^\alpha)}$ принадлежит сжимающей полугруппе с неположительным самосопряженным генератором $(-D^\alpha)$ и определяется для всякой $\varphi \in L_2$ и всякого $x \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ равенствами

$$(e^{s\cdot(-D^\alpha)}\varphi)(x) = (\mathcal{F}^+_{L_2}(e^{-s\cdot f^\alpha}\cdot\mathcal{F}^-_{L_2}\varphi))(x) = \int\varphi^{\alpha,s}(x-y)\varphi(y)\nu_H(dy),$$

в которых

$$\varphi^{\alpha,s}(s) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(e^{-s\mathfrak{p}^{k\alpha}} - e^{-s\mathfrak{p}^{(k+1)\alpha}})\cdot\mathfrak{p}^k\cdot\Omega(\mathfrak{p}^k x)$$

и Ω – индикаторная функция центрального замкнутого единичного шара относительно $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$. При этом функции $p_\alpha(t_1, t_2; x_1, x_2) := \varphi^{\alpha, t_2 - t_1}(x_2 - x_1)$, $t_2 > t_1 \geq 0$, $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, являются переходными плотностями марковского процесса ξ, однородного по времени и фазовому пространству $(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}, +)$ и обладающего интегрируемыми по Риману выборочными функциями

Процесс ξ будем использован в доказательстве теоремы 2.

Л е м м а 2. *Для каждого вещественного $s \geq 0$ и каждой $\varphi \in D_\alpha$ в L_2 справедливо равенство*

$$\lim_{s\to 0+0} s^{-1}(\widehat{e^{s\cdot K}}\varphi - \varphi) = \hat{K}\varphi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формуле (3)

$$s^{-1}(\widehat{e^{s\cdot K}}\varphi - \varphi) = s^{-1}(e^{s\cdot\tilde{\nu}}\cdot e^{s\cdot(-D^\alpha)}\varphi - \varphi) =$$
$$= s^{-1}(e^{s\cdot\tilde{\nu}}\cdot e^{s\cdot(-D^\alpha)}\varphi - e^{s\cdot\tilde{\nu}}\cdot\varphi + e^{s\cdot\tilde{\nu}}\cdot\varphi - \varphi) =$$
$$= e^{s\cdot\tilde{\nu}}\cdot s^{-1}(e^{s\cdot(-D^\alpha)}\varphi - \varphi) + s^{-1}(e^{s\cdot\tilde{\nu}}\varphi - \varphi) \to \hat{K}\varphi.$$

Поэтому условия следующей теоремы будут выполнены, если в ней положить $N = L_2$ и $F(s) = \widehat{e^{s\cdot K}}$, где K – определенная выше функция.

Т е о р е м а 1 (Чернов [10]). *Если для функции F, определенной на отрезке $[0; \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, вещественной прямой и принимающей значения в банаховом пространстве ограниченных операторов в банаховом пространстве N (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), выполнены условия: $F(0) = 1$; $\exists a > 0\ \forall t \in [0, \varepsilon]\ \|F(t)\| \leq e^{at}$; линейное подпространство $L = \{x \in N$: $\exists \lim_{s\to 0+0} s^{-1}(F(s)x - x) =: F'(0)x\}$ плотно и замыкание линейного оператора $F'(0)$ совпадает с генератором $G = S'(0)$ некоторой сильно непрерывной полугруппы $S(t) \equiv e^{tG}$, то для каждого вектора $x \in N$ справедлива следующая формула (формула Чернова):*

$$e^{tG}x = \lim_{n\to\infty}\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x.$$

С л е д с т в и е 1. *Для каждой $\psi_0 \in L_2$ и каждого $t > 0$ справедливы равенства элементов гильбертова пространства L_2:*

$$\Psi(t) = \lim_{n\to\infty}\left(\widehat{e^{\frac{t}{n}\cdot K}}\right)^n\psi_0 = \lim_{n\to\infty}\left(\left(e^{\frac{t}{n}\cdot\tilde{\nu}}\cdot\right)\circ e^{\frac{t}{n}\cdot(-D^\alpha)}\right)^n\psi_0$$

(*первое из них является следствием формулы Чернова, а второе, вытекающее из равенства* (3) *леммы* 1 — *более специальной формулы Троттера*).

Из следующей теоремы вытекает, что при подходящем выборе в равенстве (2) представителей классов оно оказывается справедливым для всех $x \in \mathbb{Q}_p$.

Теорема 2. *Для каждой* $\psi_0 \in L_2$ *и каждому* $t > 0$ *элемент* $\Psi(t) \in L_2$ *имеет непрерывный представитель* $[\Psi(t)]$, *равный в каждой точке* $x \in \mathbb{Q}_p$ *пределу из формулы* (2), *если под его знаком представители классов из* L_2 *выбираются также непрерывными*.

Доказательство. По следствию 1, в пространстве L_2 к элементу $\Psi(t)$ сходится при $n \to \infty$ последовательность

$$n \mapsto \psi_n = \left(\left(e^{\frac{t}{n}\cdot\tilde{\nu}}\cdot\right)\circ\left(\left(\varphi^{\alpha,\frac{t}{n}}\cdot\nu_H\right)*\right)\right)^n\psi_0$$

элементов L_2. Эти элементы в силу результатов работы [9] могут быть представлены непрерывными функциями (вместо $\nu_H(dx_k)$ пишем dx_k)

$$n \mapsto [\psi_n](x) = e^{\frac{t}{n}\tilde{\nu}(x)}\int\limits_{\mathbb{Q}_p \ni x_1} dx_1\varphi^{\alpha,\frac{t}{n}}(x-x_1)\times$$

$$\times e^{\frac{t}{n}\tilde{\nu}(x_1)}\int\limits_{\mathbb{Q}_p \ni x_2} dx_2\varphi^{\alpha,\frac{t}{n}}(x_1-x_2)e^{\frac{t}{n}\tilde{\nu}(x_2)}\ldots$$

$$\ldots e^{\frac{t}{n}\tilde{\nu}(x_{n-2})}\int\limits_{\mathbb{Q}_p \ni x_{n-1}} dx_{n-1}\varphi^{\alpha,\frac{t}{n}}(x_{n-2}-x_{n-1})\times$$

$$\times e^{\frac{t}{n}\tilde{\nu}(x_{n-1})}\int\limits_{\mathbb{Q}_p \ni x_n} dx_n\varphi^{\alpha,\frac{t}{n}}(x_{n-1}-x_n)[\psi_0](x_n) =$$

$$= \int\limits_{C_1([0,t],\mathbb{Q}_p)\ni\eta}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\nu}\left(\eta\left(k\frac{t}{n}\right)\right)\cdot\frac{t}{n}\right)\times$$

$$\times\ [\psi_0](\eta(t))M_{\xi,x}(d\eta),$$

где $C_1([0,\ t],\ \mathbb{Q}_p)$ — пространство отображений $[0; t] \to \mathbb{Q}_p$, не имеющих разрывов второго рода, $M_{\xi,x}$ — распределение в этом пространстве процесса ξ, стартующего в точке x; все интегралы корректно определены, и каждый относительно своего параметра x_k ($k = (n-1), (n-2), ..., 1, 0$; $x_0 = x$) является равномерно непрерывной функцией класса $L_1 \cap L_2(\nu_H)$. Последний же интеграл при каждом $x \in \mathbb{Q}_p$ сходится при $n \to \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости к числу

$$\int\limits_{C_1([0,t],\mathbb{Q}_p)}\exp\left(\int_0^t\tilde{\nu}(\eta(\tau))d\tau\right)\cdot[\psi_0](\eta(t))M_{\xi,x}(d\eta)$$

непрерывно, как показано опять-таки в [9], зависящему от x.

Далее вместо $[\Psi(t)](x)$ пишем $\psi(t, x)$, где $[\Psi(t)]$ — непрерывный представитель класса $\Psi(t) \in L_2$.

Следствие 2. *При каждом н.у.* $\psi_0 \in L_2 \cap L_1(\nu_H)$ *и каждом* $t > 0$ *последовательность непрерывных функций, являющихся представителями классов* $\left(\widehat{e^{\frac{t}{n}\cdot K}}\right)^n\psi_0 \in L_2$ *и принимающих во всякой точке* $x \in \mathbb{Q}_p$ *значение, равное повторному интегралу*

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dp_n\chi_{\mathbb{Q}_p}(p_nx)e^{(\tilde{\nu}(x)-f^{\alpha}(p_n))t/n}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dq_{n-1}\chi_{\mathbb{Q}_p}(-p_nq_{n-1})\times$$

$$\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dp_3\chi_{\mathbb{Q}_p}(p_3q_3)e^{(\tilde{\nu}(q_3)-f^{\alpha}(p_3))t/n}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dq_2\chi_{\mathbb{Q}_p}(-p_3q_2)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dp_2\chi_{\mathbb{Q}_p}(p_2q_2)e^{(\tilde{\nu}(q_2)-f^{\alpha}(p_2))t/n}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dq_1\chi_{\mathbb{Q}_p}(-p_2q_1)\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dp_1\chi_{\mathbb{Q}_p}(p_1q_1)e^{(\tilde{\nu}(q_1)-f^{\alpha}(p_1))t/n}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}dq_0\chi_{\mathbb{Q}_p}(-p_1q_0)\psi_0(q_0),$$

при $n \to \infty$ *поточечно сходится к непрерывному представителю* $[\Psi(t)] = \psi(t, \cdot)$ *элемента* $\Psi(t)$. *Таким образом, полагая при каждом n под знаком суммирования* $q_n \equiv x$ *и понимая каждый интеграл как повторный, в котором интегрирование ведется справа налево* (*всякий раз от суммируемой функции*), *получаем равенство*

$$\psi(t,x) = \lim_{n\to\infty}\int\ldots\int dp_ndq_{n-1}dp_{n-1}dq_{n-2}\ldots$$

$$\ldots dp_2dq_1dp_1dq_0\exp\left(2i\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(q_k-q_{k-1})p_k\right\}_p\right)\times$$

$$\times\ \exp\left(\sum_{k=1}^{n}(\tilde{\nu}(q_k)-f^{\alpha}(p_k))t/n\right)\cdot\psi_0(q_0). \qquad (4)$$

4. ГАМИЛЬТОНОВ ИНТЕГРАЛ ФЕЙНМАНА ДЛЯ ЗАДАЧИ (1)

Определение 1. Пусть $x \in \mathbb{Q}_p$, функции f: $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ и g: $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$ борелевские, $t > 0$ и для каждого $n = 1, 2, ...$ существуют повторные интегралы в каждом из которых $q_n = x$ и интегрирование ведется справа налево:

$$\int\ldots\int\exp\left(2i\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}(q_k-q_{k-1})p_k\right\}_p\right)\times$$

$$\times \exp\left(\sum_{k=1}^{n} f(q_k, p_n)\cdot\frac{t}{n}\right)\cdot g(q_0)dp_n dq_{n-1}dp_{n-1}dq_{n-2}\ldots$$
$$\ldots dp_2 dq_1 dp_1 dq_0.$$

Если существует предел этих чисел при $n \to \infty$, он называется гамильтоновым интегралом Фейнмана по траекториям $[0; t] \ni \tau \mapsto \begin{pmatrix} q(\tau) \\ p(\tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^2$ в фазовом пространстве (для $q(t) = x$) от функционала

$$F\begin{pmatrix} q(\cdot) \\ p(\cdot) \end{pmatrix} =$$
$$= g(q(0))\exp\left(2i\pi\left\{\int_0^9 \{p(\tau)dq(\tau)\}\right\}_{\mathfrak{p}}\right)\exp\left(\int_0^t f(q(\tau), p(\tau))d\tau\right)$$

и обозначается

$$\int\limits_{\left\{\begin{pmatrix} q(\cdot) \\ p(\cdot) \end{pmatrix};\, q(t) = x\right\}} F\begin{pmatrix} q(\cdot) \\ p(\cdot) \end{pmatrix} \prod_{\tau \in [0;\, t]} d(p(\tau)(q(\tau)).$$

Теорема 3. *Для каждой $\psi_0 \in L_2$ справедливо равенство непрерывных по совокупности аргументов $t > 0$ и $x \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ функций*

$$\psi(t, x) = \int\limits_{\left\{\begin{pmatrix} q(\cdot) \\ p(\cdot) \end{pmatrix};\, q(t) = x\right\}} \exp\left(2i\pi\int_0^t \{p(\tau)dq(\tau)\}_{\mathfrak{p}}\right)\times$$
$$\times \exp\left(\int_0^t K(q(\tau), p(\tau))d\tau\right)\cdot\psi_0(q(0))\times$$
$$\times \prod_{\tau \in [0;\, t]} d(p(\tau))d(q(\tau)). \qquad (5)$$

Следствие 3. *Полагая $H = \dfrac{i}{2\pi}K$, получаем аналог классической формулы* (*с нормированной на единицу константой Планка*)

$$\psi(t, x) =$$
$$= \int\limits_{\left\{\begin{pmatrix} q(\cdot) \\ p(\cdot) \end{pmatrix};\, q(t) = x\right\}} \exp\left(2i\pi\int_0^t (\{p(\tau)dq(\tau)\}_{\mathfrak{p}} - H(q(\tau), p(\tau))d\tau)\right)\times \qquad (6)$$
$$\times\ \psi_0(q(0))\prod_{\tau \in [0;\, t]} d(p(\tau))d(q(\tau)).$$

Замечание 1. Значение эвристических записей, подобных только что приведенной, не ограничивается тем, что они являются компактными версиями формул вида (4). Не менее важная их роль состоит в том, что содержащиеся в них интегралы можно подвергать преобразованиям по обычным формулам и затем снова переходить к пределу повторных интегралов, каждый раз доказывая равенство исходного и нового пределов. Было бы полезно формализовать правила подобных преобразований. Отметим еще, что интеграл Фейнмана, определенный с помощью предела повторных интегралов (т.е. с помощью формулы Фейнмана), называют секвенциальным интегралом.

Замечание 2. Классические аналоги формул (4), (5) и (6) для непрерывного решения задачи (1), получаемые заменой $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ на $\mathbb{R}$, $\{\ldots\}_{\mathfrak{p}}$ на обычную вещественную дробную часть и оператора D^{α} (Владимирова) на $(-\Delta)^{\alpha/2}$ (степень лапласиана), по-видимому, ранее в литературе также не рассматривались.

Отметим также, что функция $(p(\cdot), q(\cdot)) \mapsto$ $\mapsto \exp\left(2i\pi\int_0^t \{p(\tau)dq(\tau)\}_{\mathfrak{p}}\right)$ играет роль обобщенной плотности гамильтоновой псевдомеры Фейнмана [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фейнман Р.* // УФН. 1967. Т. 91. В. 1. С. 29–48.
2. *Feynman R.P.* // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367–387;.
3. *Dirac P.* // J. London Math. Soc. 1933. V. 8. P. 274–277.
4. *Feynman R.P.* // Phys. Rev. 1951. V. 84. P. 108–128.
5. *Аветисов В.А., Бикулов А.Х., Осипов В.Ал.* // Тр. Мат. ин-та РАН. 2004. Т. 245. С. 55–64.
6. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* р-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, Физматлит, 1994.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1975.
8. *Davies E.B.* One-Parameter Semigroups. L.; N.Y.: Acad. Press, 1980.
9. *Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н.* // Тр. Мат. ин-та РАН. 2009. Т. 265. С. 229–240.
10. *Chernoff R.* // J. Funct. Anal. 1968. № 2. P. 238–242.
11. *Smolyanov O.G., Weizsaecker H. von* // Infinite Dimensional Anal., Quantum Probability and Related Topics. 1999. V. 2. № 1. P. 51–78.
12. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.