ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 425, № 5, с. 1–5

МАТЕМАТИКА

УДК 517.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ВЛАДИМИРОВА ИНТЕГРАЛАМИ ФЕЙНМАНА ПО ТРАЕКТОРИЯМ

© 2009 г. О.Г. Смолянов, Н.Н. Шамаров

Представлено академиком В.С. Владимировым 06.11.2008 г.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Как известно, решения начально-краевых задач для классических эволюционных уравнений с псевдодифференциальным оператором (ПДО) в правой части могут быть представлены интегралами по пространству траекторий в конфигурационном, импульсном или фазовом пространстве. В первом случае интегрирование ведется по мере Винера или псевдомере Фейнмана (и их обобщениям), во втором случае – по комплексной мере Маслова–Чеботарева(–Пуассона) и в третьем – по гамильтоновой псевдомере Фейнмана или ее аналогам, или по аналогу меры Маслова-Чеботарева.

В работе описаны подобные представления для эволюционных уравнений с ПДО, действующими в пространствах комплекснозначных функций $\mathfrak{p}$-адического аргумента.

Как показано в работе [5], такие уравнение, являющиеся p-адическими аналогами обычного уравнения теплопроводности с распределенными источниками тепла, могут использоваться для описания динамики белковой молекулы.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Поле $\mathfrak{p}$-адических чисел $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ [1] ($\mathfrak{p}$ – простое натуральное число) представляет собой пополнение поля рациональных чисел относительно нормирования, определяемого равенствами $|\mathfrak{q}|_\mathfrak{p} = 1$ при простом $\mathfrak{q}$, не равном $\mathfrak{p}$, и $|\mathfrak{p}|\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}$. Каждое $\mathfrak{p}$-адическое число a допускает однозначное представление в виде (сходящегося в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$) ряда

$$a = \sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \ge \lg_\mathfrak{p}|a|_\mathfrak{p}} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k} = [a]_\mathfrak{p} + \{a\}_\mathfrak{p},$$

где $a_k \in \{0, 1, \ldots, \mathfrak{p} - 1\}$ для всякого $k \in \mathbb{Z}$, причем $\lg_\mathfrak{p}|a|_\mathfrak{p} \in \mathbb{Z}$ и $a_{\gamma(a)} \neq 0$ для $a \neq 0$ ($\lg_\mathfrak{p} 0 = -\infty$, $a_{-\infty} = 0$),

$$[a]_\mathfrak{p} = \sum_{k \ge 0} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k}, \quad \{a\}_\mathfrak{p} = \sum_{\gamma_\mathfrak{p}(a) \le k < 0} a_k \cdot \mathfrak{p}^{+k},$$

$$\{a\}_\mathfrak{p} \in \mathbb{Q} \cap [0;\, 1) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

При этом отображение $\{\cdot\}_\mathfrak{p}$ является непрерывным гомоморфизмом аддитивной топологической группы нормированного поля $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ в абелеву топологическую группу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Непрерывный гомоморфизм $\chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}$ аддитивной группы $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ в мультипликативную группу $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$, задаваемый формулой $\chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(a) = e^{2i\pi\{a\}_\mathfrak{p}}$, является аддитивным унитарным характером группы $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, причем каждый непрерывный унитарный комплексный аддитивный характер локально-компактной аддитивной группы $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ имеет вид (см. [1]) $a \mapsto \chi_y(a) \equiv \chi_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}}(y \cdot a)$ для некоторого $y \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ и соответствие $y \mapsto \chi_y$ является изоморфизмом аддитивной топологической группы $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ и (двойственной ей по Понтрягину) группы характеров на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

Далее $\sigma_\mathfrak{p}$ – сигма-алгебра всех борелевских подмножеств в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{M}_\mathfrak{p} = \{\nu\}$ – множество всех счетно-аддитивных комплекснозначных мер ν: $\sigma_\mathfrak{p} \to \mathbb{C}$. Сверточную экспоненту элемента $\nu \in \mathcal{M}_\mathfrak{p}$, обозначаемую $e^{*\nu}$, определим с помощью ряда[1]

$e^{*\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \nu^{*\nu}$, сходящегося по вариации.

Преобразованием Фурье меры $\nu \in \mathcal{M}_\mathfrak{p}$ называется [1] функция, обозначаемая символом $\tilde{\nu}$ и задаваемая равенством $\tilde{\nu}(y) = \int \chi_y(-x)\nu(dx)$; легко

[1] Символом δ_x обозначается вероятностная мера, сосредоточенная в точке x. Сверточные степени ν^{*n} меры $\nu \in \mathcal{M}_\mathfrak{p}$ определяются так: $\nu^{*0} = \delta_0$, $\nu^{*(n+1)} = (\nu^{*n}) * \nu$.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

проверяются равенства [8] $\widetilde{e^{*\nu}}(x) = e^{\tilde{\nu}(x)}$, $x \in \mathbb{Q}_p$, $\nu \in \mathcal{M}_p$.

Неотрицательная функция на системе замкнутых шаров в $\mathbb{Q}_p$ (являющейся полукольцом), равная на каждом шаре его диаметру (совпадающему с радиусом), задает (нормированную единицей на $\mathbb{Z}_p$) борелевскую меру Хаара на локально-компактной абелевой аддитивной группе $\mathbb{Q}_p$, далее обозначаемую символом Haar. Для комплекснозначных функций f класса $L_1 \equiv L_1(\mathbb{Q}_p, \sigma_p, \mathrm{Haar})$ определяем меры $\nu_f \equiv f \cdot \mathrm{Haar} : \sigma_p \ni A \mapsto \int_A f(x)\mathrm{Haar}(dx)$ и определяем преобразования Фурье $\tilde{f}$ функций f равенством $\tilde{f} \equiv \tilde{\nu}_f$.

Сужение оператора $\mathcal{F}_1$: $L_1 \ni f \mapsto \tilde{f}$ на плотное в комплексном $L_2 \equiv L_2(\mathbb{Q}_p, \sigma_p, \mathrm{Haar})$ подпространство $L_1 \cap L_2$ продолжается [1] до унитарного оператора $\mathcal{F}_2$: $L_2 \cap L_2$.

2. ОБОБЩЕННЫЕ МЕРЫ НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НАД $\mathbb{Q}_p$ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Пусть $E = \{x\}$ означает некоторое векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$; $E' = \{y\}$ – некоторое множество $\mathbb{Q}_p$-линейных отображений y: $E \to \mathbb{Q}_p$; $F(E, E') = \{\varphi\}$ – некоторое пространство комплекснозначных отображений φ: $E \to \mathbb{C}$, содержащее все отображения вида χ_l: $x \mapsto \chi_{\mathbb{Q}_p}(-l(x))$, где $l \in E'$. Всякое $\mathbb{C}$-линейное отображение m: $F(E, E') \to \mathbb{C}$ будем называть $F(E, E')$-обобщенной мерой на E. Если m: $F(E, E'') \to \mathbb{C}$ будем называть $F(E, E')$-обобщенной мерой на E. Если m: $F(E, E') \to \mathbb{C}$ является $F(E, E')$-обобщенной мерой на E, то ее E'-преобразованием Фурье (или преобразованием Фурье относительно E') называется отображение множества E' в $\mathbb{C}$, обозначаемое $\tilde{m}$ и задаваемое формулой $l \mapsto m(\bar{\chi}_l)$.

В рассматриваемых далее представлениях решений эволюционных уравнений роль пространств E и E' играют пространства отображений отрезка $[0, t]$ в $Q \in \{\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p\}$, называемых траекториями в Q, не имеющих разрывов второго рода (в частности, их образы ограничены) и непрерывны справа; пространство всех таких отображений ξ обозначим $C_R^t(Q) = \{\xi\}$ (или просто $C_R(Q)$, если t известно); его подпространство, состоящее из кусочно-постоянных функций, обладающих лишь конечным числом точек разрыва и обращающихся в конце отрезка в нуль, обозначим $C_P^t(Q) = \{\eta\}$; при этом под η' понимаем "обобщенную производную", являющуюся Q-значной борелевской мерой на $[0; t]$ с конечным носителем.

В случае $Q = \mathbb{Q}_p$ отображение

$$C_R(\mathbb{Q}_p) \times C_P(\mathbb{Q}_p) \ni (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta \rangle_C \equiv$$

$$\equiv \int_{[0, t]} \xi(s)\eta'(ds) \in \mathbb{Q}_p$$

приводит $\mathbb{Q}_p$-линейные пространства $C_R(\mathbb{Q}_p)$ и $C_P(\mathbb{Q}_p)$ в двойственность, в силу которой далее мы каждое из этих двух пространств отождествляем с пространством $\mathbb{Q}_p$-линейных функционалов на другом. Для $E \in \{C_R(\mathbb{Q}_p), C_P(\mathbb{Q}_p)\}$ положим: $E' \in (\{C_R, C_P\} \backslash \{E\})$, $F(E, E')$ – множество ограниченных функций, измеримых относительно сигма-алгебры $\sigma(E, E')$ подмножеств E, порожденной семейством функций $\{\bar{\chi}_l : l \in E'\}$; при этом используются $F(E, E')$-обобщенные меры, каждая из которых задается равенством вида $m(f) = \int_E f(x)M_m(dx)$, где M_m – счетно-аддитивная комплекснозначная мера на той же сигма-алгебре $\sigma(E, E')$, причем предполагается, что преобразование Фурье $\tilde{m}$ имеет вид $E' \ni$

$$\ni y \mapsto \tilde{m}(y) = \exp\left\{\int_0^t V(y(ss)ds\right\},$$

где V: $\mathbb{Q}_p \to C$ – непрерывная функция, и интеграл существует в смысле Римана. Именно такой вид имеют преобразования Фурье счетно-аддитивных мер двух типов, построенные в [3] (это доказывается как в [8] и [9]).

В случае траекторий в произведении $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$ полагаем $E = C_R(\mathbb{Q}_p) \times C_P(\mathbb{Q}_p)$ и $E' = C_P(\mathbb{Q}_p) \times C_R(\mathbb{Q}_p)$; двойственность

$$((\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2))_2 \mapsto \int_{[0;\, t]} \xi_1(s)\eta_2'(ds) -$$

$$- \int_{[0;\, t]} \xi_2(s)\eta_1'(ds) = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_C - \langle \xi_2, \eta_1 \rangle_C$$

снова позволяет рассматривать E' как пространство некоторых $\mathbb{Q}_p$-линейных функционалов на E, и наоборот. Однако в отличие от предыдущего случая теперь интересующая нас обобщенная мера не будет задаваться в виде явного интеграла по какой бы то ни было счетно-аддитивной мере, но счетно-аддитивные меры на E' будут играть важную роль в конструкции (ср. [2, 10]). Пусть аналогично предыдущему $\sigma(E' E)$ – сигма-алгебра подмножеств пространства $E' = \{l\}$, порожденная всеми отображениями вида $\varphi_x(l) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(l(x))$, $x \in E$. Пусть $\mathcal{M} = \{\mu\}$ – пространство счетно-аддитивных комплекснозначных мер μ, определенных на $\sigma(E'$, $E)$. Преобразованием Фурье меры $\mu \in \mathcal{M}$ назовем функцию $\tilde{\mu}: E \to \mathbb{C}$, определенную равенством $\tilde{\mu}(x) = \int_{E'} \varphi_x(-l)\mu(dl)$. Далее полагаем $l \equiv (\eta_l, \xi_l)$ и $\mu(dl) = \mu(d\eta_l, d\xi_l)$. Наконец, в качестве пространства $F(E, E')$ из определения обобщенных мер возьмем пространство $\tilde{\mathcal{M}}$ преобразований Фурье всевозможных мер из $\mathcal{M}$.

Определение 1. Симплектической, или гамильтоновой (псевдо)мерой Фейнмана на пространстве $E = C_R^t(\mathbb{Q}_p) \times C_P^t(\mathbb{Q}_p)$ назовем линейный функционал $\tilde{\mathcal{M}} \to \mathbb{C}$, обозначаемый далее символом Φ^t и определяемый формулой

$$\tilde{\mu} \mapsto \int_{E_l'} \chi_{\mathbb{Q}_p}(\langle \xi_l, \eta_l \rangle_C)\mu(d\eta_l, d\xi_l)$$

или, более подробно,

$$\tilde{\mu} \mapsto \iint_{C_P^t(\mathbb{Q}_p)_\eta \times C_R^t(\mathbb{Q}_p)_\xi} \exp\left[2\pi i \left\{ \int_{[0;\, t]} \xi(s)\eta'(ds) \right\}_p \right] \cdot \mu(d\eta, d\xi),$$

где нижний индекс около каждого множителя в области интегрирования указывает на пробегающую это пространство переменную.

Значение такой меры Фейнмана на элемента $\varphi \in \tilde{\mathcal{M}}$ обозначим, следуя традиции, интегралом $\int_E \varphi(x)\Phi^t(dx)$, называемым симплектическим, или гамильтоновым, интегралом Фейнмана.

Поскольку в случае $\varphi = \tilde{\mu}$ это значение по определению удовлетворяет равенству

$$\int_E \tilde{\mu}(x)\Phi^t(dx) = \int_{E'} \Psi^t(l)\mu(dl),$$

где $\Psi^t(l) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(\langle \xi_l, \eta_l \rangle_C)$, то, подставляя вместо μ вероятностные дираковские меры $\mu_z = \delta_z$, сосредоточенные в точках $z \in E'$, для которых обратное преобразование Фурье легко вычисляется по определению $\left(\tilde{\mu}_z(x) \equiv \int_E \chi_{\mathbb{Q}_p}(-l(x))\mu_x(dl) = \chi_{\mathbb{Q}_p}(-z(x))\right)$, найдем, что

$$\int_E \chi_{\mathbb{Q}_p}(-z(x))\Phi^t(dx) = \int_E \hat{\mu}_z(x)\Phi^t(dx) =$$

$$= \int_{E'} \Psi^t(l)\mu_z(dl) = \Psi^t(z),$$

т.е. что функция Ψ^t: $E' \ni z \mapsto \chi_{\mathbb{Q}_p}(\langle \xi_z, \eta_z \rangle_C)$ является не чем иным, как E'-преобразованием Фурье $\tilde{\Phi}^t$ симплектической меры Фейнмана. Таким образом, приведенное определение симплектической меры Фейнмана фактически означает справедливость равенства Парсеваля–Планшереля (ср. [2]), в котором участвуют не только счетно-аддитивные меры:

$$\int_E \tilde{\mu}(x)\Phi^t(dx) = \int_{E'} \tilde{\Phi}^t(l)\mu(dl).$$

3. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ВЛАДИМИРОВА

Псевдодифференциальный оператор Владимирова D^α порядка $\alpha > 0$ определяется так.

Пусть S_p – пространство всех тех локально постоянных функций $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{C}$, которые принимают лишь конечное число различных значений и имеют компактный носитель. Известно [1], что $S_p \subset L_2$ плотно и $\mathcal{F}_2(S_p) = S_p$. Пусть f: $\mathbb{Q}_p \ni x \mapsto -(|x|_p)^\alpha$ и пусть M_f – неограниченный самосопряженный положительно-определенный в L_2 оператор $\varphi \mapsto f \cdot \varphi$ поточечного умножения на функцию f с естественной областью определения $\{\varphi \in L_2: f \cdot \varphi \in L_2\} \supset S_p$. Оператором Владимирова порядка α называется неограниченный самосопряженный неположительный в L_2 оператор $(\mathcal{F}_2)^{-1} \circ M_f \circ \mathcal{F}_2$, обозначаемый далее символом D^α, область определения которого обозначим D_α (очевидно, $D_\alpha \supset S_p$).

Кроме того, пусть далее ν – фиксированная мера из класса $\mathcal{M}_p$, $B_{\tilde{\nu}}$ – ограниченный нормальный всюду определенный в гильбертовом пространстве L_2 оператор поточечного умножения на ограниченную функцию $\tilde{\nu}$, и пусть $N = (\mathcal{F}_2)^{-1} \circ M_\nu \circ \mathcal{F}_2$; другими словами, N – это ограниченный всюду определенный в L_2 оператор свертки с мерой ν, получаемый замыканием естественно определяемого оператора свертки с элементами из S_p или из $L_1 \cap L_2$, Под задачей Коши для уравнения теплопроводности с оператором Владимирова далее будем понимать задачу отыскания непрерывной функции Ψ аргумента t, определенной на неотрицательной вещественной полуоси, принимающей значения в нормированном подпространстве $D_\alpha \subset L_2$ и удовлетворяющей условиям

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\Psi(t) = (-D^\alpha + M_\nu)\Psi(t),\qquad \Psi(0) = \psi_0, \tag{1}$$

где $\frac{d}{dt}\Psi(t)$ при каждом $t \ge 0$ вычисляется как предел в L_2-норме функции $[-t, +\infty] \ni \tau \mapsto \tau^{-1}(\Psi(t+\tau) = \Psi(t)) \in D_\alpha$ при $\tau \to 0$ (для $t = 0$ предел понимается как правый). Эту задачу Коши далее называем задачей (1), а описанную в ней функцию Ψ – ее решением. Однозначная разрешимость задачи (1) при произвольном начальном условии (н.у.) $\psi_0 \in D_\alpha$ вытекает из общей теории однопараметрических операторных полугрупп, так как сумма самосопряженного оператора $-D^\alpha$ и ограниченного M_ν является генератором сильно непрерывной полугруппы $\{G_s\}_{s\ge 0}$ с пространством D_α векторов дифференцируемости.

Справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 1 [3]. *Задача* (1) *с начальным условием* $\psi_0 \in S_\mathfrak{p}$ *имеет единственное решение, при каждом* $t \in (0; +\infty)$ *определяемое равенством*

$$\Psi(t)(x) = \psi(t, x) = \int\limits_{C_R^t \ni \gamma} \exp\left\{\int\limits_0^t v(x-\gamma(s))ds\right\}\cdot \psi_0(x-\gamma(t))M_a^t(d\gamma), \tag{2}$$

где $v = \tilde{\nu}$ *и* M_a^t *– некоторая счетно-аддитивная вероятностная мера на сигма-алгебре в* C_R^t*, порожденной всеми “отображениями вычисления” вида* δ_s: $\xi \mapsto \xi(s)$, $C_R^t(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}) \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

Пусть $C_P^t = \{\eta \in C_R^t : \mathrm{Card}\,\eta([0; t]) < \infty, \eta(t) = 0\}$.

Т е о р е м а 2. *В условиях предыдущей теоремы при каждом* $t \in (0; +\infty)$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{\Psi(t)}(y) = \varphi(t, y) = \int\limits_{C_P^t \ni \eta} \exp\left\{-\int\limits_0^t (|y-\eta(s)|_p)^a ds\right\}\cdot \varphi_0(y-\eta(t))M_\nu^t)(d\eta), \tag{3}$$

где $\varphi_0 = \tilde{\psi}_0$ *и* M_ν^t *– некоторая счетно-аддитивная комплексная мера на сигма-алгебре в* C_P^t*, порожденной всеми “отображениями вычисления” вида* δ_s: $\eta \mapsto \eta(s)$, $C_P^t(\mathbb{Q}_\mathfrak{p}) \to \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

Знаки минус в формуле (2) в силу симметричности меры M_a^t могут быть заменены на знаки плюс, и тогда эта формула не будет отличаться от стандартной формулы Фейнмана–Каца для решения обычного уравнения теплопроводности с помощью интеграла по винеровской мере; когда мера интегрирования не является симметричной, необходимо использовать знак минус. Таким образом, формула (3) аналогична формуле (2); в правых частях этих формул находятся свертки функций и мер (которые естественно называть функциональными мерами Грина соответствующих уравнений).

Отметим еще, что в формуле (2) теоремы 1 в отличие от классической формулы Фейнмана–Каца интегрирование ведется по пространству разрывных траекторий, так как не существует непостоянных непрерывных отображений отрезка вещественной прямой во вполне несвязное пространство, которым является $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

В отличие от теоремы 1 теорема 2 вполне аналогична подобной теореме для вещественных пространств. Ее доказательство может быть проведено двумя способами: с помощью представления некоторых экспонент рядами (подход Дайсона) и с помощью представления тех же экспонент пределами произведений (подход Фейнмана).

Т е о р е м а 3. *В условиях предыдущих теорем при каждом* $t \in (0; +\infty)$ *справедливы равенства*

$$\Psi(t)(q) = \int\limits_{C_P^t \times C_R^t} \chi\left(\int \gamma d\eta\right)\psi_0(q-\gamma(t))M_a^t(d\gamma)M_\nu^t(d\eta), \tag{4}$$

где $\int \gamma\, d\eta = \sum\limits_{s:\, \eta_s \ne \eta_{s-0}} \gamma_s \cdot (\eta_s - \eta_{s-0})$, и

$$\Psi(t)(q) = \int\limits_{\mathbb{Q}_\mathfrak{p}} dy \int\limits_{C_P^t \times C_R^t} \Phi^t(d\eta, d\gamma) \times \chi\left(\int\limits_0^t G(\gamma(s), y-\eta(s))ds - y\cdot\gamma(t)\right)\varphi_0(y), \tag{5}$$

где $H(x, y) = -(|y|_p)^a + \tilde{\nu}(x)$, *– символ псевдодифференциального оператора* $(-D^a + B_\nu)$*, задающего правую часть уравнения решаемой задачи Коши* (1), *и* Φ^t *– симплектическая псевдомера Фейнмана.*

Отметим, что в формуле (5) псевдомера интегрирования не зависит от параметра α и меры ν, определяющих правую часть уравнения (1).

С х е м а   д о к а з а т е л ь с т в а. Формула (4) является результатом подстановки в формулу

Фейнмана–Каца (2)вместо подынтегральной экспоненты ее представления интегралом Фурье по некоторой мере M_ν^t:

$$\exp\left\{\int_0^t \tilde{\nu}(\gamma(s))ds\right\} = \int_{C_P^T} \chi\left(\int_0^t \gamma(s)d\eta(s)\right) M_\nu^t(d\eta),$$

где конечномерные (над $\mathbb{Q}_p$) распределения меры M_ν^t могут быть вычислены так же, как в первом разделе работы [9] это сделано для мер типа Маслова–Чеботарева (в пространствах над вещественным полем).

Для получения из формулы (4) формулы (5) достаточно вычислить интеграл Фурье от произведения функционала $C_R^t \times C_P^t \ni (\gamma, \eta) \mapsto \psi_0(q - \gamma(t)) \in \in \mathbb{C}$ на меру интегрирования $M_a^t(d\gamma) \times M_\nu^t(d\eta)$ в (4), используя аналогичное предыдущему равенство

$$\exp\left\{-\int_0^t |\eta(s)|_p^a ds\right\} = \int_{C_R^T} \chi\left(\int_0^t \gamma(s)d\eta(s)\right) M_\nu^a(d\eta),$$

доказанное в [3].

З а м е ч а н и е 1. Описанный выше способ получения представления решения уравнения с оператором Владимирова в терминах симплектической меры Фейнмана опирается на формулу Фейнмана–Каца (2), полученную с помощью формулы Троттера–Ли для однопараметрических полугрупп. Однако в аналогичной ситуации с вещественными переменными исходный метод Фейнмана для получения представления в виде интеграла, называемого теперь гамильтоновым интегралом Фейнмана, опирается фактически на обобщение упомянутой теоремы Троттера–Ли – на теорему Чернова для однопараметрических полугрупп. При этом подынтегральное выражение становится проще, однако соответствующая псевдомера интегрирования выражается через аналог использованной в (5) псевдомеры Φ^t с помощью частичного преобразования Фурье. Аналогичная связь существует и в случае задачи (1) с p-адическим аргументом.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00761).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* p-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука; Физматлит, 1994.
2. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н.* // ДАН. 2008. Т. 420. № 1. С. 37–32.
4. *Козырев С.В.* // Мат. сб. 2007. Т. 2948. № 1. Р. 103–126.
5. *Аветисов В.А., Бикулов А.Х., Осипов В.Ал.* // Тр. Мат. ин-та РАН. 2004. Т. 245. С. 55–64.
6. *Хренников А.Ю*. Неархимедов анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
7. *Chernoff R.* // J. Funct. Anal. 1968. № 2. P. 238–242.
8. *Шамаров Н.Н.* // Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. В. 6. С. 193–211.
9. *Shamarov N.N.* // Rus. J. Math. Phys. 2003. V. 10. № 3. P. 1–16.
10. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. М.: Наука, 1976.
11. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1.
12. *Varadarajan V.S.* // Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. № 2. P. 97–106.