ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 420, № 1, с. 1–6

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА И ФЕЙНМАНА–КАЦА ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ВЛАДИМИРОВА

© 2008 г. О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров

Представлено академиком В.С. Владимировым 25.10.2007 г.

Поступило 29.10.2007 г.

Формулой Фейнмана называется представление решения задачи Коши для эволюционного дифференциального или псевдодифференциального уравнения с помощью предела интегралов по декартовым степеням некоторого пространства E. Формулой Фейнмана–Каца называется представление решения той же задачи с помощью интеграла по траекториям. Предполагается, что на пространстве траекторий определена некоторая счетно-аддитивная мера или некоторая псевдомера (типа меры Фейнмана, см. [2, 3]). При этом кратные интегралы в формулах Фейнмана совпадают с интегралами, являющимися конечнократными аппроксимациями интегралов по этой мере или псевдомере.

В сообщении формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца получены для решений задач Коши для уравнения теплопроводности относительно комплексных функций на произведении вещественной полупрямой и p-адической прямой $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$; роль оператора Лапласа в этих уравнениях играет оператор Владимирова. Аналогичные формулы могут быть получены и для уравнений типа Шредингера и для случая многомерного пространства над $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$. Такие уравнения могут быть полезны как при построении математических моделей процессов, масштабы которых характеризуются планковскими длиной и временем, так и при построении математических моделей, описывающих феноменологию в химии, механике сплошных сред и психологии (см. [1–6] и имеющиеся там ссылки).

ОБОЗНАЧЕНИЯ, ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Поле $\mathfrak{p}$-адических чисел $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ [1] ($\mathfrak{p}$ – простое число) представляет собой пополнение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел относительно (неархимедова) нормирования, называемого также $\mathfrak{p}$-адическим и определяемого равенствами $|\mathfrak{q}|\mathfrak{p} = 1$ при простом $\mathfrak{q}$, не равном $\mathfrak{p}$ и $|\mathfrak{p}|\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{-1}$. Поле $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ наделяется (называемой $\mathfrak{p}$-адической) нормой, являющейся продолжением с $\mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ по непрерывности только что определенной нормы $|\cdot|_\mathfrak{p}$ и обозначаемой тем же символом. Все ненулевые значения этой нормы имеют вид $\mathfrak{p}^k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Каждое $z \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}\backslash\{0\}$ допускает однозначное представление в виде (сходящегося в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ относительно $|\cdot|_\mathfrak{p}$) ряда вида $z = \sum\limits_{k=\gamma(z)}^{+\infty} z_k \cdot \mathfrak{p}^k$, где $\gamma(z) = \log_\mathfrak{p}|z|_\mathfrak{p}$ ($\in \mathbb{Z}$) и $\forall k \geq k(z)\ z_k \in \{0, 1, \ldots, \mathfrak{p}-1\}$, причем $z_{\gamma(z)} \neq 0$. Если при этом $k(z) \geq 0$, то z называется целым $\mathfrak{p}$-адическим числом. Множество $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ всех целых $\mathfrak{p}$-адических чисел является замкнутым единичным шаром с центром в нуле и образует компактную аддитивную подгруппу в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$. Если же $k(z) < 0$, то рациональное число $\sum\limits_{k(z) \leq k < 0} z_k \cdot \mathfrak{p}^k$ представляет класс эквивалентности элемента $z \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ относительно подгруппы $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$, называется $\mathfrak{p}$-адической дробной частью $\mathfrak{p}$-адического числа z и обозначается далее $\{z\}_\mathfrak{p}$. При $z \in \mathbb{Z}_\mathfrak{p}$ полагают $\{z\}_\mathfrak{p} = 0$. Отображение $\{\cdot\}_\mathfrak{p}$ взятия дробной $\mathfrak{p}$-адической части является непрерывным гомоморфизмом аддитивной топологической группы нормированного поля $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ (с нормой $|\cdot|_\mathfrak{p}$) в аддитивную топологическую группу нормированного поля $\mathbb{R}$ (с обычной нормой $|\cdot|$). Унитарный непрерывный гомоморфизм $\mathbb{Q}_\mathfrak{p} \ni z \mapsto \chi_\mathfrak{p}(z) = e^{2i\pi\{z\}_\mathfrak{p}} \in \mathbb{C}$ называется каноническим аддитивным характером на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$[1].

Неотрицательная функция на системе замкнутых шаров в $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ (являющейся полукольцом), рав-

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

[1] Каждый непрерывный унитарный комплексный аддитивный характер локально-компактной аддитивной группы $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ имеет вид $\chi_y(z) = \chi_\mathfrak{p}(y \cdot z)$, $y \in \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, и соответствие $y \mapsto \chi_y$ является изоморфизмом аддитивной топологической группы $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ и (двойственной ей по Понтрягину) группы характеров на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

ная на каждом шаре его радиусу (совпадающему с диаметром), задает (нормированную единицей на $\mathbb{Z}_\mathfrak{p}$) борелевскую меру Хаара на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

Далее $Q = \{q\}$ – локально-компактная абелева топологическая группа; будем предполагать, что она является конфигурационным пространством некоторой эволюционирующей системы. Роль пространства импульсов этой системы будет играть группа аддитивных характеров Q' (предполагаемых унитарными и непрерывными) группы Q, обозначаемая также через P. Символы dq и dp будут означать некоторые меры Хаара (на Q и на P соответственно) на борелевских сигма-алгебрах $B(Q)$ и $B(P)$, соответственно нормированные так, чтобы прямое и обратное преобразования Фурье

$$(F\psi)(p) = \widetilde{\psi(q)dq}, \quad \tilde{\nu}(p) = \int_Q p(-q)\nu(dq)$$

для $\psi: Q \to \mathbb{C}$ и $\nu: B(Q) \to \mathbb{C}$,

$$(F^{-1}\varphi)(q) = \widehat{\varphi(p)dp}, \quad \hat{\mu}(p) = \int_P p(q)\mu(dp)$$

для $\varphi: P \to \mathbb{C}$ и $\mu: B(P) \to \mathbb{C}$

были унитарны. В частности, такому условию удовлетворяют определенная выше мера Хаара на $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$ и ее копия на $(\mathbb{Q}_\mathfrak{p})' \cong \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$.

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ТЕОРЕМА ЧЕРНОВА

Функцией Гамильтона называется функция H: $Q \times P \to \mathbb{C}$. Псевдодифференциальным оператором (ПДО) с (qp-)-символом $H: Q \times P \to \mathbb{C}$ будем называть действующий в подходящем пространстве комплекснозначных функций на Q линейный оператор $\hat{H} = \hat{H}_0$, определяемый равенством

$$\hat{H} = \hat{H}_0 = F^{-1, p \to q} \circ (H(q, p)\cdot) \circ F^{q \to p}: \psi(q) \mapsto$$
$$\mapsto F^{-1, p \to q}(H(q, p) \cdot F^{q' \to p}\psi(q')),$$

или в интегральной форме

$$(\hat{H}_0\psi)(q) = \int_P p(q) \cdot H(q, p) \cdot \left(\int_Q p(-q')\varphi(q')dq'\right) dp =$$
$$= \int_{Q \times P} p(q-q') \cdot H(q, p) \cdot \psi(q')dq'dp.$$

Если $Q = \mathbb{R}^d \cong P \cong Q'$, то вместо $p(q-q')$ пишут $e^{2\pi i(p, q-q')_{\mathbb{R}^d}}$; если $Q = \mathbb{Q}_\mathfrak{p} \cong P$, то вместо $p(q-q')$ пишут $\chi_\mathfrak{p}(p \cdot (q-q'))$. (фигурные скобки означают взятие дробной которая используется здесь и далее

Аналогично определяется ПДО с pq-символом H:

$$\hat{H}_1 = F^{-1, p \to q} \circ F^{q \to p} \circ (H(q, p)\cdot): \psi \mapsto \hat{H}_1\psi,$$

где

$$(\hat{H}_1\psi)(q) = \int_{Q \times P} p(q-q') \cdot H(q', p) \cdot \psi(q')dq'dp.$$

Если конфигурационное пространство Q является модулем над полем рациональных чисел или его расширениями ($Q = \mathbb{R}^d$ или $Q = \mathbb{Q}_\mathfrak{p}^d$), то можно определить ПДО с τ-символом H: $\psi \mapsto \hat{H}_\tau\varphi$, где

$$(\hat{H}_\tau\psi)(q) =$$
$$= \int_{Q \times P} p(q-q') \cdot H(\tau q + (1-\tau)q', p) \cdot \psi(q')dq'dp$$

и τ – элемент из Q или подходящего расширения, так что при $\tau = 0$ функция H является qp-символом, при $\tau = 1$ – pq-символом; при $\tau = \frac{1}{2}$ ПДО $\hat{H}_{1/2}$ называется ПДО с символом Вейля H.

Если функция H не зависит явно от q (примеры: символ $(-p^2)$ оператора Лапласа на евклидовом пространстве, аналогичный символ оператора Лапласа–Бельтрами на торе, символ $|p|_\mathfrak{p}^a$ ($a \in \mathbb{R}$) оператора Владимирова и, наконец, символ $\tilde{\mu}(p)$ оператора свертки с мерой $\mu: B(Q) \to \mathbb{C}$), то определение ПДО с τ-символом H не зависит от τ.

Далее в основном рассматриваются уравнения вида

$$\Psi'(t) = \hat{H}(\Psi(t)), \tag{1}$$

где функция Ψ определена на отрезке $[0, T]$ вещественной прямой (интерпретируемой как ось времени) и принимает значения в некотором пространстве функций на конфигурационном пространстве Q и $\hat{H}$ – не зависящий явно от времени ПДО с (обычным или qp-) символом $H: Q \times P \to \mathbb{C}$ вида $H(q, p) = h(p) + v(q)$. Далее вместо $(\Psi(t))(q)$ будем писать также $\psi(t, q)$, а вместо начального условия $\psi(0, q)$ писать $\psi_0(q)$.

Мы будем предполагать еще, что $h = \tilde{\nu}$ и $v = \hat{\mu}$ для некоторых комплексно-значных счетно-аддитивных мер $\nu: B(Q) \to \mathbb{C}$ и $\mu: B(P) \to \mathbb{C}$. При этом, заменяя обычный функциональный интеграл по счетно-аддитивной мере на хронологический [8], можно заменить комплексное поле значений на бесконечномерную некоммутативную алгебру над $\mathbb{C}$.

В случае конкретных классических уравнений – с операторами типа Шредингера и Дирака (над $\mathbb{R}$) и операторами Владимирова (над $\mathbb{Q}_\mathfrak{p}$) "кинетический член" $h(\cdot)$ не является преобразованием Фурье счетно-аддитивной меры, но техника из теоремы 2 частично продолжает работать, как будет показано в теореме 3.

Один из способов получения таких формул состоит в обосновании (с помощью теоремы Чернова, которая ниже приведена) равенства ($\Psi(t) \equiv$) $\exp(t\hat{H}_\tau)\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{e^{tH/n}})_\tau^n\psi_0$ (конечно, для нелинейных гамильтонианов $\exp(t\hat{H}_\tau) \neq (\widehat{e^{tH}})_\tau$ ни при каком τ). Отметим, что в отличие от формул типа Фейнмана–Каца с функциональным интегралом в формулах Фейнмана не используется явным образом никакая мера на пространстве траекторий в Q.

Т е о р е м а 1 (теорема Чернова [7]). *Если для функции F, определенной на отрезке $[0, T]$ вещественной прямой и принимающей значения в пространстве ограниченных операторов в вещественном или комплексном банаховом пространстве N, выполнены условия*: $F(0) = 1$; $\exists a > 0$ $\forall t \in [0, T]$ $|F(t)| \le e^{at}$; *линейное подпространство* $L = \{x \in N: \exists \lim\limits_{s\to 0} s^{-1}(F(s)x - x) =: F'(0)x\}$ *плотно и замыкание линейного оператора $F'(0)$ совпадает с генератором $G = S'(0)$ некоторой сильно непрерывной полугруппы $S(t) \equiv e^{tG}$, то для каждого вектора $x \in N$ справедлива формула Чернова*: $e^{tG}x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n x.$

Таким образом, все сводится к доказательству равенства $\exp(t\hat{H}_\tau)\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty}(\widehat{e^{tH/n}})_\tau^n\psi_0$ или, более общим образом, равенства $\exp(t\hat{H}_\tau)\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\psi_0$ для некоторой легко исследуемой функции F неотрицательного вещественного аргумента со значениями в пространстве интегральных операторов и затем проверке того, что допредельные конечнократные интегралы совпадают с аппроксимациями интегралов по траекториям.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ПОМОЩЬЮ ОБОЩЕННЫХ ПУАССОНОВСКИХ МЕР НА ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть Q – полная метризуемая сепарабельная абелева локально-компактная группа (например, $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{Q}_p^d$) и $\hat{H}$ – ограниченный в пространстве $C_0(Q)$ непрерывных стремящихся к нулю на бесконечности комплекснозначных функций ПДО с qp-символом $H(q, p) = \tilde{\nu}(p) + \hat{\mu}(q)$, где μ и ν счетно-аддитивны и комплексны. Положим $v = \hat{\mu}$. Оператор $\hat{H}$ тогда имеет вид суммы ограниченных некоммутирующих операторов: $\nu*: \psi_0 \to (\nu * \psi_0)$ (оператор свертки) и $v\cdot: \psi_0 \to (v\cdot\psi_0)$. Экспоненты от обоих слагаемых имеют явный вид: $\exp(tv\cdot) = (e^{tv})\cdot$ и $\exp(t\nu*) = (e^{*(t\nu)})*$, где свёрточная экспонента от меры определяется обычным рядом $\exp*(t\nu) = \delta_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\nu^{*k}$, содержащим свёрточные степени $\nu^{*1} = \nu$ и $\nu^{*(k+1)} = \nu * (\nu^{*k})$ ($\delta_0(A) = 1$, если $A \ni 0$, и $\delta_0(A) = 0$ иначе). Тогда, положив $F(t) = e^{tv\cdot}e^{t\nu*}$, немедленно получаем формулу Фейнмана $\exp(t\hat{H})\psi_0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\psi_0$ как следствие теоремы Чернова (можно было бы воспользоваться и вытекающей из нее теоремой Троттера). Более того, в данном случае мы действительно можем интерпретировать конечнократный интеграл $\left(\left(\left(F\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n\right)\psi_0\right)(q)$ как аппроксимирующий функциональный интеграл вида

$$\int \exp\left\{\int_0^t v(q + x(t))dt\right\}\cdot\psi_0(q + x(0))M^{\nu,t}(dx) \quad (2)$$

по комплексной счетно-аддитивной (цилиндрической) мере $M^{\nu,t}$ на пространстве кусочно-постоянных непрерывных справа траекторий $x: [0, t) \to Q$ с конечным числом точек разрыва, таких, что $x(0) = 0$; эта мера задается аналогично однородному по времени и фазовому пространству марковскому процессу с независимыми приращениями переходными мерами вида $m(t, x, A) = e^{*t\nu}(A - x)$. В следующей теореме используются только что введенные обозначения.

Т е о р е м а 2. *Пусть в принятых выше обозначениях $H(q, p) = \tilde{\nu}(p) + \hat{\mu}(q)$, где $\mu: B(P) \to \mathbb{C}$ и $\nu: B(Q) \to \mathbb{C}$ – счетно-аддитивные меры.*

Тогда задача Коши для уравнения $\Psi'(t) = \hat{H}(\Psi(t))$ относительно функции $\Psi: [0, T] \to C_0(Q)$ с начальным условием $\psi_0(\cdot)$ имеет единственное решение ψ, определяемое равенством

$$\psi((t, x) = $$

$$= \int \exp\left\{\int_0^t v(q + c(t))dt\right\}\cdot\psi_0(q + x(0))M^{\nu,t}(dx).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы Троттера для ограниченных операторов и топологии равномерной сходимости в $C_0(Q)$

$$(\Psi(t))(x_0) = \lim_n \int\limits_{Q \ni x_1} m\left(\frac{t}{n}, x_0, dx_1\right) e^{\frac{t}{n}v(x_1)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{Q \ni x_2} m\left(\frac{t}{n}, x_1, dx_2\right) e^{\frac{t}{n}v(x_2)} \ldots \int\limits_{Q \ni x_{n-1}} m\left(\frac{t}{n}, x_{n-2}, dx_{n-1}\right) \times$$

$$\times e^{\frac{t}{n}v(x_{n-1})} \cdot \int\limits_{Q \ni x_n} m\left(\frac{t}{n}, x_{n-1}, dx_n\right) e^{\frac{t}{n}v(x_n)} \Psi_0(x_n) =$$

(производим замену $y_k = x_k - x_0$ в каждом из n интегралов, $k = 1, 2, \ldots, n$)

$$= \lim_n \int\limits_{Q \ni y_1} m\left(\frac{t}{n}, 0, dy_1\right) e^{\frac{t}{n}v(x_0 + y_1)} \cdot \int\limits_{Q \ni y_2} m\left(\frac{t}{n}, y_1, dy_2\right) \times$$

$$\times e^{\frac{t}{n}v(x_0 + y_2)} \ldots \int\limits_{Q \ni y_{n-1}} m\left(\frac{t}{n}, y_{n-1}, dy_{n-1}\right) e^{\frac{t}{n}v(x_0 + y_{n-1})} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{Q \ni y_n} m\left(\frac{t}{n}, y_{n-1}, dy_n\right) e^{\frac{t}{n}v(x_0 + y_n)} \Psi_0(y_n) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{Q^n} \exp\left\{\sum_{k=1}^n \frac{t}{n} v(x_0 + y_k)\right\} \cdot \Psi_0(y_n) \cdot m_{t,n}(dy_1, dy_2, \ldots, dy_n),$$

где мера $m_{t,n}$: $B(Q^n) \to \mathbb{C}$, задаваемая формулой

$$m_{t,n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \int\limits_{A_1 \ni y_1} m\left(\frac{t}{n}, 0, dy_1\right) \times$$

$$\times \int\limits_{A_2 \ni y_2} m\left(\frac{t}{n}, y_1, dy_2\right) \ldots \int\limits_{A_{n-1} \ni y_{n-1}} m\left(\frac{t}{n}, dy_{n-2}, dy_{n-1}\right) \times$$

$$\times \int\limits_{A_n \ni y_n} m\left(\frac{t}{n}, dy_{n-1}, dy_n\right),$$

счетно-аддитивна в силу комплексного варианта теоремы Ионеску Тульчи. Далее из полугруппового свойства $(e^{*(t\nu)})*(e^{*(s\nu)}) = e^{*((t+s)\nu)}$ свёрточной экспоненты вытекает комплексное равенство Чепмена–Колмогорова: при $x \in Q$, $A \in B(Q)$

$$\int\limits_{Q \ni y} m(t, x, dy) m(s, y, A) = m(t + s, x, A).$$

Кроме того, выполнены легко проверяемые неравенства: $\forall n = 1, 2, 3, \ldots\ \forall t \in [0, T]\ \|m_{t,n}\| \le eT^{\|\nu\|}$ (норма меры – это ее полная вариация). Пусть $Cyl([0, t], Q)$ – (так называемая цилиндрическая) алгебра подмножеств пространства $Q^{[0,t]}$ (всех отображений отрезка $[0, t]$ в (радоновскую) группу Q), порожденная всеми множествами вида $\{f \in Q^{[0,t]}$: $f(s) \in A\}$ при $s \in [0, t]$ и $A \in B(Q)$. Тогда по теореме типа Колмогорова из двух предыдущих предложений – равенства Чепмена–Колмогорова и равномерной оценки вариаций вытекает существование счетно-аддитивной (с конечной вариацией) меры $M_{t,-}^{\nu}$ на $Cyl([0, t], Q)$, такой, что образ меры $M_{-}^{t,\nu}$, порождаемый на Q^n при проектировании $Q^{[0,t]} \ni f \mapsto$ $\mapsto \left(f\left(\frac{t}{n}\right), f\left(\frac{2t}{n}\right), \ldots, f\left(\frac{(n-1)t}{n}\right), f(t)\right) \in Q^n$, совпадает с $m_{t,n}$.

На самом деле мера $M_{-}^{t,\nu}$ является образом счетно-аддитивной меры $M^{\nu,t}$, заданной на подпространстве $PC([0, t], Q) \subset Q^{[0,t]}$, состоящем из кусочно-постоянных отображений с конечным числом точек разрыва (это доказывается аналогично оценкам из [9], обобщающим оценки из [10]). Отсюда вытекает, что

$$(\Psi(t))(x_0) = \lim_n \int\limits_{PC([0,t],Q) \ni z(\cdot)} \times$$

$$\times \exp \sum_{k=1}^n \frac{t}{n} v\left(x_0 + \left(\frac{tk}{n}\right)\right) \cdot \Psi_0(z(t)) M^{\nu,t}(dz);$$

переходя теперь к пределу по мажорантной теореме Лебега, получаем в правой части выражение (2).

Интеграл (2) называется интегралом по траекториям в конфигурационном пространстве для системы с классической функцией Гамильтона $H = \tilde{\nu}(p) + v(q)$. Мера $M^{\nu,t}$ является аналогом обобщенной пуассоновской меры [10]. Если $\psi_0 \in C_0(Q)$, то теорема 2 справедлива и для непрерывной функции v, обладающей ограниченной сверху вещественной частью.

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГА МЕРЫ ВИНЕРА

Если $Q = \mathbb{Q}_\mathfrak{p}$, то, как и для $Q = \mathbb{R}^d$, аналог формулы (2) для решения задачи Коши для (1) может быть получен и в случае, когда в функции Гамильтона $H(q, p) = h(p) + v(q)$ слагаемое $h(q)$ является символом неограниченного ПДО. Это можно сделать, в частности, для функции $h(p) = -(|p|_\mathfrak{p})^a$, $a > 0$, являющейся символом оператора В.С. Владимирова D^a со знаком минус. Далее индекс $\mathfrak{p}$ в обозначении $\mathfrak{p}$-адической нормы опускается.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $Q = \mathbb{Q}_\mathfrak{p} \cong P = Q'$, $a > 0$, v: $Q \to \mathbb{C}$ – *непрерывная функция с ограниченной сверху вещественной частью*, $H(q, p) = -|p|^a + v(q)$.

Тогда для каждого $T > 0$ *задача Коши для уравнения* (1) *с начальным условием* $\Psi(0) = \Psi_0$

имеет единственное решение, определяемое равенством

$$\Psi(t) = \int \exp\left\{\int_0^t v(q + x(t))dt\right\} \cdot \psi_0(q + x(0))M^{a,t}(dx), \quad (3)$$

где $M^{a,t}$ *– вероятностная мера на пространстве отображений* $C_{t,1}$ *отрезка* $[0, t]$ *в* $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$, *не имеющих разрывов второго рода.*

Доказательство. Воспользуемся снова явным выражением для экспонент от псевдодифференциальных операторов $-D^a$ и оператором $v\cdot$ умножения на функцию. Именно $(e^{-tD^a}\varphi)(x_0) = m_t^a * \varphi$, где m_t^a – вероятностная борелевская мера, определяемая равенством $\widetilde{m_t^a}(p) = e^{-t|p|^a}$ $(p \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}})$. Тогда, полагая $m(t, x, A) = m_t^a(A - x)$ $(t \geq 0, A \in B(Q), x \in Q)$, снова получим равенство Чепмена–Колмогорова и по теореме Колмогорова марковский процесс с независимыми приращениями в $\mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}$ на отрезке времени $[0, t]$, т.е. некоторую вероятностную меру $M_-^{a,t}$ на $Cyl([0, t], \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}})$, связанную с переходными вероятностями $m(\dots)$ так же, как в доказательстве теоремы 2, была с ними связана мера $M_-^{\nu,t}$ (сосредоточенная на тех $z \in \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^{[0,t]}$, для которых $z(0) = 0$). Явно проверив стохастическую непрерывность полученного однородного процесса, найдем [11], что $M_-^{a,t}$ является образом некоторой вероятностной меры $M^{a,t}$ на $C_{t,1}$. Тогда выкладки с повторными интегралами по мерам $m(\dots)$, полностью аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1, приводят к равенствам

$$(\Psi(t))(x_0) = \lim_n \int_{C_{1,t} \ni z} \exp\left\{\sum_{k=1}^n \frac{t}{n} v\left(x_0 + z\left(\frac{tk}{n}\right)\right)\right\} \times$$
$$\times \Psi_0(x_0 + z(t))M^{a,t}(dz) =$$
$$= \int_{C_{1,t} \ni z} \exp\left\{\int_0^t v(x_0 + z(s))ds\right\} \cdot \Psi_0(x_0 + z(t))M^{a,t}(dz).$$

Теорема доказана.

Отметим, что наш метод отличается от использованного в работе [12] доказательства формулы Фейнмана–Каца для ПДО $\hat{H}$, аналогичного ПДО из теоремы 3, но с несколько отличающимися условиями на коэффициенты.

В случае теоремы 2 с $H(q, p) = \tilde{\nu}(p) + \hat{\mu}(q)$, при начальном условии $\psi_0 \in C_0(Q) \cap L_1(Q)$ решение можно записать (переходя к преобразованиям Фурье) также в виде формулы Фейнмана–Каца с интегралом по траекториям в пространстве импульсов:

$$\psi(t, q) = F^{-1, p \to q}\int \exp\left\{\int_0^t \tilde{\nu}(p + y(t))dt\right\} \cdot$$
$$\cdot (F\psi_0)(p + y(0))M^{\mu_-,t}(dy). \quad (4)$$

Наконец, получим формулу Фейнмана–Каца с интегралом по траекториям в так называемом фазовом пространстве $\Phi = Q \times P$.

Теорема 4. *При тех же ограничениях на* H *и* ψ_0, *что и для получения* (4), *справедливы формулы*

$$\psi(t, q) = \int \exp\left\{2\pi i \int_0^t (y(t), dx(t))_{\mathbb{R}^d}\right\} \cdot \psi_0(q + x(t)) \times$$
$$\times M^{\nu \times \delta + \delta \times \mu, t}(dx(\cdot), dy(\cdot))$$

для случая вещественного $Q = \mathbb{R}^d$ *и*

$$\psi(t, q) = \int \exp\left\{2\pi i \left\{\int_0^t y(t)dx(t)\right\}_{\mathfrak{p}}\right\} \cdot$$
$$\cdot \psi_0(q + x(t))M^{\nu \times \delta + \delta \times \mu, t}(dx(\cdot), dy(\cdot))$$

для случая $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{\mathfrak{p}}^d$.

Схема доказательства аналогична использованной в теореме 2; используем равенство $\exp(t\hat{H}_\tau)\psi_0 = \lim_{n \to \infty} (\widehat{e^{tH/n}})_\tau^n \psi_0$ при $\tau = 0$ и явный вид функции H.

Отметим, что последние два представления позволяют определить симплектическую меру Фейнмана, которая, в свою очередь, может быть использована для определения преобразования Фурье в бесконечномерном пространстве, а значит, и для определения бесконечномерных ПДО; такие ПДО могут быть полезны в теории суперструн, в том числе $\mathfrak{p}$-адических.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06–01–00761).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* p-адический анализ и математическая физика // М.: Наука, Физматлит, 1994.
2. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: Изд-во МГУ, 1990.
3. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* // J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 5161–5171.
4. *Козырев С.В.* // Мат. сб. 2007. V. 1948. № 1. P. 103–126.

5. *Аветисов В.А., Бикулов А.Х., Осипов В.Ал.* // Тр. Мат. ин-та РАН. 2004. Т. 245. С. 55–64.

6. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.

7. *Chernoff R.* // J. Funct. Anal. 1968. № 2. P. 238–242.

8. *Шамаров Н.Н.* // Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. В. 6. С. 193–211.

9. *Shamarov N.N.* // Rus. J. Math. Phys. 2003. V. 10. № 3. P. 1–16.

10. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана для нелинейных уравнений. М.: Наука, 1976.

11. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Теория случайных процессов. М.: Наука, 1971. Т. 1.

12. *Varadarajan V.S.* // Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. № 2. P. 97–106.