ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 393, № 4, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 517.983 : 517.986

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОЕКТОРОВ

© 2003 г. А. М. Бикчентаев

Представлено академиком С.М. Никольским 23.06.2003 г.

Поступило 23.06.2003 г.

Пусть H – гильбертово пространство над телом λ(=**R**, **C** или **H**). Через $B(H)$ обозначим $*$-алгебру всех линейных ограниченных операторов в H. Оператор $x \in B(H)$ называется идемпотентом, если $x = x^2$; проектором, если $x = x^2 = x^*$.

В работе решены следующие задачи:

(I) представить каждый элемент $B(H)$ в виде конечной суммы произведений проекторов;

(II) найти наименьшую верхнюю границу для числа сомножителей в слагаемых таких представлений.

Ранее [1–7] рассматривались лишь представления в более слабой форме: допускались коэффициенты из Λ в слагаемых, задача II не исследовалась. В разделе 3 для $\Lambda = \mathbf{C}$ доказывается неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: каждый оператор $x \in B(H)$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем двух проекторов при $\dim H = \infty$ и не более чем трех проекторов при $2 \le \dim H < \infty$.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $\Lambda = \mathbf{C}$ и e – тождественный оператор в H. Для C^*-подалгебры $A \subset B(H)$ через A^{sa}, A^+, A^{id} и A^{pr} будем обозначать ее подмножества эрмитовых операторов, положительных операторов, идемпотентов и проекторов соответственно. Через $M_n(A)$ будем обозначать алгебру $(n \times n)$-матриц с элементами из A.

Конечным следом на C^*-алгебре A называется такое отображение τ $A^+ \to [0, +\infty)$, что $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$, $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$ для всех $x, y \in A^+$, $\lambda \ge 0$, $\tau(z^*z) = \tau(zz^*)$ для всех $z \in A$.

Унитальная C^*-алгебра A называется UHF-алгеброй, если существует неубывающая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных простых C^*-подалгебр, содержащих единицу A, такая, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ плотно в A. Через $C(\Omega)$ будем обозначать C^*-алгебру всех комплекснозначных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве Ω.

Для алгебры фон Неймана M операторов в H обозначим ее центр через $Z(M)$. Пусть $p^{\perp} = e - p$ для $p \in M^{pr}$. Все знаки Σ в сообщении означают суммирования по некоторым конечным множествам индексов. Пусть $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$ для $0 \le t \le 1$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В [1, предложение 7] доказано, что каждый фактор фон Неймана в сепарабельном H алгебраически порождается своими проекторами. В [2, следствие 1] аналогичный результат установлен для всех бесконечных факторов фон Неймана M, т.е.

$$M = \mathrm{Lin}_{\mathbf{C}}\{p_1p_2p_3p_4\colon p_1, p_2, \ldots, p_4 \in M^{pr}\}.$$

В [3, с. 334] доказано, что алгебра фон Неймана алгебраически порождается своими проекторами тогда и только тогда, если она не имеет прямых бесконечномерных абелевых слагаемых. Там же показано, что

$$B(H) = \mathrm{Lin}_{\mathbf{C}}\{p_1p_2\colon p_1, p_2 \in B(H)^{pr}\}.$$

В [4] доказано, что каждый оператор в сепарабельном пространстве является линейной комбинацией 257 проекторов. В [5] показано, что каждый эрмитов оператор является вещественной линейной комбинацией восьми проекторов. В сепарабельном случае в [6] это число уменьшено до пяти и показано, что каждый эрмитов оператор является целочисленной комбинацией шести проекторов.

*Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н.Г. Чеботарева
Казанского государственного университета
им. В.И. Ульянова-Ленина*

Когда H сепарабельно и бесконечномерно, в [7] единым методом для $\Lambda = \mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или $\mathbf{H}$ показано, что

$$B(H) = \\ = \mathrm{Lin}_R\{p_1p_2p_3p_4p_5p_6\colon p_1, p_2, \ldots, p_6 \in B(H)^{\mathrm{pr}}\}.$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ (СЛУЧАЙ $\Lambda = \mathbf{C}$)

Л е м м а 1. *Пусть на C^*-алгебре A существует нетривиальный конечный след.*

Тогда $\mathrm{Lin}_R\{p_1p_2\colon p_1, p_2 \in A^{\mathrm{pr}}\}$ *неплотно в A. Если A унитальна, то* $\mathrm{Lin}_R A^{\mathrm{id}}$ *неплотно в A.*

Л е м м а 2. *Пусть число* $0 < \lambda < 1$, $\dim H \geq 2$ *и* $p \in B(H)^{\mathrm{pr}}$. *Оператор λp представляется в виде конечной суммы попарных произведений элементов* $B(H)^{\mathrm{pr}}$.

Здесь при $\dim H < \infty$ можем считать, что p одномерен и имеет матрицу $\mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$. Для $\delta \in \mathbf{C}$ с $|\delta| = 1$ и $0 \leq t \leq 1$ определим проектор $r^{(\delta,\, t)}$ матрицей

$$r_{ij}^{(\delta,\, t)} = \begin{cases} t, \text{ если } i = j = 1, \\ 1 - t, \text{ если } i = j = 2, \\ \delta f(t), \text{ если } i = 1, \quad j = 2, \\ \bar{\delta} f(t), \quad \text{если } i = 2, \quad j = 1, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (1)$$

Т е о р е м а. *Каждый оператор $x \in B(H)$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем двух проекторов при* $\dim H = \infty$ *и не более чем трех проекторов при* $2 \leq \dim H < \infty$.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть $\dim H = \infty$. Приведем необходимые известные факты теории операторов.

Л е м м а 3 [5, теорема 1]. *Каждый оператор $x \in B(H)$ представляется в виде суммы* $x = \sum_{k=1}^{5} q_k$ *пяти идемпотентов.*

Л е м м а 4 [8, теорема 1]. *Каждый идемпотент $q \in B(H)$ представляется в виде произведения $q = py$, где $p \in B(H)^{\mathrm{pr}}$, а оператор $y \in B(H)^+$ обратим.*

Л е м м а 5 [9, следствие на с. 152]. *Каждый обратимый оператор $y \in B(H)^+$ представляется в виде линейной комбинации проекторов с положительными коэффициентами.*

Л е м м а 6 [10, *теорема* 2.3.3]. *Пусть алгебра фон Неймана M имеет тип I_n (n – кардинальное число). Тогда M $*$-изоморфна тензорному произведению $Z(M) \bar{\otimes} B(K)$, где K – гильбертово пространство с* $\dim K = n$.

К фиксированному оператору $x \in B(H)$ применим лемму 3, в полученном представлении к каждому идемпотенту применим лемму 4, затем к полученному новому представлению применим лемму 5. Имеем

$$x = \sum \lambda_k p_k r_k, \quad \lambda_k > 0, \quad p_k, r_k \in B(H)^{\mathrm{pr}}. \qquad (2)$$

Преобразуем слагаемые с $\lambda_k \notin \mathbf{N}$. Считаем $0 < \lambda_k \leq \frac{1}{2}$. Если в слагаемом из (2) один из проекторов равен e, то к слагаемому применяем лемму 2. Свяжем с $p, r \in B(H)^{\mathrm{pr}}$ порожденную ими алгебру фон Неймана M. По [11, гл. 5, раздел (*ii*) теорема 1.41] существует единственный проектор $z \in Z(M)$, такой, что алгебра Mz имеет тип I_2 и $Mz^\perp$ – абелева. Пусть $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ и $\lambda pr = \lambda prz + \lambda prz^\perp$. Поскольку $prz^\perp \in B(H)^{\mathrm{pr}}$, к оператору $\lambda prz^\perp$ применима лемма 2. Из теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитальной С*-алгебры следует, что алгебра $Z(Mz)$ $*$-изоморфна C^*-алгебре $C(\Omega)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на компактном хаусдорфовом пространстве Ω всех характеров алгебры $Z(Mz)$. По лемме 6 алгебра Mz $*$-изоморфна матричной алгебре $M_2(C(\Omega))$. Для $\tilde{q} \in M_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ положим

$$\Omega_i(\tilde{q}) = \{\omega \in \Omega;\ \tilde{q}_{11}(\omega) + \tilde{q}_{22}(\omega) = i\}, \\ i \in \{0, 1, 2\}.$$

Множества $\Omega_i(\tilde{q})$ замкнуты и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω. Справедлива

Л е м м а 7. *Для каждого $\tilde{q} \in M_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ существует такая симметрия $s \in M_2(C(\Omega_1(\tilde{q})))$, что* $s(\omega)\tilde{q}(\omega)s(\omega) = \mathrm{diag}(1, 0)$ *для всех* $\omega \in \Omega_1(\tilde{q})$.

Проекторы pz и rz отождествляются с $\tilde{p}$, $\tilde{r} \in M_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ соответственно. Тогда оператор λprz отождествляется с $\lambda\, \tilde{p}\tilde{r}$. Пусть

$$\Omega_{ij} = \Omega_i(\tilde{p}) \cap \Omega_j(\tilde{r}), \quad i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Функция $\varphi\colon \Omega \to \mathbf{C}$ непрерывна тогда и только тогда, когда все ее ограничения $\varphi|\Omega_{ij}$ ($i, j \in \{0, 1, 2\}$) непрерывны. Докажем существование представления

$$\lambda\tilde{p}\tilde{r} = \tilde{c}_1\tilde{d}_1 + \tilde{c}_2\tilde{d}_2, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \in M_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}. \qquad (3)$$

Если $\omega \in \Omega_{00} \cup \Omega_{01} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{02} \cup \Omega_{20}$, то $\lambda\,\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = 0$ и можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = \tilde{d}_1(\omega) = \tilde{d}_2(\omega) = 0$.

Пусть $\omega \in \Omega_{12}$ и $s(\omega)$ из леммы 7 со свойством $s(\omega)\tilde{p}(\omega)s(\omega) = \mathrm{diag}(1, 0)$. Можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = \tilde{p}(\omega)$, $\tilde{d}_1(\omega) = s(\omega)r^{(1, \lambda/2)}s(\omega)$, $\tilde{d}_2(\omega) = s(\omega)r^{(-1, \lambda/2)}s(\omega)$.

Пусть $\omega \in \Omega_{12}$ и $s(\omega)$ из леммы 7 со свойством $s(\omega)\tilde{r}(\omega)s(\omega) = \mathrm{diag}(1, 0)$. Можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = \tilde{r}(\omega)$, $\tilde{d}_1(\omega) = s(\omega)r^{(1, \lambda/2)}s(\omega)$, $\tilde{d}_2(\omega) = s(\omega)r^{(-1, \lambda/2)}s(\omega)$.

Если $\omega \in \Omega_{22}$, имеем

$$\lambda\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = \mathrm{diag}(1, 0)r^{(1, \lambda)} + r^{(-1, 1-\lambda)}\mathrm{diag}(0, 1);$$

можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \mathrm{diag}(1, 0)$, $\tilde{c}_2(\omega) = r^{(-1, 1-\lambda)}$, $\tilde{d}_1(\omega) = r^{(1, \lambda)}$, $\tilde{d}_2(\omega) = \mathrm{diag}(0, 1)$.

Если $\omega \in \Omega_{11}$, то пусть $s(\omega)$ как для $\omega \in \Omega_{12}$. Тогда

$$\lambda\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = s(\omega)(\lambda\mathrm{diag}(1, 0))s(\omega)\tilde{r}(\omega).$$

Матрица проектора $s(\omega)\tilde{r}(\omega)s(\omega) = r^{(\delta, t)}$ с некоторыми $\delta \in \mathbf{C}$ с $|\delta| = 1$ и $0 \le t \le 1$ (см. формулу (1)). Составим уравнение

$$\lambda\mathrm{diag}(1, 0)r^{(\delta, t)} = \mathrm{diag}(1, 0) \cdot (\tilde{a}(\omega) + \tilde{b}(\omega)),$$

где $\tilde{a}(\omega) = r^{(\delta, \alpha)}$, $\tilde{b}(\omega) = r^{(-\delta, \beta)}$. Система

$$\alpha + \beta = \lambda t, \quad f(\alpha) - f(\beta) = \lambda f(t)$$

имеет единственное решение $(\alpha, \beta) \in (0, \lambda t) \times (0, \lambda t)$, непрерывным образом зависящее от параметра $t = (s(\omega)\tilde{r}(\omega)s(\omega))_{11}$. Итак, для $\omega \in \Omega_{11}$ можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = \tilde{p}(\omega)$, $\tilde{d}_1(\omega) = s(\omega)\tilde{a}(\omega)s(\omega)$, $\tilde{d}_2(\omega) = s(\omega)\tilde{b}(\omega)s(\omega)$.

С учетом (3) каждое слагаемое вида λpr из (2) представляется в виде конечной суммы попарных произведений проекторов. Тем самым $x = \sum p_m a_m$, где $p_m a_m \in B(H)^{\mathrm{pr}}$.

Пусть теперь $2 \le \dim H < \infty$. Леммы 4–7 в силе. Лемма 3 теряет силу (см. лемму 1 с $\tau = tr$). Справедлива

Л е м м а 8. Каждый оператор $x \in B(H)$ представляется в виде конечной суммы попарных произведений идемпотентов, причем в каждом слагаемом один из сомножителей (левый или правый) можно выбрать проектором.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 8. Пусть сперва $\dim H = n$, n четно. Построим по матрице $\{x_{ts}\}_{t, s = 1}^{n}$ оператора $x \in B(H)$ (относительно некоторого ортонормированного базиса) прямую сумму $\mathrm{diag}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n/2})$, образованную блоками

$$\hat{x}_j = \begin{pmatrix} x_{2j-1, 2j-1} & x_{2j-1, 2j-1} \\ 1 - x_{2j, 2j} & x_{2j, 2j} \end{pmatrix}, \quad 1 \le j \le \frac{n}{2}, \qquad (4)$$

и сопоставим ее оператору $u \in B(H)$. Матрица $\{v_{ts}\}_{t, s = 1}^{n}$ оператора $v = x - u$ имеет нулевую диагональ. Введем операторы $v^{(l, 1)}$ и $v^{(l, 2)}$, полагая

$$v_{ts}^{(l, 1)} = \begin{cases} v_{ts}, & \text{если } t = l \text{ и } s = l, \ldots, n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$v_{ts}^{(l, 2)} = \begin{cases} v_{ts}, & \text{если } s = l \text{ и } t = l, \ldots, n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $l = 1, 2, \ldots, n-1$. Имеем $v = \sum_{l=1}^{n-1}(v^{(l, 1)} + v^{(l, 2)})$.

Положим $p_l = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots 1}_{l\,\text{раз}}, 0, \ldots 0)$ и $q^{(l, 1)} = p_l + v^{(l, 1)}$, $q^{(l, 2)} = p_l + v^{(l, 2)}$; тогда $q^{(l, 1)}$, $q^{(l, 1)} \in B(H)^{\mathrm{id}}$ и $v^{(l, 1)} = q^{(l, 1)}p_l^{\perp}$, $v^{(l, 1)} = p_l^{\perp}q^{(l, 2)}$ для $l = 1, 2, \ldots, n-1$. Итак, v есть сумма не более чем $2n-2$ попарных произведений идемпотентов и проекторов. Пусть

$$q_j = \begin{pmatrix} 0 & 2x_{2j-1, 2j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 - 2x_{2j, 2j} & 1 \end{pmatrix};$$

тогда $q_j, h_j \in M_2(\mathbf{C})^{\mathrm{id}}$ и $\hat{x}_j = q_j r^{(1, 1/2)} + h_j r^{(-1, 1/2)}$ для всех $1 \le j \le \frac{n}{2}$. Прямые суммы

$$q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_{n/2}), \quad h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_{n/2}),$$

$$p = \mathrm{diag}(\underbrace{r^{(1, 1/2)}, \ldots, r^{(1, 1/2)}}_{\frac{n}{2}\text{раз}}),$$

$$\mathrm{diag}(\underbrace{r^{(-1, 1/2)}, \ldots, r^{(-1, 1/2)}}_{\frac{n}{2}\text{раз}}) = p^{\perp},$$

дают $u = qp + hp^{\perp}$, где $q, h \in B(H)^{\mathrm{id}}$ и $p \in B(H)^{\mathrm{pr}}$.

Итак, оператор x есть сумма не более чем $2n$ попарных произведений идемпотентов и проекторов.

Если $\dim H = n$, n нечетно, то повторяем предыдущие рассуждения, рассматривая вместо оператора u сумму двух операторов $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, где матрица оператора $u^{(1)}$ есть $\mathrm{diag}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{(n-1)/2}, 0)$, а

$$u_{ts}^{(2)} = \begin{cases} x_{nn}, & \text{если } t = s = n, \\ 1 - x_{nn}, & \text{если } t = n \text{ и } s = n-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т.е. оператору $u^{(2)}$ соответствует матрица $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \hat{x}_{(n+1)/2})$ с единственным блоком $\hat{x}_{(n+1)/2}$ вида (4). Итак, оператор x представляется в виде суммы не более чем $2n + 2$, попарных произведений идемпотентов и проекторов. Лемма 8 доказана.

Представим оператор $x \in B(H)$ по лемме 8, в полученной сумме каждый идемпотент представим по лемме 4 и в новом представлении применим лемму 5. Имеем

$$x = \sum \lambda_k p_k r_k s_k, \quad \lambda_k > 0, \quad p_k, r_k, s_k \in B(H)^{\mathrm{pr}}.$$

Повторяя рассуждения для $\dim H = \infty$ с помощью лемм 6, 7, каждое слагаемое вида λpr представим в виде конечной суммы попарных произведений проекторов. Тем самым $x = \sum p_m a_m b_m$, где p_m, a_m, $b_m \in B(H)^{\mathrm{pr}}$. Из леммы 1 следует, что наименьшая верхняя граница числа сомножителей равна 3.

С л е д с т в и е 1. *Если* $\dim H = \infty$, *то на алгебре* $B(H)$ *нет нетривиальных конечных следов.*

Йорданово произведение $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ на $B(H)^{\mathrm{sa}}$ коммутативно и билинейно, но не ассоциативно. Йорданово тройное произведение $\{xyz\} = \frac{1}{2}(xyz + zyx)$ на $B(H)^{\mathrm{sa}}$ выражается через йорданово произведение, см. [12, формула (2.20)].

С л е д с т в и е 2. *Каждый оператор* $x \in B(H)^{\mathrm{sa}}$ *представляется в виде конечной суммы* $x = +\sum x_k$, *где каждое* x_k *есть йорданово произведение не более чем двух проекторов при* $\dim H = \infty$ *и йорданово тройное произведение не более, чем трех проекторов при* $2 \le \dim H < \infty$.

С л е д с т в и е 3. *Если* $\dim H \ge 2$, *то множества* $B(H)$ *и* $B(H)^{\mathrm{pr}}$ *равномощны.*

С л е д с т в и е 4. *Если конечномерная С*-алгебра А не содержит прямых абелевых слагаемых, то*

$$A = \{\sum p_k r_k q_k \colon p_k, r_k, q_k \in A^{\mathrm{pr}}\},$$

наименьшая верхняя граница числа сомножителей равна 3.

С л е д с т в и е 5. *Если А* – UHF-*алгебра и* $\dim_{\mathbf{C}} A > 1$, *то множество*

$$\{\sum p_k r_k q_k \colon p_k, r_k q_k \in A^{\mathrm{pr}}\}$$

плотно в А. При этом наименьшая верхняя граница числа сомножителей равна 3.

З а м е ч а н и е. Лемма 8 обобщается на широкий класс $*$-колец $(n \times n)$-матриц над $*$-кольцами.

Автор благодарен А.Н. Шерстневу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01–01–00129) и научной программы “Университеты России – фундаментальные исследования” (грант УР.04.01.061).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dixmier J.* // Rev. Sci. 1948. V. 86. P. 387–399.
2. *Broise M.* // J. math. pures et appl. 1967. V. 46. P. 299–312.
3. *Fillmore P.A.,Topping D.M.* // Duke Math. J. 1967. V. 34. 2. P. 333–336.
4. *Fillmore P.A.* // Acta. sci. math. 1967. V. 28. P. 285–288.
5. *Pearcy C., Topping D.M.* // Mich. Math. J. 1967. V. 14. P. 453–465.
6. *Matsumoto K.* // Math. Jpn. 1984. V. 29. 2. P. 291–294.
7. *Holland S.S., Jr.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123. 11. P. 3361–3362.
8. *FujiiJ.* I., Furuta T. // Math. Jpn. 1980. V. 25. 1. P. 143–145.
9. *Fillmore P.A.* // J. Funct. Anal. 1969. V. 4. 1. P. 146–152.
10. *Sakai S.* C*-algebras and W*-Algebras. N.Y.; Heidelberg; B.: Springer, 1971. 256 p.
11. *Takesaki M.* Theory of Operator Algebras. N. Y.; Heidelberg; B.: Springer, 1979.V. 1. 415 p.
12. *Hance-Olsen H., Stormer E.* Jordan Operator Algebras. Boston; L.; Melbourne: Pitman, 1984. 183 p.