Математические заметки

Том 89 выпуск 4 апрель 2011

УДК 517.986

Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. II

А. М. Бикчентаев

Получены новые необходимые и достаточные условия коммутирования проекторов в терминах операторных неравенств. Эти неравенства применены для характеризации следа на алгебрах фон Неймана в классе всех положительных нормальных функционалов.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Создание теории некоммутативного интегрирования было стимулировано задачами математического обоснования квантовой механики. Основополагающими трудами явился цикл обширных работ Дж. фон Неймана по алгебрам операторов (30–40-е гг. XX в.), часть из которых выполнена в соавторстве с Ф. Дж. Мюрреем. Насыщенные новыми плодотворными идеями, эти работы составили основу общей теории интегрирования в алгебрах операторов. Оформление общей теории интегрирования относительно унитарно-инвариантных мер в полуконечных алгебрах фон Неймана было осуществлено И. Сигалом в 1953 г. Теория Сигала охватила теорию интегрирования относительно нормального следа. Он также осуществил вложение классической теории интегрирования на пространстве с мерой в построенную им схему.

В связи с прогрессом в теории алгебр фон Неймана и расширением сферы ее приложений встала проблема распространения теории интегрирования Сигала на нормальные веса в произвольных алгебрах фон Неймана. Решение этой проблемы (70–80-е гг. XX в.) опиралось на фундаментальные результаты общей теории алгебр фон Неймана (модулярная теория Томиты–Такесаки (1970 г.), характеризация нормальных весов У. Хаагерупом (1975 г.)), см., например, [1].

Исследования по задачам характеризации следов в классе нормальных весов или функционалов на алгебрах фон Неймана начались в 70-е гг. XX в.

Настоящая заметка является продолжением работ [2], [3], обозначений и терминологии которых мы придерживаемся. В [2] получен критерий перестановочности пары проекторов в терминах их верхней (нижней) грани в решетке всех проекторов алгебры и показано, что каждый косоэрмитов элемент собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ представляется в виде конечной суммы коммутаторов проекторов из $\mathscr{M}$. Невозможность таких представлений для конечной алгебры фон

Неймана связана с существованием нетривиального конечного следа на этой алгебре. В конечномерном случае в терминах конечных сумм коммутаторов проекторов описано множество операторов с нулевым каноническим следом tr.

В [3] получена характеризация следа на алгебрах фон Неймана в терминах коммутирования произведений проекторов под знаком веса.

В данной работе установлены новые критерии перестановочности проекторов в терминах операторных неравенств. Получены характеризации следа в классе всех положительных нормальных функционалов на алгебре фон Неймана.

Сведения о других характеризациях следа можно почерпнуть в [3]–[9], см. также библиографию в них.

2. Обозначения, некоторые определения и предварительные сведения. Пусть $\mathscr{H}$ – гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{e}$ – тождественный оператор в $\mathscr{H}$. Через $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ обозначим $*$-алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. *Коммутантом* множества $X\subset\mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется множество

$$X'=\{y\in\mathscr{B}(\mathscr{H}) : xy=yx,\, x^*y=yx^*,\, x\in X\}.$$

$*$-Подалгебра $\mathscr{M}$ алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *алгеброй фон Неймана*, действующей в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, если $\mathscr{M}=\mathscr{M}''$. Если $X\subset\mathscr{B}(\mathscr{H})$, то X' – алгебра фон Неймана, а X'' – наименьшая алгебра фон Неймана, содержащая X. Для алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов в $\mathscr{H}$ через $\mathscr{M}^{\mathrm{h}}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{u}}$, $\mathscr{M}^{+}$, $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$ и $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ обозначим ее эрмитову, унитарную, положительную части, центр и решетку проекторов соответственно. Пусть $s_r(x)$ – носитель элемента $x\in\mathscr{M}^{\mathrm{h}}$. Если оператор z принадлежит $\mathscr{M}$, то $|z|=(z^*z)^{1/2}\in\mathscr{M}^{+}$. Для $p,q\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ пишем $p\sim q$, если $p=u^*u$ и $q=uu^*$ с некоторым $u\in\mathscr{M}$; пусть $p^{\perp}=\mathfrak{e}-p$, $\mathscr{M}_p=\{px \mid p\mathscr{H} : x\in\mathscr{M}\}$ – редуцированная алгебра фон Неймана.

Весом на $\mathscr{M}$ называется отображение $\varphi\colon\mathscr{M}^{+}\to[0,+\infty]$ такое, что

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad \varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x),\qquad x,y\in\mathscr{M}^{+},\quad \lambda\geqslant 0,\qquad 0\cdot\infty\equiv 0.$$

Вес φ на $\mathscr{M}$ называется *нормальным*, если $\varphi(x)=\sup\varphi(x_i)$, $x_i\nearrow x$, $x_i,x\in\mathscr{M}^{+}$; *конечным*, если $\varphi(\mathfrak{e})<+\infty$; *следом*, если $\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)$, $x\in\mathscr{M}$. Вес φ корректно продолжается по линейности до функционала на $\operatorname{Lin}\{x\in\mathscr{M}^{+}\colon\varphi(x)<+\infty\}$. Такое продолжение позволяет отождествлять конечные веса с положительными функционалами на $\mathscr{M}$. Пусть $\mathscr{M}_*^{+}$ – конус положительных нормальных функционалов на $\mathscr{M}$. Если $\varphi\in\mathscr{M}_*^{+}$ является следом, $z\in\mathscr{M}$ и числа $\alpha,\beta>1$, $1/\alpha+1/\beta=1$, то $|\varphi(z)|\leqslant\varphi(|z|)$ и выполняется

– неравенство Гёльдера [10; гл. IX, теорема 2.13], [11; теорема 5]

$$\varphi(|xy|)\leqslant\varphi(x^{\alpha})^{1/\alpha}\varphi(y^{\beta})^{1/\beta}\qquad\text{для всех}\quad x,y\in\mathscr{M}^{+};$$

– неравенство Коши–Буняковского–Шварца [12; теорема 4.21]

$$\varphi(|xy|^{1/2})\leqslant\varphi(x)^{1/2}\varphi(y)^{1/2}\qquad\text{для всех}\quad x,y\in\mathscr{M}^{+};$$

– неравенство Голдена–Томпсона [11; теорема 4]

$$\varphi(e^{x+y})\leqslant\varphi(e^{x/2}e^{y}e^{x/2})\qquad\text{для всех}\quad x,y\in\mathscr{M}^{\mathrm{h}}.$$

Пусть (e_{ij}) – канонический набор матричных единиц $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Мы отождествляем алгебру $\mathbb{M}_n(\mathscr{M})$ $(n \times n)$-матриц с элементами из $\mathscr{M}$ с тензорным произведением $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{M}$, отождествляя матрицу $[a_{ij}]$ с $\sum_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes a_{ij}$ в обычном смысле. Пусть $\mathscr{N}$ – алгебра фон Неймана с единицей $e_{\mathscr{N}}$ и $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Определим проектор $r^{(\delta,t)}$ в $\mathbb{M}_2(\mathscr{N})$, положив

$$r^{(\delta,t)} = \begin{pmatrix} t \cdot e_{\mathscr{N}} & \delta t^{1/2}(1-t)^{1/2} \cdot e_{\mathscr{N}} \\ \overline{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2} \cdot e_{\mathscr{N}} & (1-t) \cdot e_{\mathscr{N}} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

{eq1}

Лемма 1 [13; гл. 5, п. (ii) теоремы 1.41]. *Если алгебра фон Неймана $\mathscr{N}$ порождена двумя проекторами $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то существует единственный проектор $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{N})$ такой, что алгебра $\mathscr{N}_z$ имеет тип I_2 и $\mathscr{N}_{z^\perp}$ абелева, причем* $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{N}_{z^\perp} \leqslant 4$.

Лемма 2 [14; теорема 2.3.3]. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{N}$ имеет тип I_n (n – кардинальное число). Тогда алгебра $\mathscr{N}$ $*$-изоморфна тензорному произведению $\mathscr{Z}(\mathscr{N}) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathscr{B}(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ – гильбертово пространство с* $\dim \mathscr{K} = n$.

Пусть $\varPhi$ – класс всех измеримых вогнутых функций $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ с $f(0) = 0$, строго вогнутых на отрезке $[0, 1]$.

3. О перестановочности проекторов. Геометрический смысл перестановочности проекторов p и q состоит в том, что подпространства $p\mathscr{H} \ominus (p\mathscr{H} \cap q\mathscr{H})$ и $q\mathscr{H} \ominus (p\mathscr{H} \cap q\mathscr{H})$ ортогональны; при этом $pq = p \wedge q$.

Теорема 1. *Для $p, q \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}$ следующие условия эквивалентны*:
(i) $e^{p+q} \leqslant e^{p/2} e^q e^{p/2}$;
(ii) $e^{p/2} e^q e^{p/2} \leqslant e^{p+q}$;
(iii) $e^{pqp} \leqslant e^q$;
(iv) $\operatorname{Re} pq \leqslant |pq|$;
(v) $f(p+q) \leqslant f(p) + f(q)$ *для некоторой функции* $f \in \varPhi$;
(vi) $pq = qp$.

Доказательство. (vi) $\Rightarrow$ (i)–(v). Абелева (т.е. коммутативная) алгебра фон Неймана $\{p, q\}''$ $*$-изоморфна алгебре $L_\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ на некотором локализуемом пространстве с мерой $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Существуют $A, B \in \mathfrak{A}$ такие, что $p = \chi_A$, $q = \chi_B$ и неравенства (i), (ii) и (iv) для индикаторов превращаются в равенства. Неравенство (iii) приобретает вид $e^{\chi_{A \cap B}} \leqslant e^{\chi_B}$. Неравенство $f(\chi_A + \chi_B) \leqslant f(\chi_A) + f(\chi_B)$ выполнено в силу полуаддитивности измеримой вогнутой функции $f(t)$, $t \geqslant 0$, см. [15; гл. VII, теорема 7.2.5].

Для проверки обратных импликаций заметим, что $e^{p/2} = e^{1/2} p + p^\perp$, $e^q = eq + q^\perp$. Свяжем с p и q порожденную ими алгебру фон Неймана $\mathscr{N} = \{p, q\}''$. По лемме 1 существует единственный проектор $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{N})$ такой, что алгебра $\mathscr{N}_z$ имеет тип I_2 и алгебра $\mathscr{N}_{z^\perp}$ абелева. Ясно, что проекторы $pz^\perp$ и $qz^\perp$ коммутируют. Из теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитальной C^*-алгебры (см., например, [13; гл. 3, теорема 1.18]) следует, что алгебра $\mathscr{Z}(\mathscr{N}_z)$ $*$-изоморфна C^*-алгебре $C(\Omega)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на стоуновском пространстве Ω всех характеров алгебры $\mathscr{Z}(\mathscr{N}_z)$. Теперь из леммы 2 следует, что алгебра $\mathscr{N}_z$ $*$-изоморфна матричной алгебре $\mathbb{M}_2(C(\Omega))$.

Для $\widetilde{r} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ определим области постоянства ранга (или, что то же самое, области постоянства канонического следа tr)

$$\Omega_j(\widetilde{r}) = \{\omega \in \Omega \mid \widetilde{r}_{11}(\omega) + \widetilde{r}_{22}(\omega) = j\}, \qquad j \in \{0, 1, 2\}.$$

Множества $\Omega_j(\widetilde{r})$ замкнуты (как прообразы замкнутых множеств $\{j\} \subset \mathbb{C}$ при непрерывном отображении) и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω.

Проекторы pz и qz отождествляются с $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ соответственно. Пусть

$$\Omega_{ij} = \Omega_i(\widetilde{p}) \cap \Omega_j(\widetilde{q}), \qquad i, j \in \{0, 1, 2\}.$$

Все девять множеств Ω_{ij} открыто-замкнуты и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω. Если $\omega \in \Omega \setminus \Omega_{11}$, то $\widetilde{p}\widetilde{q}(\omega) = \widetilde{q}\widetilde{p}(\omega)$.

Лемма 3 [16; следствие 3.3]. *Для каждого $x \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{h}}$ существует такой $u \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{u}}$, что матрица $u^*xu(\omega)$ диагональна для всех $\omega \in \Omega$.*

Из леммы 3 вытекает, что существует такой $u \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{u}}$ и такое замкнутое подмножество $\Omega_1'(\widetilde{p}) \subset \Omega_1(\widetilde{p})$, что

$$\begin{aligned} u^*(\omega)\widetilde{p}(\omega)u(\omega) &= \operatorname{diag}(1, 0) \qquad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega_1'(\widetilde{p}),\\ u^*(\omega)\widetilde{p}(\omega)u(\omega) &= \operatorname{diag}(0, 1) \qquad \text{для всех} \quad \omega \in \Omega_1(\widetilde{p}) \setminus \Omega_1'(\widetilde{p}). \end{aligned}$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $p = \operatorname{diag}(1, 0)$, $q = r^{(\delta,t)}$, $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, см. (1). Найдем спектральное представление для $p + q$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 + t - \lambda & \delta t^{1/2}(1-t)^{1/2} \\ \overline{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2} & 1 - t - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - t = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm t^{1/2}$. Следовательно,

$$p + q = (1 + t^{1/2})r^{(w,a)} + (1 - t^{1/2})r^{(-w,1-a)},$$

где $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$ и $0 \leqslant a \leqslant 1$. Из равенств

$$1 + t = (1 + t^{1/2})a + (1 - t^{1/2})(1 - a), \qquad \delta f(t) = 2t^{1/2} w f(a)$$

последовательно находим $a = (1 + t^{1/2})/2$, $w = \delta$. Поэтому

$$\begin{aligned} e^{p+q} &= e^{1+\sqrt{t}} r^{(\delta,(1+\sqrt{t})/2)} + e^{1-\sqrt{t}} r^{(-\delta,(1-\sqrt{t})/2)} \\ &= \begin{pmatrix} e^{1+\sqrt{t}}\dfrac{1+\sqrt{t}}{2} + e^{1-\sqrt{t}}\dfrac{1-\sqrt{t}}{2} & * \\ * & e^{1+\sqrt{t}}\dfrac{1-\sqrt{t}}{2} + e^{1-\sqrt{t}}\dfrac{1+\sqrt{t}}{2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

здесь и далее символ “$*$” обозначает элементы матрицы, значения которых нам не понадобятся. Имеем $e^{p/2} = \operatorname{diag}(e^{1/2}, 1)$ и

$$e^{p/2}e^q e^{p/2} = \begin{pmatrix} e(et - t + 1) & * \\ * & e(1 - t) + t \end{pmatrix}.$$

(i) $\Rightarrow$ (vi). Неравенство

$$e^{1+\sqrt{t}}\frac{1-\sqrt{t}}{2}+e^{1-\sqrt{t}}\frac{1+\sqrt{t}}{2}\leqslant e(1-t)+t \tag{2}$$

{eq2}

обращается в равенство при $t\in\{0,1\}$. Разделив обе части неравенства (2) на e и заменив t на t^2, получаем

$$e^{t}\frac{1-t}{2}+e^{-t}\frac{1+t}{2}\leqslant 1-t^2+e^{-1}t^2,$$

т.е. $\operatorname{ch}(t)-t\operatorname{sh}(t)\leqslant 1-t^2+e^{-1}t^2$. Покажем, что при $0<t<1$ выполнено противоположное к (2) неравенство

$$0<\operatorname{ch}(t)-t\operatorname{sh}(t)-1+t^2-e^{-1}t^2\equiv h(t).$$

Заменив $\operatorname{ch}(t)$ и $\operatorname{sh}(t)$ соответствующими рядами по степеням t, имеем

$$h(t)=(2^{-1}-e^{-1})t^2+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k-1)!}\right)t^{2k}=(2^{-1}-e^{-1})t^2+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1-2k}{(2k)!}t^{2k}.$$

Разделив при $0<t<1$ на t^2, получим

$$h(t)>0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(t)\equiv\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k)!}t^{2k-2}<2^{-1}-e^{-1}.$$

Имеем

$$g(1)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)!}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}=-1+\operatorname{sh}(1)-(-1-2^{-1}+\operatorname{ch}(1))=2^{-1}-e^{-1}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (vi). Неравенство

$$e^2t-et+e\leqslant e^{1+\sqrt{t}}\frac{1+\sqrt{t}}{2}+e^{1-\sqrt{t}}\frac{1-\sqrt{t}}{2} \tag{3}$$

{eq3}

обращается в равенство при $t\in\{0,1\}$. Разделив обе части неравенства (3) на e и заменив t на t^2, получим

$$1+(e-1)t^2\leqslant e^{t}\frac{1+t}{2}+e^{-t}\frac{1-t}{2},$$

т.е. $1+(e-1)t^2\leqslant\operatorname{ch}(t)+t\operatorname{sh}(t)$. Покажем, что при $0<t<1$ выполнено противоположное к (3) неравенство

$$0<1+(e-1)t^2-\operatorname{ch}(t)-t\operatorname{sh}(t)\equiv h_1(t).$$

Заменив $\operatorname{ch}(t)$ и $\operatorname{sh}(t)$ соответствующими рядами по степеням t, имеем

$$h_1(t)=\left(e-\frac{5}{2}\right)t^2-\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k)!}+\frac{1}{(2k-1)!}\right)t^{2k}=\left(e-\frac{5}{2}\right)t^2-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k+1}{(2k)!}t^{2k}.$$

Разделив при $0 < t < 1$ на t^2, получаем

$$h_1(t) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad g_1(t) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k+1}{(2k)!} t^{2k-2} < e - \frac{5}{2}.$$

Имеем

$$g_1(1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = -1 + \mathrm{sh}(1) - 1 - \frac{1}{2} + \mathrm{ch}(1) = e - \frac{5}{2}.$$

(iii) $\Rightarrow$ (vi). Имеем $pqp = tp$, поэтому $e^{pqp} = e^{tp} = \mathrm{diag}(e^t, 1)$,

$$e^q = eq + q^{\perp} = \begin{pmatrix} 1 + (e-1)t & (e-1)\delta t^{1/2}(1-t)^{1/2} \\ (e-1)\overline{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2} & e - (e-1)t \end{pmatrix}.$$

При $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем $e^t \leqslant 1 + (e-1)t$ (отрезок $y(t) = 1 + (e-1)t$ является хордой к графику выпуклой функции $x(t) = e^t$ в точках с абсциссами $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$) и $1 \leqslant e - (e-1)t$. Поэтому неравенство (iii) выполнено тогда и только тогда, когда

$$(1 + (e-1)t - e^t)(e - 1 - (e-1)t) - (e-1)^2 t(1-t) \geqslant 0.$$

Разделив обе части этого неравенства на $e - 1$, получаем

$$(1 + (e-1)t - e^t)(1-t) - (e-1)t(1-t) \geqslant 0.$$

Если $t = 1$, то $p = q = pq = qp$; при $0 \leqslant t < 1$ разделив обе части последнего неравенства на $1 - t$, получим $1 - e^t \geqslant 0$. Следовательно, $t = 0$ и $q = p^{\perp}$, т.е. $pq = qp = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (vi). Имеем $qpq = tq$, поэтому $|pq| = t^{1/2}q$ и

$$\mathrm{Re}\, pq = \begin{pmatrix} t & \delta t^{1/2}(1-t)^{1/2}/2 \\ \overline{\delta} t^{1/2}(1-t)^{1/2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad |pq| - \mathrm{Re}\, pq = \begin{pmatrix} t^{3/2} - t & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Тогда $t^{3/2} - t \geqslant 0$ и $t \in \{0, 1\}$, таким образом, $pq = qp$.

(v) $\Rightarrow$ (vi). Пусть проекторы p, q, r одномерны, $p + q = \lambda r + (2-\lambda) r^{\perp}$ – спектральное представление, $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Тогда

$$f(p+q) = f(\lambda) r + f(2-\lambda) r^{\perp}, \qquad f(p) + f(q) = f(1)(p+q).$$

По предположению

$$f(\lambda) r + f(2-\lambda) r^{\perp} \leqslant f(1)(\lambda r + (2-\lambda) r^{\perp}). \tag{4}$$

Пусть $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Умножив обе части (4) слева и справа на r, получаем неравенство $f(\lambda) \leqslant f(1)\lambda$. Отрезок $y(\lambda) = f(1)\lambda$ является хордой к графику строго вогнутой функции $f(\lambda)$ в точках с абсциссами $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Поэтому неравенство $f(\lambda) \leqslant f(1)\lambda$ выполнено только при $\lambda \in \{0, 1\}$, т.е. при $p = q$ или $p = q^{\perp}$.

Пусть $\lambda \in (1, 2]$. Умножив обе части неравенства (4) слева и справа на $r^{\perp}$, получаем $f(2-\lambda) \leqslant f(1)(2-\lambda)$. Заменив здесь $2 - \lambda$ на t, имеем $f(t) \leqslant f(1)t$, $0 \leqslant t < 1$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем $t = 0$, т.е. $\lambda = 2$ и $p = q$. Теорема доказана.

4. Характеризации следа на алгебре фон Неймана.

Теорема 2. *Для функционала $\varphi \in \mathscr{M}_*^+$ следующие условия эквивалентны:*

(i) *для некоторых чисел $\alpha, \beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $\alpha \neq 2$, для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство $|\varphi(pq)| \leqslant \varphi(p)^{1/\alpha}\varphi(q)^{1/\beta}$;*

(ii) *для некоторых чисел $\alpha, \beta > 1$, $1/\alpha + 1/\beta = 1$, $\alpha \neq 2$, для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство Гёльдера $\varphi(|pq|) \leqslant \varphi(p)^{1/\alpha}\varphi(q)^{1/\beta}$;*

(iii) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство Коши–Буняковского–Шварца $\varphi(|pq|^{1/2}) \leqslant \varphi(p)^{1/2}\varphi(q)^{1/2}$;*

(iv) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство Голдена–Томпсона $\varphi(e^{p+q}) \leqslant \varphi(e^{p/2}e^{q}e^{p/2})$;*

(v) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(e^{qpq}) \leqslant \varphi(e^{p})$;*

(vi) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(\operatorname{Re} pq) \geqslant 0$;*

(vii) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(\operatorname{Re} pq) \leqslant \varphi(|pq|)$;*

(viii) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(\operatorname{Im} pq) \geqslant 0$;*

(ix) *для любых $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ выполняется неравенство $\varphi(f(p+q)) \leqslant \varphi(f(p)) + \varphi(f(q))$, где $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – вогнутая функция с $f(0) = 0$, дифференцируемая в точке $t = 1$ с $f'(1) \neq f(1)$;*

(x) *φ является следом.*

Доказательство. Импликации (x) $\Rightarrow$ (i)–(iv) следуют из приведенных в п. 2 неравенств Гёльдера, Коши–Буняковского–Шварца и Голдена–Томпсона, соответственно.

(x) $\Rightarrow$ (v). Имеем сходящиеся по норме ряды

$$e^{p} = \mathfrak{e} + p + \frac{p}{2!} + \frac{p}{3!} + \cdots + \frac{p}{n!} + \cdots = ep + p^{\perp},$$
$$e^{qpq} = \mathfrak{e} + qpq + \frac{(qpq)^2}{2!} + \frac{(qpq)^3}{3!} + \cdots + \frac{(qpq)^n}{n!} + \cdots .$$

Поскольку $(qpq)^n \leqslant qpq$, справедлива оценка $\varphi((qpq)^n) \leqslant \varphi(qpq) = \varphi(pqp) \leqslant \varphi(p)$, $n \in \mathbb{N}$. Остается учесть, что функционал φ непрерывен по норме.

(x) $\Rightarrow$ (vi). Известно [9] более общее неравенство

$$\varphi(\operatorname{Re} xy) = \operatorname{Re}\varphi(xy) = \operatorname{Re}\varphi(x^{1/2}yx^{1/2}) = \varphi(x^{1/2}yx^{1/2}) \geqslant 0, \qquad x, y \in \mathscr{M}^+.$$

(x) $\Rightarrow$ (vii). Существует частичная изометрия $u \in \mathscr{M}$ такая, что $\operatorname{Re} pq \leqslant u|pq|u^*$ (см. [17]). Поэтому

$$\varphi(\operatorname{Re} pq) \leqslant \varphi(u|pq|u^*) = \varphi((|pq|^{1/2}u^*)^*|pq|^{1/2}u^*) = \varphi(|pq|^{1/2}u^*u|pq|^{1/2}) \leqslant \varphi(|pq|).$$

(x) $\Rightarrow$ (viii). Имеем $2\varphi(\operatorname{Im} pq) = i(\varphi(qp) - \varphi(pq)) = 0$.

(x) $\Rightarrow$ (ix). См., например, [18; теорема 4].

Ниже показывается, что аналогично тому, как было проделано в ряде других подобных случаев (см. [4] или [5]), доказательство обратных импликаций для произвольной алгебры фон Неймана сводится к случаю алгебры $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$.

Известно [4], что $\varphi \in \mathscr{M}_*^+$ является следом тогда и только тогда, когда $\varphi(p) = \varphi(q)$ для всех $p, q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $pq = 0$ и $p \sim q$ (см. также [5; лемма 2]). Пусть $*$-алгебра $\mathscr{N}$

в редуцированной алгебре $\mathscr{M}_{p+q}$ порождена частичной изометрией $v \in \mathscr{M}$, реализующей эквивалентность p и q. Тогда $\mathscr{N}$ $*$-изоморфна $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, а неравенства в (i)–(ix) остаются справедливыми для операторов из $\mathscr{N}$ и ограничения функционала $\varphi \mid \mathscr{N}$. Мы покажем, что такое ограничение является следовым функционалом на $\mathscr{N}$, поэтому $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Пусть функционал φ задается оператором плотности $s_\varphi = \operatorname{diag}(1/2 + s, 1/2 - s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1/2$, т.е. $\varphi(x) = \operatorname{tr}(x s_\varphi)$, $x \in \mathscr{N}$. Рассмотрим два проектора $p = r^{(1,1/2-\varepsilon)}$, $q = r^{(1,1/2+\varepsilon)}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/2$, и пусть $h = 1/4 - \varepsilon^2$.

(i) $\Rightarrow$ (x). Поскольку

$$pq = \begin{pmatrix} 2h & (1-2\varepsilon)h^{1/2} \\ (1+2\varepsilon)h^{1/2} & 2h \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi pq = \begin{pmatrix} (1+2s)h & * \\ * & (1-2s)h \end{pmatrix},$$

имеем $\varphi(pq) = 2h$. Пусть $\beta > \alpha > 1$. Имеем $\varphi(p) = 1/2 - 2s\varepsilon$, $\varphi(q) = 1/2 + 2s\varepsilon$. Неравенство $|\varphi(pq)| \leqslant \varphi(p)^{1/\alpha}\varphi(q)^{1/\beta}$ перепишется в виде

$$\frac{1}{2} - 2\varepsilon^2 \leqslant \left(\frac{1}{2} - 2s\varepsilon\right)^{1/\alpha}\left(\frac{1}{2} + 2s\varepsilon\right)^{1/\beta}.$$

Умножив обе части этого неравенства на $2 = 2^{1/\alpha}2^{1/\beta}$, получим

$$1 - 4\varepsilon^2 \leqslant (1 - 4s\varepsilon)^{1/\alpha}(1 + 4s\varepsilon)^{1/\beta}. \tag{5}$$ {eq5}

Формула Тейлора дает асимптотические равенства

$$(1 - 4s\varepsilon)^{1/\alpha} = 1 - \frac{4s}{\alpha}\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad (1 + 4s\varepsilon)^{1/\beta} = 1 + \frac{4s}{\beta}\varepsilon + o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0+$, и правая часть неравенства (5) равна

$$1 - \frac{4(\beta - \alpha)s}{\alpha\beta}\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0+.$$

Так как $s \geqslant 0$, (5) выполнено для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ только при $s = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (x), (iii) $\Rightarrow$ (x). Имеем $qpq = 4hq$, поэтому $|pq| = (qpq)^{1/2} = 2h^{1/2}q$, $|pq|^{1/2} = (4h)^{1/4}q$,

$$\varphi(|pq|) = h^{1/2}(1 + 4s\varepsilon), \qquad \varphi(|pq|^{1/2}) = (4h)^{1/4}\left(\frac{1}{2} + 2s\varepsilon\right).$$

Неравенства Гёльдера и Коши–Буняковского–Шварца имеют вид

$$1 - 4\varepsilon^2 \leqslant \left(\frac{1 - 4s\varepsilon}{1 + 4s\varepsilon}\right)^{2/\alpha}, \qquad 1 - 4\varepsilon^2 \leqslant (1 + 4s\varepsilon)^{-4} \tag{6}$$ {eq6}

соответственно. Формула Тейлора дает

$$\left(\frac{1 - 4s\varepsilon}{1 + 4s\varepsilon}\right)^{2/\alpha} = 1 - \frac{16}{\alpha}s\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad (1 + 4s\varepsilon)^{-4} = 1 - 16s\varepsilon + o(\varepsilon)$$

при $\varepsilon \to 0+$. Поэтому неравенства (6) выполнены для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ только при $s = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (x). Пусть $r = r^{(1,1/2)}$, тогда $p + q = (1 + 2h^{1/2})r + (1 - 2h^{1/2})r^{\perp}$ – спектральное представление. Легко видеть, что $e^{p+q} = e^{1+2\sqrt{h}}r + e^{1-2\sqrt{h}}r^{\perp}$,

$$e^{p/2}e^{q}e^{p/2} = e^{2}pqp + e^{3/2}(pqp^{\perp} + p^{\perp}qp) + e(pq^{\perp}p + p^{\perp}qp^{\perp}) \\ + e^{1/2}(pq^{\perp}p^{\perp} + p^{\perp}q^{\perp}p) + p^{\perp}q^{\perp}p^{\perp},$$

$$pqp = \begin{pmatrix} 2h(1-2\varepsilon) & * \\ * & 2h(1+2\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad pqp^{\perp} = \begin{pmatrix} 4h\varepsilon & * \\ * & -4h\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$pq^{\perp}p = \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 & * \\ * & 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 \end{pmatrix}, \qquad pq^{\perp}p^{\perp} = \begin{pmatrix} 4\varepsilon^3 - \varepsilon & * \\ * & \varepsilon - 4\varepsilon^3 \end{pmatrix},$$

$$p^{\perp}qp^{\perp} = \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 & * \\ * & 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 \end{pmatrix}, \qquad p^{\perp}q^{\perp}p^{\perp} = \begin{pmatrix} 2h(1+2\varepsilon) & * \\ * & 2h(1-2\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Неравенство Голдена–Томпсона перепишем в виде

$$e^{1+2\sqrt{h}} + e^{1-2\sqrt{h}} \leqslant 4e^{2}h(1 - 4s\varepsilon) + 32e^{3/2}hs\varepsilon + 8e\varepsilon^{2} - 32e^{1/2}hs\varepsilon + 4h(1 + 4s\varepsilon).$$

Формула Тейлора при $\varepsilon \to 0+$ дает

$$e^{1-2\sqrt{h}} = e^{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}} = 1 - \varepsilon^{2} + o(\varepsilon^{2}) = 1 + o(\varepsilon),$$
$$e^{1+2\sqrt{h}} = e^{2}\cdot e^{\sqrt{1-4\varepsilon^2}-1} = e^{2}(1 + 2\varepsilon^{2} + o(\varepsilon^{2})) = e^{2} + o(\varepsilon).$$

Имеем

$$a \equiv -2e^{2} + 4e^{3/2} - 4e^{1/2} + 2 = 4e\left(2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sh}(1)\right)$$
$$= 4e\left(2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 8e\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < 0,$$

и неравенство $0 \leqslant as\varepsilon + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \to 0+$, выполнено для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ только при $s = 0$.

(v) $\Rightarrow$ (x). Имеем $qpq = 4hq$ и $e^{qpq} = e^{4h}q + q^{\perp}$. Неравенство $\varphi(e^{qpq}) \leqslant \varphi(e^{p})$ с учетом формулы Тейлора перепишется в виде

$$es\varepsilon \leqslant 2s\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0+.$$

Оно выполнено для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ только при $s = 0$.

(vi) $\Rightarrow$ (x). Положим $p = r^{(1,1/2-\varepsilon)}$, $q = r^{(-1,1/2-\varepsilon)}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/2$. Тогда

$$pq = \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2 - \varepsilon & 2\varepsilon h^{1/2} \\ -2\varepsilon h^{1/2} & 2\varepsilon^2 + \varepsilon \end{pmatrix},$$

$\operatorname{Re} pq = \operatorname{diag}(2\varepsilon^2 - \varepsilon, 2\varepsilon^2 + \varepsilon)$, и если $s \neq 0$, то $\varphi(\operatorname{Re} pq) = 2\varepsilon(\varepsilon - s) < 0$ при $0 < \varepsilon < s$.

(vii) $\Rightarrow$ (x). Положим $p = r^{(1,1/2+\varepsilon)}$, $q = r^{(1,1/2-\varepsilon)}$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1/2$. Тогда

$$\operatorname{Re} pq = 2\begin{pmatrix} h & h^{1/2} \\ h^{1/2} & h \end{pmatrix},$$

$qpq = 4hq$, поэтому $|pq| = 2h^{1/2}q$. Неравенство $\varphi(\operatorname{Re} pq) \leqslant \varphi(|pq|)$ перепишется в виде

$$1 - 4\varepsilon^2 \leqslant 1 - 8s\varepsilon + 16s^2\varepsilon^2.$$

Оно выполнено для всех $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$ только при $s = 0$.

(viii) $\Rightarrow$ (x). Положим $p = r^{(-i,1/2)}$, $q = r^{(1,1/2)}$. Тогда $\operatorname{Im} pq = \operatorname{diag}(-1/4, 1/4)$ и $2\varphi(\operatorname{Im} pq) = -s \geqslant 0$, т.е. $s = 0$.

(ix) $\Rightarrow$ (x). Пусть $r = \operatorname{diag}(1,0)$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 2$. Существуют одномерные проекторы p, q такие, что $p + q = \lambda r + (2-\lambda)r^{\perp}$ – спектральное представление. Неравенство (ix) принимает вид

$$f(\lambda)\biggl(\frac{1}{2} + s\biggr) + f(2-\lambda)\biggl(\frac{1}{2} - s\biggr) \leqslant f(1)\biggl(\lambda\biggl(\frac{1}{2} + s\biggr) + (2-\lambda)\biggl(\frac{1}{2} - s\biggr)\biggr),$$

что равносильно неравенству

$$(f(\lambda) - f(1)\lambda)\biggl(\frac{1}{2} + s\biggr) \leqslant (f(1)(2-\lambda) - f(2-\lambda))\biggl(\frac{1}{2} - s\biggr).$$

Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f(t) \neq tf(1)$ при $t \in \check{U}_\varepsilon(1) = (1-\varepsilon, 1) \cup (1, 1+\varepsilon)$. Действительно, в противном случае найдется последовательность $t_n \to 1$, $n \to \infty$, $t_n \neq 1$ и $f(t_n) = t_n f(1)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f'(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n) - f(1)}{t_n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(t_n - 1)f(1)}{t_n - 1} = f(1)$$

– противоречие. Итак, если $2 - \lambda \in \check{U}_\varepsilon(1)$, то $f(1)(2-\lambda) \neq f(2-\lambda)$ и неравенство (ix) равносильно неравенству

$$\frac{f(\lambda) - f(1)\lambda}{f(1)(2-\lambda) - f(2-\lambda)}\biggl(\frac{1}{2} + s\biggr) \leqslant \frac{1}{2} - s. \tag{7}$$

{eq7}

Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 1-} \frac{f(\lambda) - f(1)\lambda}{f(1)(2-\lambda) - f(2-\lambda)} &= \lim_{t\to 0+} \frac{f(1-t) - f(1)(1-t)}{f(1)(1+t) - f(1+t)} \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{(f(1)(1-t) - f(1-t))/(-t)}{(f(1)(1+t) - f(1+t))/t} \\ &= \frac{(f(1)x - f(x))'|_{x=1}}{(f(1)x - f(x))'|_{x=1}} = 1.\end{aligned}$$

Поэтому неравенство (7) выполнено для всех $0 \leqslant \lambda < 1$ только при $s = 0$. Теорема доказана.

При $\alpha = 2$ п. (i) теоремы 2 теряет силу. В предельном случае из неравенства $|\varphi(xy)| \leqslant \varphi(x^\alpha)^{1/\alpha}\varphi(y^\beta)^{1/\beta}$, $x, y \in \mathscr{M}^+$, для $\beta = 1$ имеем неравенство $|\varphi(yx)| \leqslant \|y\|\varphi(x)$; в [9] показано, что оно эквивалентно характеризации Гарднера [4] неравенством

$$|\varphi(x)| \leqslant \varphi(|x|), \qquad x \in \mathscr{M}.$$

Лемма 4. *Если функция $f \in \Phi$ дифференцируема в точке $t = 1$, то $f'(1) < f(1)$.*

Доказательство. Имеем $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t) \geqslant 0$. Хорошо известно, что функция f на $(0,\infty)$ абсолютно непрерывна; она имеет производную всюду, за исключением счетного множества точек. Эта производная является убывающей функцией. Существует представление

$$f(t) = f(0+) + \int_0^t g(x)\,dx, \qquad 0 < t < \infty,$$

где $g(t)$ – правая производная функции $f(t)$. По предположению $g(t)$ убывает на $(0,\infty)$ и строго убывает на $(0,1)$. Имеем

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0+) + \int_0^1 g(x)\,dx > f(0+) + \int_0^{1/2} g(1/2)\,dx + \int_{1/2}^1 g(1)\,dx \\ &= f(0+) + \frac{g(1/2)}{2} + \frac{g(1)}{2} > g(1) = f'(1). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. Н. Шерстнев, *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*, Физматлит, М., 2008.

[2] А. М. Бикчентаев, “О представлении элементов алгебры фон Неймана в виде конечных сумм произведений проекторов. III. Коммутаторы в C^*-алгебрах”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 3–20.

[3] А. М. Бикчентаев, “Перестановочность проекторов и характеризация следа на алгебрах фон Неймана. I”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 12, 80–83.

[4] L. T. Gardner, “An inequality characterizes the trace”, *Canad. J. Math.*, **31**:6 (1979), 1322–1328.

[5] O. E. Tikhonov, “Subadditivity inequalities in von Neumann algebras and characterization of tracial functionals”, *Positivity*, **9**:2 (2005), 259–264.

[6] A. M. Bikchentaev, O. E. Tikhonov, “Characterization of the trace by Young’s inequality”, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **6**:2 (2005), Article 49.

[7] A. M. Bikchentaev, O. E. Tikhonov, “Characterization of the trace by monotonicity inequalities”, *Linear Algebra Appl.*, **422**:1 (2007), 274–278.

[8] А. М. Бикчентаев, “Об одном свойстве L_p-пространств на полуконечных алгебрах фон Неймана”, *Матем. заметки*, **64**:2 (1998), 185–190.

[9] G. K. Pedersen, E. Størmer, “Traces on Jordan algebras”, *Canad. J. Math.*, **34**:2 (1982), 370–373.

[10] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. II*, Encyclopaedia Math. Sci., **125**, Operator algebras and noncommutative geometry, 6, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[11] M. B. Ruskai, “Inequalities for traces on von Neumann algebras”, *Comm. Math. Phys.*, **26**:4 (1972), 280–289.

[12] S. M. Manjegani, *Inequalities in Operator Algebras*, Ph.D. Thesis, The University of Regina, Regina, Canada, 2004.

[13] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Springer-Verlag, New York, 1979.

[14] S. Sakai, *C^*-algebras and W^*-algebras*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **60**, Springer-Verlag, New York, 1971.

[15] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962.

[16] D. Deckard, C. Pearcy, “On matrices over the ring of continuous complex valued functions on a Stonian space”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **14**:2 (1963), 322–328.

[17] C. A. Akemann, J. Anderson, G. K. Pedersen, “Triangle inequalities in operator algebras”, *Linear and Multilinear Algebra*, **11**:2 (1982), 167–178.

[18] О. Е. Тихонов, “Выпуклые функции и неравенства для следа”, *Конструктивная теория функций и функциональный анализ*, Вып. 6, Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1987, 77–82.

А. М. Бикчентаев
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: Airat.Bikchentaev@ksu.ru

Поступило
23.06.2009
Исправленный вариант
22.04.2010